

**Društvo matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19  
1000 Ljubljana

# **Tekmovalne naloge DMFA Slovenije**

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

### Naloge za 8. razred

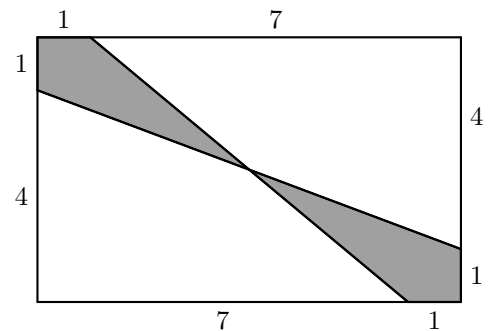
Čas reševanja: **90 minut**. V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

A1	A2	A3	A4	A5

B1	B2	B3

**A1.** Dan je pravokotnik s stranicama 8 cm in 5 cm. Kolikšna je ploščina osenčenega dela pravokotnika?

- (A)  $4\frac{3}{5}$  cm<sup>2</sup>                      (B) 5 cm<sup>2</sup>  
 (C)  $5\frac{1}{4}$  cm<sup>2</sup>                      (D)  $6\frac{1}{2}$  cm<sup>2</sup>  
 (E) 8 cm<sup>2</sup>

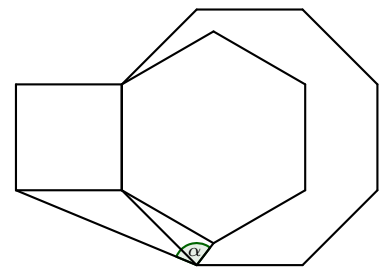


**A2.** Kolikšna je vrednost izraza  $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{0,01}}}\right)^{-1}$  ?

- (A) 1      (B) 0.01      (C)  $1\frac{1}{11}$       (D)  $\frac{1}{11}$       (E) 11

**A3.** Jure je narisal pravilni osemkotnik, pravilni šestkotnik, kvadrat in dva trikotnika ter označil kot  $\alpha$ , kot je razvidno s slike. Kolikšna je velikost kota  $\alpha$ ?

- (A) 90°      (B) 100°      (C) 100,5°      (D) 105°      (E) 108°



**A4.** Enakokrakemu trapezu s ploščino 18 cm<sup>2</sup> je včrtana krožnica s polmerom 2 cm. Koliko meri krak tega trapeza?

- (A) 2,25 cm      (B) 4 cm      (C) 4,5 cm      (D) 6,75 cm      (E) 9 cm

**A5.** Za naravna števila  $m, n$  in  $k$  velja:  $2^m \cdot 3^n = 144^k$ . Katero od ponujenih vrednosti lahko zavzame vsota  $m + n$ ?

- (A) 2001      (B) 2002      (C) 2003      (D) 2004      (E) 2005

**B1.** Kot pri oglišču  $B$  trikotnika  $ABC$  je za  $90^\circ$  večji od kota pri oglišču  $A$ . Simetrala notranjega kota pri oglišču  $C$  seka stranico  $AB$  v točki  $D$ . Simetrala zunanjega kota pri oglišču  $C$  seka nosilko stanice  $AB$  v točki  $E$ . Dokaži, da je daljica  $CD$  skladna z daljico  $CE$ .

**B2.** Na nekem smučišču so letno vozovnico v primerjavi s predhodno sezono podražili za 68%. Izkupiček pri prodaji pa se je s tem zvišal samo za 5%. Za koliko odstotkov je upadlo število prodanih vozovnic?

**B3.** Zapiši vsa cela števila  $x$ , ki zadoščajo obema neenačbama:

$$2x - 3(x - 2) < 9$$

$$3 - (x - 2)(3 - x) \geq x^2.$$

Zapiši postopek in odgovor utemelji.

### Naloge za 9. razred

Čas reševanja: **90 minut**. V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

A1	A2	A3	A4	A5

B1	B2	B3

**A1.** Naravna števila od 1 naprej so napisana drugo za drugim od leve proti desni brez presledka. Katera številka je napisana na 2022. mestu?

