Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

46. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 28. 3. 2008

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Ropar beži pred policistom v temni ulici, na kateri sveti le ena ulična svetilka. Ker ropar nima časa, da bi se ozrl nazaj in videl kako daleč od njega je policist, beži pred njegovo senco, in sicer tako, da je vrh policistove sence vedno ravno pod njegovimi nogami.

   a) Kako hitro teče ropar, če je višina ulične svetilke 4 m, višina policista 1,9 m in hitrost policista 4 m/s?

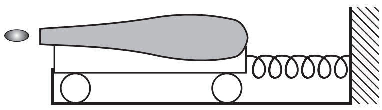
   b) Kako hitro pa mora teči ropar, če tečeta s policistom navzdol po klancu z naklonskim kotom 30°? Ropar in policist se držita pokončno, svetilka pa je prav tako za 4 m nad tlemi, merjeno v navpični smeri. Hitrost policista je enaka kot pri a).

2. a) Na jablani ob reki visi okroglo 80 gramsko jabolko s premerom 6 cm. Pripravlja se na nevihto in začel je pihati močan veter v vodoravni smeri. Kolikšna je največja hitrost vetra, da se jabolko ravno še ne utrga z veje? Jabolko se utrga z veje, če na pecelj deluje sila vsaj 1,70 N. (Opomba: obravnavaj samo ravnovesno stanje in zanemari začetni sunek vetra, ki zaniha jabolko). Za gostoto zraka vzemi 1,2 kg/m^3.

   b) Zaradi močne nevihte je reka prestopila bregove, tako da je jablana popolnoma potopljena. Področje okrog jablane je precej ravno, tako da je reka poplavila zelo široko področje in se upočasnila. Z računom preveri, ali je hitrost reke 6 km/h dovolj velika, da utrga jabolko? Gostota vode je 1000 kg/m^3. Ostali podatki so v delu a).

   Fizikalni poduk: upor sredstva (zraka ali vode) dobro opiše kvadratni zakon upora $F_u = \frac{1}{2} c \rho S v^2$, kjer je ρ gostota sredstva, S prečni presek jabolka, v hitrost sredstva in c koeficient, ki je odvisen od oblike telesa in je za okroglo telo 0,4.

3. Za blaženje povratnega sunka pri streljanju s topom je le-ta montiran na vodilih, po katerih se lahko giblje. Ob izstrelitvi se začne gibati v nasprotni smeri gibanja granate, napeta vzmet pa ga zaustavi in potisne nazaj v prvotno lego.
   Top z maso 20 ton izstreli granato z maso 200 kg v vodoravni smeri s hitrostjo 500 m/s glede na tla, pri čemer predpostavimo, da je čas izstrelitve zelo kratek in lahko sunek sile vzmeti zanemarimo. Zahtevamo, da top po izstrelitvi naredi 1 m dolgo pot po vodilih. Preden se začne top premikati je vzmet že stisnjena s silo, ki je enaka 90 % maksimalne sile pri zaustavljanju gibanja topa.

   a) Kolikšna je hitrost topa takoj po izstrelitvi?

   b) Za koliko moramo stisniti vzmet pred izstrelitvijo, da zadostimo pogoju, da je sila vzmeti pred izstrelitvijo enaka 90% končne sile?

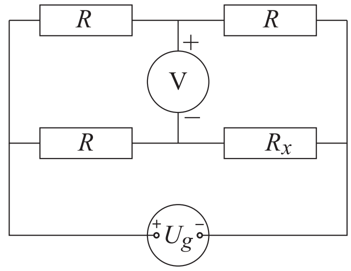
   c) Kolikšen mora biti prožnostni koeficient vzmeti, da se top ustavi po 1 m?

46. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 28. 3. 2008

Skupina II

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. V vezju na sliki je $R = 1$ kΩ, $U_g = 10$ V in notranji upor voltmetra $R_V = 10$ kΩ. Voltmeter kaže napetost $U_V = 1\ V$.



   a) Kolikšen tok teče skozi levi upor R v zgornji veji in kolikšen tok skozi levi upor R v spodnji veji? Sta tokova odvisna od upora R_x? (Tok skozi voltmeter teče v smeri od + k −.)