- (A) 9                      (B) 7                      (C) 5                      (D) 1                      (E) 0

**A2.** Janko je na mizo postavil 10 posod. V prvi posodi je pripravil 100 g raztopine, v kateri je bilo 10 % sirupa, v drugi posodi 200 g raztopine z 20 % sirupa itd. V vsaki posodi je pripravil 100 g raztopine več kot v predhodni, tako da je vsebovala 10 % sirupa več kot raztopina v predhodni posodi. Tako je bilo v 10. posodi 1000 g raztopine s 100 % sirupa. Vsebino vseh 10 posod je prelij v veliko posodo. Kolikšen je delež sirupa v raztopini v veliki posodi?

- (A) 50 %                      (B) 55 %                      (C) 60 %                      (D) 65 %                      (E) 70 %

**A3.** Stranici pravokotnika sta dolgi 10 cm in 7 cm. Presečišča simetral vseh notranjih kotov pravokotnika so oglišča novega štirikotnika. Kolikšna je ploščina dobljenega štirikotnika?

- (A) 2 cm<sup>2</sup>                      (B) 4,5 cm<sup>2</sup>                      (C) 5 cm<sup>2</sup>                      (D) 6 cm<sup>2</sup>                      (E) 17,5 cm<sup>2</sup>

**A4.** Anja in Peter imata vsak svojo igralno kocko. Najprej hkrati vržeta kocki. Če sta števili pik na obeh kockah enaki, zmaga Anja. Če sta števili pik različni, Anja ponovno vrže svojo kocko. Če sta po drugem Anjinem metu števili pik na obeh kockah enaki, zmaga Peter, sicer se igra konča z neodločenim izidom. Kolikšna je verjetnost, da se igra konča z neodločenim izidom?

- (A) 0                      (B)  $\frac{1}{6}$                       (C)  $\frac{5}{6}$                       (D)  $\frac{25}{36}$                       (E)  $\frac{27}{36}$

**A5.** Oznaka  $k!$  pomeni  $k! = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Na primer  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ . Katero je največje celo število  $n$ , za katerega je število  $11!$  deljivo z  $2^n$ ?

- (A) 4                      (B) 5                      (C) 6                      (D) 8                      (E) ne obstaja

**B1.** Zbiralnik vode lahko polnimo s tremi različnimi cevmi. S prvo in drugo cevjo hkrati napolnimo zbiralnik v 20 minutah. Z drugo in tretjo cevjo hkrati napolnimo zbiralnik v 15 minutah. S prvo in tretjo cevjo hkrati napolnimo zbiralnik v 12 minutah. V kolikšnem času napolnimo zbiralnik s vsemi tremi cevmi hkrati?

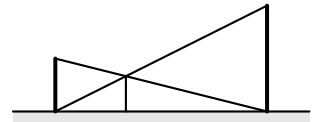
**B2.** Določí  $a$ , da bosta enačbi ekvivalentni.

$$\left(\frac{2x}{3} - 2\right)^2 - \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = -\frac{5(x-4)}{3} \cdot \frac{x+2}{3} + 3\frac{7}{9}$$

$$\left(\frac{2a-x}{4}\right)^2 - \left(\frac{x+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{3x}{4}\right)^2$$

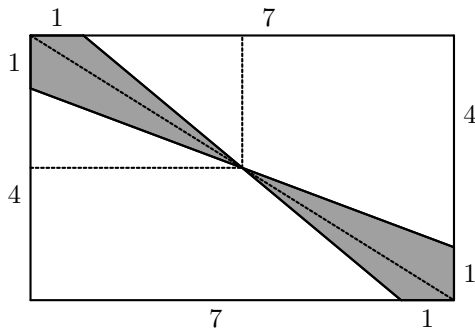


**B3.** Jaka je napel vrv od vrha vsakega od dveh kolov, zapičenih v zemljo, do nožišča drugega kola, kot prikazuje slika. Manjši kol je visok 1 m, večji 2 m. Na kateri višini, merjeno od tal, se vrvi križata?



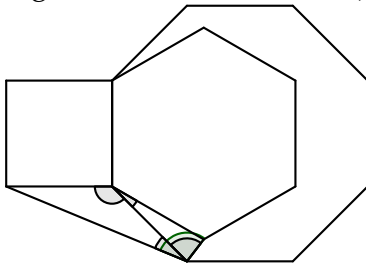
A1	A2	A3	A4	A5
D	E	D	C	D

**A1.** Z diagonalo razdelimo osenčeni del na 4 trikotnike, ki imajo eno od stranic dolgo 1 cm. Dva od teh trikotnikov imata višino enako polovici dolžine pravokotnika, to je 4 cm, in ploščino  $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \text{ cm}^2$ . Ostala dva trikotnika imata višino enako polovici širine pravokotnika, to je 2,5 cm, in ploščino  $\frac{1 \cdot 2,5}{2} = 1,25 \text{ cm}^2$ . Vsota ploščin vseh štirih trikotnikov je  $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1,25 = 6,5 \text{ cm}^2$ .

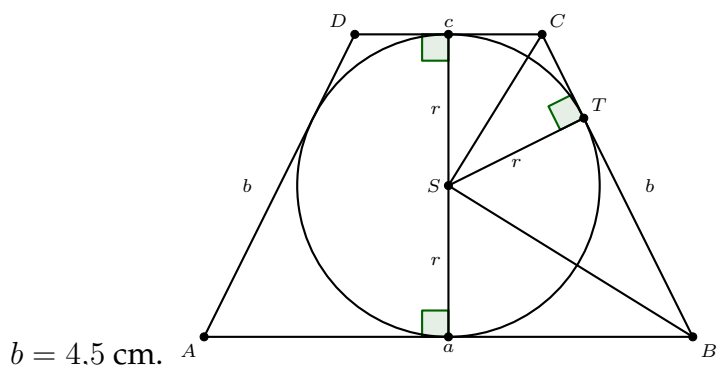


**A2.** Izračunamo  $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{0.01}}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{0.1}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1+10}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{11}\right)^{-1} = 11$ .

**A3.** Stranice kvadrata, pravilnega šestkotnika in pravilnega osemkotnika so skladne. Vsak notranji kot v kvadratu meri  $90^\circ$ , v pravilnem šestkotniku  $120^\circ$ , v pravilnem osemkotniku pa  $135^\circ$ . Trikotnik, ki ga omejujeta stranica pravilnega šestkotnika in pravilnega osemkotnika, je enakokraki. Notranji kot ob vrhu tega trikotnika meri  $135^\circ - 120^\circ = 15^\circ$ . Tedaj je vsak izmed notranjih kotov ob osnovnici tega trikotnika velik  $\alpha - \beta = (180^\circ - 15^\circ) : 2 = 82,5^\circ$ . Tudi trikotnik, ki ga omejujeta stranica kvadrata in pravilnega osemkotnika, je enakokraki. Notranji kot ob vrhu tega trikotnika meri  $135^\circ$ , saj je del polnega kota ob vrhu tega trikotnika in ga izračunamo s  $360^\circ - 15^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 135^\circ$ . Tedaj vsak izmed notranjih kotov ob osnovnici tega trikotnika meri  $\beta = (180^\circ - 135^\circ) : 2 = 22,5^\circ$ . Velikost iskanega kota je  $82,5^\circ + 22,5^\circ = 105^\circ$ .