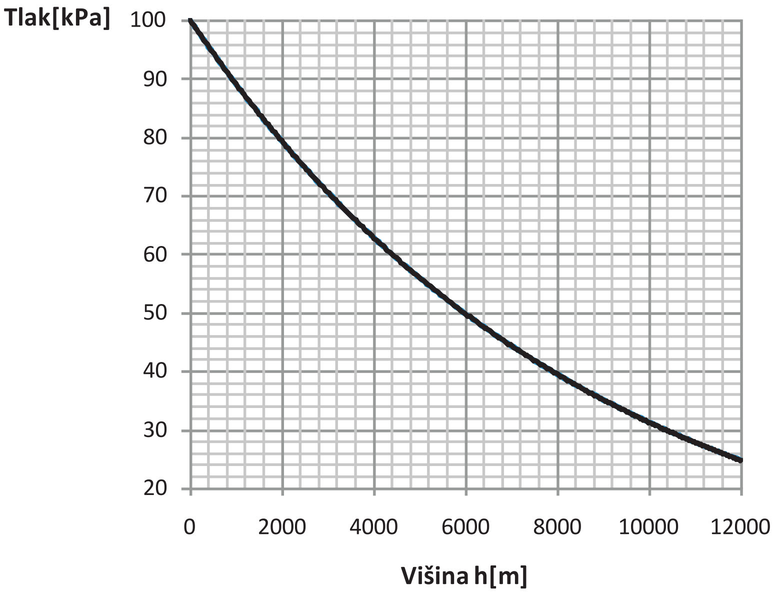
   b) Izračunaj upor R_x.

2. Balon na vroč zrak ima kupolo s polmerom 13 m. V košari balona je med drugim tudi gorilnik na propan, ki segreva zrak v kupoli in ga vzdržuje na približno konstantni temperaturi 120 °C. Temperatura zunanjega zraka je 20 °C. Ogrodje balona skupaj s posadko tehta 1600 kg.

   Predpostavi, da je temperatura v atmosferi na vseh višinah enaka. Odvisnost tlaka od višine v taki izotermni atmosferi je narisana na grafu. Kupola je na spodnjem koncu odprta, tako da je tlak v balonu enak zunanjemu zračnemu tlaku. Kilomolska masa zraka je 29 kg/kmol, splošna plinska konstanta pa je 8300 J/kmol K.

   a) Na kateri nadmorski višini ta balon leti?

   b) Kolikšno breme morajo odvreči, da bo nova ravnovesna višina letenja 100 m višje?



3. Z višine 100 cm nad zgornjo ploščo vodoravno postavljenega ploščatega kondenzatorja spustimo majhno nabito kroglico z maso 10 g in električnim nabojem $+1{,}0 \cdot 10^{-3}$ As. Zgornja plošča ima majhno luknjico, da lahko skoznjo pade kroglica. Plošči kondenzatorja sta priključeni na izvir napetosti 120 V (tako da je spodnja plošča nabita pozitivno, zgornja pa negativno).

   a) Kolikšen je največji razmik d med ploščama kondenzatorja, da se kroglica še odbije iz kondenzatorja, ne da bi se dotaknila spodnje plošče?

   b) Koliko časa mine v tem primeru od trenutka, ko kroglico spustimo, do trenutka, ko se vrne v izhodiščno lego?

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. S stropa visi lahka vrvica z dolžino l, na kateri je obešena majhna masivna kroglica. Iz estetskih razlogov bi želeli, da bi nihalo prebilo na levi strani od pritrdišča veliki zlati rez sekund ($t_1 = (\sqrt{5}+1)/2$ s), na desni strani pa mali zlati rez sekund ($t_2 = (\sqrt{5}-1)/2$ s), zato na višini x nad položajem kroglice v ravnovesni legi postavimo tanek žebelj, tako da se zgornji del vrvi na njem ustavi, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego pri gibanju v desno.

   a) Kolikšno mora biti razmerje x/l in iz katere smeri moramo na začetku poskusa spustiti nihalo, da bo nihalo nihalo na želen način?

   b) Nihanje je harmonično (sinusno) le v primeru, če so odmiki dovolj majhni. Če naj bo nihajni čas natančen vsaj na 1 %, odmik kota od navpičnice ne sme preseči 23°. Za kolikšen kot smemo na levi odmakniti nihalo, da bo pogoj izpolnjen?