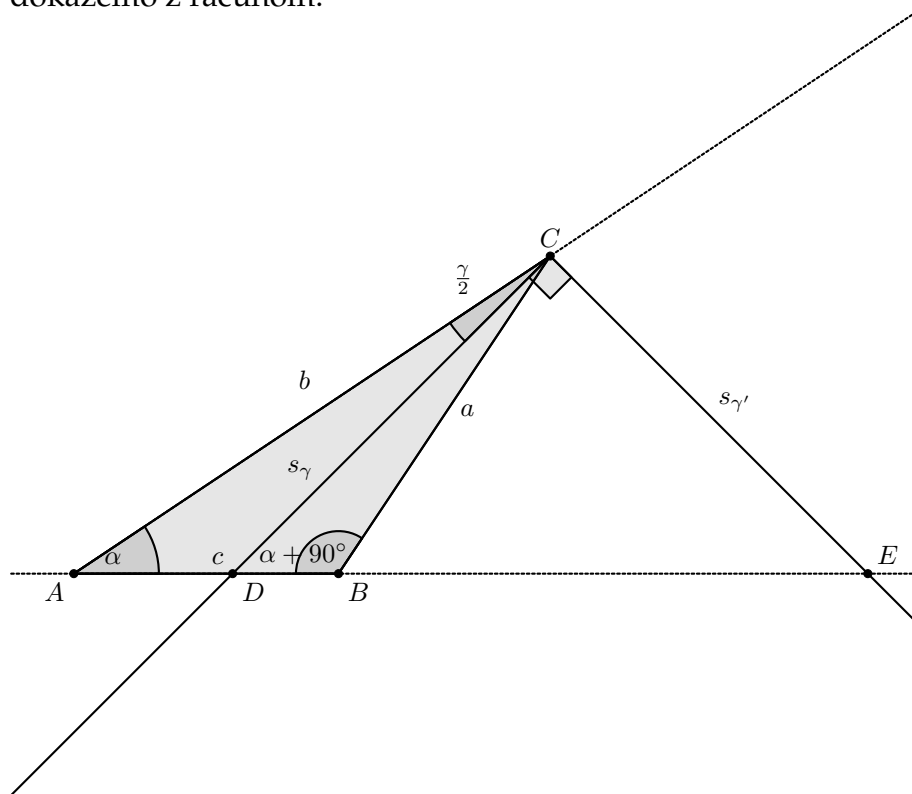


**A4.** Ker je polmer včrtane krožnice 2 cm, je višina tega trapeza 4 cm. Iz ploščine izračunamo srednjico, ki meri 3,5 cm, torej je vsota dolžin osnovnic 7 cm. Zaradi skladnih trikotnikov je krak  $b$  sestavljen iz polovice osnovnice  $a$  in  $c$ :  $b = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}$ . Od tod dobimo rezultat, da je



**A5.** Zapišemo  $144^k = (2^4 \cdot 3^2)^k = 2^{4k} \cdot 3^{2k}$ . Torej je  $m = 4k$ ,  $n = 2k$  in  $m + n = 6k$ . Iskano število mora biti deljivo s 6 (sodo in z vsoto števk, deljivo s 3), med ponujenimi odgovori ustreza samo število 2004.

**B1.** Narišemo si sliko in vidimo, da se simetrali sekata pod pravim kotom, kar lahko tudi hitro dokažemo z računom.



Notranji kot pri  $A$  označimo z  $\alpha$ , kot pri  $B$  z  $\beta$  in kot pri  $C$  z  $\gamma$ .  $\angle DCB$  je  $\frac{\gamma}{2}$  in  $\angle BCE$  je  $\frac{\gamma_1}{2}$ . Kot  $\gamma$  izrazimo s kotom  $\alpha$ :  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ + \alpha) = 90^\circ - 2\alpha$ . Zato je zunanji kot  $\gamma_1 = 90^\circ + 2\alpha$ . Od tod pa dobimo, da je  $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ - \alpha$  in  $\frac{\gamma_1}{2} = 45^\circ + \alpha$ . Vsota teh dveh polovic kotov je  $90^\circ$ . Sedaj izračunamo kot  $\angle BDC$  iz trikotnika  $BCD$ :  $\angle D = 180^\circ - (\beta + \frac{\gamma}{2}) = 180^\circ - (90^\circ + \alpha + 45^\circ - \alpha) = 45^\circ$ . Na podoben način izračunamo še kot  $\angle CEB$  iz trikotnika  $BEC$ :  $\angle E = 180^\circ - (\beta_1 + \frac{\gamma_1}{2}) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 45^\circ + \alpha) = 45^\circ$ . Dokazali smo, da sta kота  $\angle D$  in  $\angle E$  skladna in merita  $45^\circ$ , zato je trikotnik  $DEC$  enakokrak in sta stranici  $CD$  in  $CE$  skladni.

- Narisana in pravilno označena skica z označenima simetralama. .... 1 točka
- Zapis velikosti kotov  $\gamma$  in  $\gamma'$  z  $\alpha$ . .... 1 točka
- Izračunana velikost kota med simetralama. .... 1 točka
- Izračunana velikost kota z vrhom v točki  $D$ . .... 1 točka
- Izračunana velikost kota z vrhom v točki  $E$ . .... 1 točka

Ugotovitev, da je trikotnik  $DEC$  enakokrak in sklep o skladnosti daljic  $CD$  in  $CE$ .. ... 1 točka

**Opomba 1:** Če je poleg skice zapisan pravilen odgovor, pridobljen z merjenjem, tekmovalec dobi največ 2 točki.

**Opomba 2:** Za rešitev na konkretnem primeru z izbranim kotom  $\alpha$  tekmovalec dobi največ 3 točke.

**B2.** Denimo, da so v predhodnem letu prodali  $n$  vozovnic po ceni  $c$ . Tedaj je bil izkupiček enak  $nc$ . Nova cena je za 68 % odstotkov višja in je enaka  $1,68c$ , izkupiček pa je za 5 % višji in znaša  $1,05nc$ . Število prodanih vstopnic je torej  $1,05nc : 1,68c$ , kar znesse  $0,625n$ . Torej je število kupcev enako 62,5 % števila kupcev iz predhodnega leta, število prodanih vozovnic se je zmanjšalo za 37,5 %.

Upoštevanje izkupička v preteklem letu:  $n \cdot c$  ..... 1 točka  
 Zapisana vrednost vozovnice po podražitvi:  $1,68c$  ..... 1 točka  
 Zapisan izkupiček v trenutnem letu:  $1,05nc$  ..... 1 točka  
 Upoštevanje razmerja za izračun števila prodanih vozovnic v trenutnem letu. .... 1 točka  
 izračunan delež prodanih vstopnic in sklep o upadlem številu prodanih vozovnic. .... 1 točka  
 Odgovor. .... 1 točka

**Opomba:** Za reševanje na konkretnem primeru tekmovalec dobi največ 4 točke.

**B3.** Rešimo prvo neenačbo:  $2x - 3(x - 2) < 9$

$$2x - 3x + 6 < 9$$

$$-x < 3$$

Rešitev:  $x > -3$ .

Rešimo še drugo neenačbo:  $3 - (x - 2)(3 - x) \geq x^2$

$$3 - (-x^2 + 5x - 6) \geq x^2$$

$$x^2 - 5x + 9 \geq x^2$$

$$-5x \geq -9$$

Rešitev:  $x \leq 1.8$ .

Iščemo vsa cela števila, ki zadoščajo pogoju  $-3 < x \leq 1.8$ . To so:  $-2, -1, 0, 1$ .

Preoblikovanje prve neenačbe do:  $-x < 3$  oz.  $-x + 6 < 9$ . .... 1 točka

Rešitev prve neenačbe. .... 1 točka

Preoblikovanje leve strani druge neenačbe do tročlenika. .... 1 točka

Rešitev druge neenačbe. .... 2 točki

Zapisane rešitve, ki zadoščajo obema neenačbama. .... 1 točka

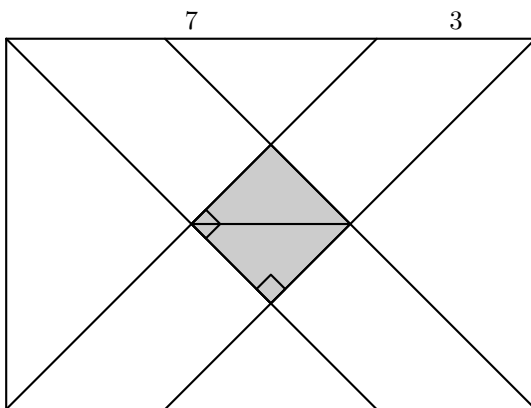
**Opomba:** Za reševanje obeh neenačb samo s poskušanjem tekmovalec dobi največ 3 točke.

A1	A2	A3	A4	A5
E	E	B	D	D

**A1.** Če eno za drugim zapišemo naravna števila od 1 do 999, zasedejo prvih  $9 + 180 + 2700 = 2889$  mest. Enomestna števila zasedejo prvih 9 mest, 90 dvomestnih števil pa naslednjih 180. Torej iščemo trimestno število. Iz enačbe  $9 + 180 + 3x = 2022$ , izračunamo  $x = 611$ . Vemo, da je 1. (najmanjše) trimestno število 100, 101. trimestno število je 200, ..., 601. trimestno število je 700, torej je 611. trimestno število 710 in iskana številka je 0.