2. Pri električnem avtu uporabimo velikanski kondenzator kot vir električne energije. V kondenzatorju je dielektrik barijev-titanat z dielektrično konstanto 19000, gostoto 4600 kg/m^3 in prebojno električno poljsko jakostjo $2{,}4 \cdot 10^8$ V/m. Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

   a) Kolikšna je največja shranjena energija v kilogramu takega kondenzatorja? Je to odvisno od oblike kondenzatorja?

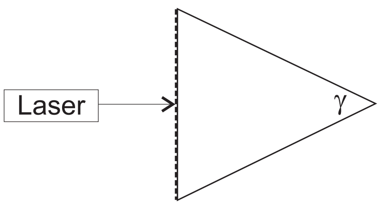
   b) Kolikšno pot lahko opravi avto pri stalni hitrosti 100 km/h, če ima vgrajen tak kondenzator z maso 500 kg? Pri vožnji s hitrostjo 100 km/h troši avto električno moč 10 kW.

   c) Za koliko se segreje kondenzator, če se zaradi tehnične napake pri polnjenju preseže maksimalno dovoljeno napetost, zaradi česar pride do preboja? Specifična toplota barijevega-titanata je $c_p = 550$ J/kgK.

3. Na ploskev tristrane steklene prizme z lomnim kvocientom 1,6 naparimo uklonsko mrežico iz aluminija z gostoto rež $1200\,\mathrm{mm}^{-1}$, kot kaže slika. Osnovna ploskev prizme je enakokrak trikotnik. Pravokotno na sredino uklonske mrežice posvetimo z laserjem valovne dolžine 633 nm.

   Kolikšen mora biti kot γ ob vrhu osnovne ploskve prizme, da se curek svetlobe prvega reda ojačitve lomi tako, da je izhajajoči curek svetlobe iz prizme vzporeden prvotnemu laserskemu curku svetlobe?

   Morda boš potreboval zvezi $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ in $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.



Regijsko tekmovanje srednješolcev iz fizike v letu 2008

28. marec 2008

Kazalo

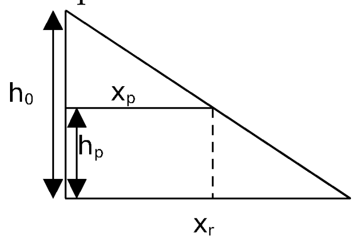
Skupina I – rešitve

1. *Podatki:* $h_0 = 4$ m, $h_p = 1{,}9$ m.

   a) Iz podobnih trikotnikov na sliki sledi, da je oddaljenost roparja od točke pod svetilko x_r enaka

   $$\frac{x_r}{h_0} = \frac{x_p}{h_0 - h_p}\,, \qquad x_r = \frac{h_0}{h_0 - h_p}\,x_p\,,$$

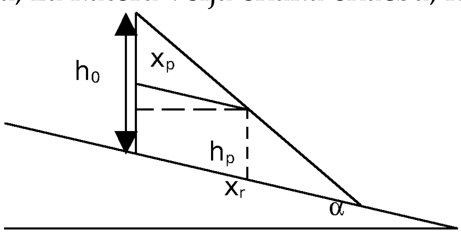
   pri čemer je x_p oddaljenost policista.

   Za hitrosti roparja in policista velja $x_r = v_r t$ in $x_p = v_p t$ torej

   $$v_r = \frac{h_0}{h_0 - h_p}\,v_p = 7{,}6\ \mathrm{m/s}\,. \qquad [6\ t.]$$

   b) V primeru, ko tečeta po klancu navzdol, prav tako lahko narišemo dva podobna trikotnika, za katera velja enaka enačba, kot v primeru a).