**A2.** Ko je Janko prelil vsebine vseh posod v večjo, je bilo v večji posodi  $100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600 + 700 + 800 + 900 + 1000 = 5500$  g raztopine. Izračunamo še, koliko gramov sirupa je bilo v posamezni posodi. V prvi posodi je bilo 10 g sirupa (10 % od 100 g), v drugi 40 g (20 % od 200 g), v tretji 90 g, v četrti 160 g, v peti 250 g, v šesti 360 g, v sedmi 490 g, v osmi 640 g, v deveti 810 g in v deseti posodi 1000 g sirupa. V večji posodi je tako bilo  $10 + 40 + 90 + 160 + 250 + 360 + 490 + 640 + 810 + 1000 = 3850$  g sirupa. Delež sirupa v večji posodi je bil  $\frac{3850}{5500} = 0,7 = 70\%$ .

**A3.** Simetrale pravih kotov se sekajo pod pravimi koti. Nastali štirikotnik je kvadrat z diagonalo 3 cm. Njegova ploščina je enaka  $p = \frac{d^2}{2} = \frac{3^2}{2} = 4,5 \text{ cm}^2$ .



**A4.** Število različnih možnosti pri metu dveh igralnih kock je 36 in v 30 primerih sta števili pik različni. Pri drugem Anjinem metu je 6 možnih izidov in v petih je izid drugačen od Petrovega. Verjetnost neodločene igre je zato  $\frac{30}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ .

**A5.** Razcepimo število  $11!$  na prafaktorje:  $11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ . Vidimo, da potenca  $2^8$  deli  $11!$ , zato je največji  $n = 8$ .

#### B1.

##### Rešitev 1:

Prva sama napolni zbiralnik v  $x$  minutah, v 1 minuti tako  $\frac{1}{x}$  zbiralnika. Druga sama napolni zbiralnik v  $y$  minutah, v 1 minuti tako  $\frac{1}{y}$  zbiralnika. Tretja sama napolni zbiralnik v  $z$  minutah, v 1 minuti tako  $\frac{1}{z}$  zbiralnika. Prva in druga skupaj v 1 minuti:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$  zbiralnika. Druga in tretja skupaj v 1 minuti:  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$  zbiralnika. Prva in tretja skupaj v 1 minuti:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$  zbiralnika. Zanimajo nas vse tri cevi skupaj v 1 minuti, tako  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$ , kjer z  $n$  označimo čas

polnjenja s tremi cevmi. Zaradi znanih vsot dveh členov, velja enakost  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \cdot \frac{1}{n}$ . Vsote dveh členov nadomestimo s števili  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + (\frac{1}{z} + \frac{1}{x}) + (\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 2 \cdot \frac{1}{n}$  in  $\frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = 2 \cdot \frac{1}{n}$ . Po razširitvi na skupni imenovalc je rešitev enačbe  $n = 10$ , kar pomeni, da je zbiralnik poln v 10 minutah.

**Rešitev 2:**

Sklepamo, da v 1 minuti prva in druga cev skupaj napolnita  $\frac{1}{20}$  zbiralnika, druga in tretja cev skupaj  $\frac{1}{15}$ , prva in tretja cev skupaj pa  $\frac{1}{12}$  zbiralnika. Če bi torej imeli 6 cevi, in sicer še 3 take, kot jih imamo, bi vseh 6 cevi v 1 minuti napolnilo  $\frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$  zbiralnika in zbiralnik bi bil poln v 5 minutah. Ker pa imamo le 3 cevi, zbiralnik napolnimo v 10 minutah.

- Upoštevanje, kolikšen del zbiralnika napolni posamezna cev v eni minuti. .... 1 točka
- Zapisana enačba, kolikšen del zbiralnika napolnita po dve cevi skupaj v eni minuti. .. 1 točka
- Zapisana enačba, kolikšen del zbiralnika napolnijo vse tri cevi skupaj v eni minuti. ... 1 točka
- Sklep, da je enačbo smiselno množiti z 2. .... 1 točka
- Zamenjava spremenljivk. .... 1 točka
- Rešitev enačbe in odgovor. .... 1 točka

**Točkovnik 2:**

- Sklep, kolikšen del zbiralnika napolnita po dve cevi skupaj v eni minuti. .... 1 točka
- Sklep za še tri enake cevi. .... 2 točki
- Zapisana enačba, kolikšen del zbiralnika napolni vseh šest cevi skupaj v eni minuti. .. 1 točka
- Rešitev enačbe. .... 1 točka
- Korekten sklep za tri cevi in odgovor. .... 1 točka

**B2.**

$$\left(\frac{2x}{3} - 2\right)^2 - \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = -\frac{5(x-4)}{3} \cdot \frac{x+2}{3} + 3\frac{7}{9}$$

$$\frac{4x^2}{9} - \frac{8x}{3} + 4 - \left(x^2 - \frac{4}{9}\right) = -\frac{5}{9}(x^2 - 2x - 8) + 3\frac{7}{9}$$

$$\frac{4x^2}{9} - \frac{8x}{3} + 4 - x^2 + \frac{4}{9} = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{10}{9}x + \frac{40}{9} + \frac{34}{9}$$

$$4x^2 - 24x + 36 - 9x^2 + 4 = -5x^2 + 10x + 40 + 34$$

$$-24x - 10x = 40 - 36 - 4 + 34$$

$$-34x = 34$$

$$x = -1$$

$$\left(\frac{2a-x}{4}\right)^2 - \left(\frac{x+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{3x}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{2a-(-1)}{4}\right)^2 - \left(\frac{-1+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{3(-1)}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{2a+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{4}\right)^2$$

$$\frac{4a^2 + 4a + 1}{16} - \frac{a^2 - 2a + 1}{4} = \frac{9}{16}$$

$$4a^2 + 4a + 1 - 4(a^2 - 2a + 1) = 9$$

Rešitve nalog za 9. razred

$$4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 8a - 4 = 9$$

$$12a = 12$$

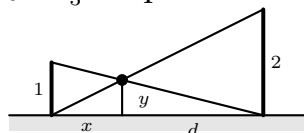
$$a = 1$$

- Upoštevanje kvadrata dvočlenika. .... 1 točka  
 Upoštevanje produkta vsote in razlike. .... 1 točka  
 Izračunan prvi člen na desni strani prve enačbe. .... 1 točka  
 Rešitev prve enačbe. .... 1 točka  
 Odprava oklepajev v drugi enačbi. .... 1 točka  
 Rešitev druge enačbe. .... 1 točka

**B3.**

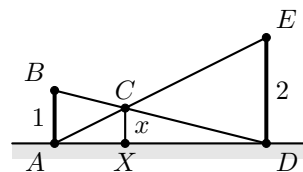
**Rešitev 1:**

Označimo z  $d$  razdaljo med koloma, z  $x$  razdaljo med nižjim kolom in presečiščem vrvic ter z  $y$  višino presečišča vrvic. Zapišimo sorazmerji istoležnih stranic v podobnih trikotnikih:  $1 : y = d : (d - x)$  in  $2 : y = d : x$ . Iz drugega sorazmerja izrazimo  $x = \frac{yd}{2}$  in vstavimo v prvo sorazmerje  $1 : y = d : d(1 - \frac{y}{2})$ , od koder sledi:  $1 : y = 1 : (1 - \frac{y}{2})$ . Rešimo enačbo in dobimo  $y = \frac{2}{3}$ . To pomeni, da se vrvi križata na višini  $\frac{2}{3}$  metra.



**Rešitev 2:**

Narisana trikotnika  $ABC$  in  $EDC$  sta podobna, zato sta njuni istoležni stranici v razmerju  $2 : 1$ . Če z  $x$  označimo iskano višino, z  $X$  pa nožišče, zaradi podobnosti trikotnikov  $ADB$  in  $XDC$



velja:  $1 : x = 3 : 2$ . To pomeni, da se vrvi križata na višini  $\frac{2}{3}$  metra.

- Ugotovitev, da sta po dva pravokotna trikotnika podobna. .... 1 točka  
 Zapisano prvo sorazmerje. .... 1 točka  
 Zapisano drugo sorazmerje. .... 1 točka  
 Izražen  $x$  iz drugega sorazmerja. .... 1 točka  
 Vstavljanje v prvo sorazmerje. .... 1 točka  
 Izračunana višina. .... 1 točka

**Točkovnik 2:**

- Ugotovitev, da sta trikotnika  $ABC$  in  $EDC$  podobna. .... 1 točka  
 Izračunano razmerje njunih višin. .... 1 točka  
 Ugotovitev, da sta trikotnika  $ADB$  in  $XDC$  podobna. .... 1 točka  
 Zapisano sorazmerje. .... 2 točki  
 Izračunana višina. .... 1 točka

**Opomba:** Za višino, izmerjeno s slike, tekmovalec ne dobi točk.