   Hitrost roparja je enaka tisti, izračunani pri a). [4 *t.*]

2. *Podatki:* $m = 80$ g, $F_0 = 1{,}70$ N, $r = 3$ cm, $\rho_z = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$, $v_0 = 6$ km/h, $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $c = 0{,}4$.

   a) V ravnovesju lahko silo, ki deluje na pecelj, razstavimo na vodoravno in navpično komponento:

   $$\begin{aligned} F_x &= \tfrac{1}{2} c \rho_z S v^2 = \tfrac{1}{2} c \rho_z \pi r^2 v^2\,, \\ F_y &= mg\,. \end{aligned}$$

   V ravnovesju mora biti sila na pecelj manjša od mejne sile $F_x^2 + F_y^2 < F_0^2$.

   $$\begin{aligned} F_x &< \sqrt{F_0^2 - F_y^2}\,, \\ v &< \sqrt{\frac{2}{\pi c \rho_z r^2}\sqrt{F_0^2 - m^2 g^2}} = 47\ \mathrm{m/s} = 170\ \mathrm{km/h}\,. \qquad [6\ t.] \end{aligned}$$

b) Predpostavimo najprej, da je tok dovolj šibek, da jabolka še ne utrga. Ponovno v ravnovesju silo, ki deluje na pecelj, razstavimo na vodoravno in navpično komponento, pri čemer pa moramo tokrat upoštevati tudi silo vzgona:

$$
\begin{aligned}
F_x &= \tfrac{1}{2}c\rho_v S v_0^2 = \tfrac{1}{2}c\rho_v \pi r^2 v_0^2 = 1{,}57\ \mathrm{N}\,, \\
F_y &= \left(m - \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}\right) g = -0{,}325\ \mathrm{N}\,.
\end{aligned}
$$

Sila, ki deluje na pecelj je $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1{,}60\ \mathrm{N} < F_0$. Tok je torej dovolj šibek, da jabolka ne utrga. (Opomba: številski podatki so nastavljeni tako, da če tekmovalec pozabi upoštevati vzgon, dobi napačen odgovor.) [4 *t.*]

3. *Podatki:* $M = 20$ t, $m = 200$ kg, $v_g = 500$ m/s, $l = 1$ m, $\eta = 90$ %.

   a) Ker je čas iztrelitve zelo kratek, lahko sunek sile vzmeti v tem času zanemarimo. Ohranja se skupna gibalna količina topa in granate, $0 = Mv - mv_g$, torej

$$
v = \frac{m}{M} v_g = 5\ \mathrm{m/s}\,. \qquad [3\ t.]
$$

   b) Če z x_1 označimo začetni skrček vzmeti (glede na neobremenjeno vzmet) in z x_2 največji skrček vzmeti, velja za ustrezni sili, ki napenjata vzmet

$$
F_1 = kx_1\,, \qquad F_2 = kx_2\,, \qquad \frac{F_1}{F_2} = \eta \quad \text{in od tod} \quad \frac{x_1}{x_2} = \eta\,,
$$

   ali $x_2 = x_1/\eta$. Upoštevamo $x_2 - x_1 = l$ in za x_1 dobimo enačbo

$$
\frac{x_1}{\eta} - x_1 = l\,, \quad \text{z rešitvijo} \quad x_1 = \frac{\eta}{1-\eta}\, l = 9\, l = 9\ \mathrm{m}\,. \qquad [3\ t.]
$$

   c) Na začetku ima top z vzmetjo kinetično in prožnostno energijo, ko se zaustavi, pa le prožnostno. Ker ni dela drugih sil, se ohranja vsota kinetične in prožnostne energije

$$
\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}kx_2^2\,.
$$

   Od tod izrazimo k:

$$
k = \frac{Mv^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{(1-\eta)Mv^2}{(1+\eta)l^2} = \frac{Mv^2}{19 l^2} = 26\ \mathrm{kN/m}\,. \qquad [4\ t.]
$$

Skupina II – rešitve

1. *Podatki:* $U_g = 10$ V, $U_V = 1$ V, $R = 1$ kΩ, $R_V = 10$ kΩ.

   a) Iz podatka za napetost in upor voltmetra lahko takoj izračunamo tok skozi voltmeter, $I_V = U_V/R_V = 0{,}1$ mA. Tok teče (na sliki) navzdol, torej od zgornje veje proti spodnji. Iskana tokova lahko izračunamo brez poznavanja upora R_x. [2 *t.*]

   Tok skozi levi zgornji upornik v vezju označimo z I_1; tok skozi desnega je potem $I_1 - I_V$. Za padce napetosti v zgornji veji velja

$$RI_1 + R(I_1 + I_V) = U_g\,, \qquad I_1 = \frac{U_g}{2R} + \frac{I_V}{2} = \frac{U_g}{2R} + \frac{U_V}{2R_V} = 5{,}05\ \text{mA}\,.$$

   [2 *t.*]

   Tok skozi levi upornik v spodnji veji označimo I_2. Za padce napetosti na levem uporniku v zgornji veji, voltmetru in levem uporniku v spodnji veji velja:

$$RI_1 + U_V - RI_2 = 0\,, \qquad I_2 = I_1 + \frac{U_V}{R} = \frac{U_g}{2R} + \frac{U_V}{R} + \frac{U_V}{2R_V} = 6{,}05\ \text{mA}\,.$$

   [2 *t.*]

   b) Za padce napetosti v spodnji veji velja

$$RI_2 + R_x(I_2 + I_V) = U_g\,,$$

$$R_x = \frac{U_g - RI_2}{I_2 + I_V} = \frac{\frac{U_g}{2} - U_V - \frac{I_V}{2}R}{\frac{U_g}{2R} + \frac{U_V}{R} + \frac{3I_V}{2}} = \frac{1 - 2\frac{U_V}{U_g} - \frac{R}{R_V}\frac{U_V}{U_g}}{1 + 2\frac{U_V}{U_g} + 3\frac{R}{R_V}\frac{U_V}{U_g}}\,R = 642\ \Omega\,.$$

   [4 *t.*]

2. *Podatki:* $r = 13$ m, $T_0 = 20$ °C, $T = 120$ °C, $m = 1600$ kg, $M = 29$ kg/kmol, $\Delta h = 100$ m.

   a) Ker balon leti na konstantni višini, je vsota vseh sil v navpični smeri 0. Vzgon okoliškega zraka bo torej kompenziral maso balona in vročega zraka znotraj kupole:

$$mg + F_{\text{zr}} = F_{\text{vzg}}.$$

   Za volumen izpodrinjenega zraka vzamemo kar volumen kupole: $V = 4\pi r^3/3$. S T_0 označimo temperaturo atmosfere, s T temperaturo vročega zraka v kupoli, z ρ_0 gostoto zraka v atmosferi, z ρ gostoto vročega zraka. Dobimo

$$mg = V(\rho_0 - \rho)g.$$

Upoštevamo še splošno plinsko enačbo:

$$pV = \frac{mRT}{M}, \qquad p = \frac{\rho RT}{M}, \qquad \rho = \frac{pM}{RT}.$$

To vstavimo v enačbo za sile in dobimo

$$\begin{aligned} m &= \frac{4\pi r^3}{3} \frac{pM}{R} (1/T_0 - 1/T), & (1) \\ p &= \frac{3mR}{4\pi r^3 (1/T_0 - 1/T) M} = 57,3\,\mathrm{kPa}. \end{aligned}$$

Balon torej pri tem tlaku stabilno leti. Iz grafa odčitamo, da tolikšen tlak ustreza nadmorski višini 4800 m. [6 *t.*]

b) Spremembo mase lahko izračunamo iz enačbe (1), če poznamo spremembo tlaka pri podani spremembo višine. Sprememba višine je premajhna, da bi lahko spremembo tlaka odčitali iz grafa. Spremembo tlaka zato izračunamo iz enačbe $\Delta p = \rho g \Delta h$, pri čemer vzamemo za ρ kar gostoto zraka na višini 4800 m. Ker je sprememba višine majhna, je sprememba gostote zanemarljivo majhna. Gostoto izračunamo iz plinske enačbe, saj smo pri a) izračunali tlak na tej višini:

$$\rho = \frac{pM}{RT_0} = 0{,}67\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \Delta p = \rho g \Delta h = \frac{pMg\Delta h}{RT_0} = 660\ \mathrm{Pa}$$

in

$$\Delta m = \frac{4\pi r^3 \Delta p M}{3R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) = \frac{m \Delta p}{p} = \frac{mMg\Delta h}{RT_0} = 19\,\mathrm{kg}.$$

[4 *t.*]

Za rešitev z odčitkom iz grafa v intervalu 20 kg $\pm$ 5 kg [2 *t.*]

3. *Podatki:* $h = 100$ cm, $m = 10$ g, $e = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ As, $U = 120$ V.

a) Delo, ki ga opravi izvir pri zaustavljanju kroglice, je enako spremembi potencialne energije kroglice na poti $h + d$, pri čemer je d razmik med ploščama kondenzatorja.

$$eU = mg(h + d), \qquad d = \frac{eU}{mg} - h = 22{,}4\,\mathrm{cm}. \qquad [5\ t.]$$

b) Na poti do zgornje plošče kondenzatorja pada s težnim pospeškom, za kar potrebuje čas:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}452\,\mathrm{s}.$$

Znotraj kondenzatorja deluje nanj zaviralna električna sila in teža. Pojemek je

$$a = \frac{eE - mg}{m} = \frac{eU}{md} - g = 43{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

in porabljeni čas

$$t_2 = \sqrt{\frac{2d}{a}} = 0{,}101\ \mathrm{s}\,.$$

Skupani čas je torej $2t_1 + 2t_2 = 1{,}10$ s. [5 *t.*]

Skupina III – rešitve

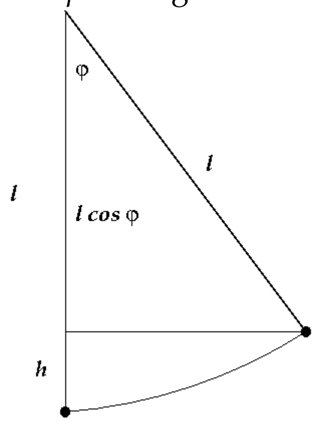
1. *Podatki:* $t_1 = (\sqrt{5}+1)/2$ s, $t_2 = (\sqrt{5}-1)/2$ s, $\varphi_0 = 23°$.

   a) Iz enačbe za nihajni čas matematičnega nihala, veljavnega pri dovolj majhnih odmikih, dobimo

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \qquad \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{l}{x}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\,, \qquad \frac{x}{l} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 = 0{,}146\,.$$

   [4 *t.*]

   b) V skrajnih legah ima nihalo le potencialno energijo. Iz ohranitve energije pri nihanju sledi, da se v obeh skrajnih točkah dvigne enako. Iz slike razberemo zvezo med odmikom φ in dvigom h: $h = l - l\cos\varphi = l(1-\cos\varphi)$.



   Iz zahteve, da sta dviga v skrajnih točkah enaka, sledi

$$l(1-\cos\varphi) = x(1-\cos\varphi_0)\,,$$

   pri čemer smo upoštevali, da manjši dolžini nihala ustreza večji kot odmika. Za začetni odklonski kot na levi dobimo

$$\cos\varphi = 1 - \frac{x}{l}(1-\cos\varphi_0)\,, \qquad \varphi = 8{,}7°\,. \qquad [6\ t.]$$

2. *Podatki:* $\varepsilon = 19000$, $\rho = 4600\ \mathrm{kg/m^3}$, $E_p = 2{,}4 \cdot 10^8\ \mathrm{V/m}$, $v = 100\ \mathrm{km/h}$, $m = 500\ \mathrm{kg}$, $P = 10\ \mathrm{kW}$, $c_p = 550\ \mathrm{J/kgK}$.

   a) Kondenzator s površino S in razmikom med ploščama d ima kapaciteto $C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d}$. Ko ga nabijemo na napetost U, ima električno polje $E = U/d$ električno energijo

   $$W = \tfrac{1}{2} CU^2 = \tfrac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d} U^2 = \tfrac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d} (Ed)^2 = \tfrac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 V E^2 = \tfrac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 \frac{m}{\rho} E^2 \,.$$

   Gostota električne energije je torej

   $$w = \frac{W}{m} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2\rho} \,.$$

   Maksimalno gostoto energije dosežemo z maksimalnim dovoljenim električnim poljem

   $$w_{max} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E_p^2}{2\rho} = 1{,}05\ \mathrm{MJ/kg} \,. \qquad [5\ t.]$$

   b) Celotna energija 500 kg kondenzatorja je enaka $W = mw = 523$ MJ. Če s to energijo napajamo vir z močjo $P = 10$ kW, se vsa energija porabi po času $t = W/P = 52300$ s $= 14{,}5$ h. Doseg avta je torej $R = v_a t = 1450$ km. [3 *t.*]

   c) Poglejmo še, za koliko se segreje kondenzator pri električnem preboju. Takrat velja:

   $$W = mc_p \Delta T \,, \qquad w = c_p \Delta T \qquad \Delta T = \frac{w}{c_p} = 1900\ \mathrm{K} \,.$$

   [2 *t.*]

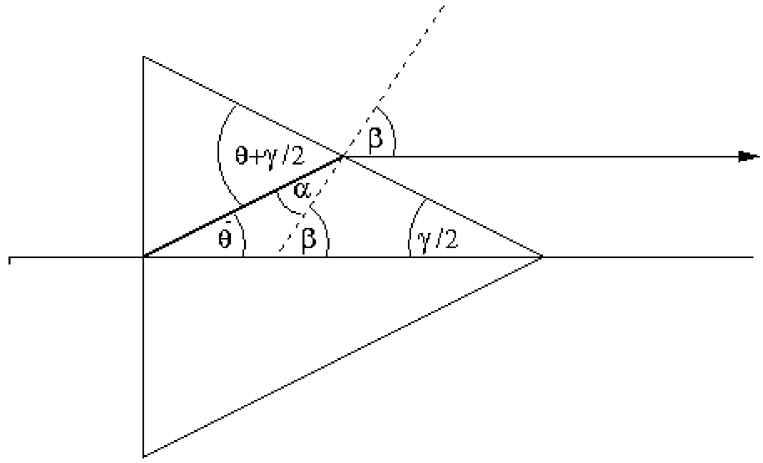
3. *Podatki:* $n = 1{,}6$, $1/a = 1200\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\lambda = 633\,\mathrm{nm}$

   Do ojačitev pride, ko je razlika optičnih poti žarkov iz dveh sosednjih rež cel večkratnik valovne dolžine. Upoštevati je treba, da je v steklu optična pot za faktor n-krat daljša, ker se svetloba v sredstvu giba počasneje kot v vakuumu.

   Pogoj za ojačitev potem napišemo

   $$a \sin\theta_N = N \frac{\lambda}{n} \,, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

   Za prvi red, $N = 1$, dobimo $\theta = 28{,}4^\circ$. [3 *t.*]



Na sliki je narisana pot žarka, ki po izhodu iz prizme ostane vzporeden s prvotno smerjo. Iz slike razberemo $\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ in $\alpha = 90^\circ - (\theta + \frac{1}{2}\gamma)$. Zapišimo lomni zakon

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos(\theta + \frac{1}{2}\gamma)} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\theta\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\theta\sin\frac{1}{2}\gamma}\,.$$

Števec in imenovalec delimo s $\cos\frac{1}{2}\gamma$ in dobimo

$$n = \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta\ \tan\frac{1}{2}\gamma}\,, \qquad \tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{n\cos\theta - 1}{n\sin\theta}\,, \qquad \gamma = 56{,}5^\circ\,.$$

[7 *t*.]