**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Prilepi nalepko s šifro

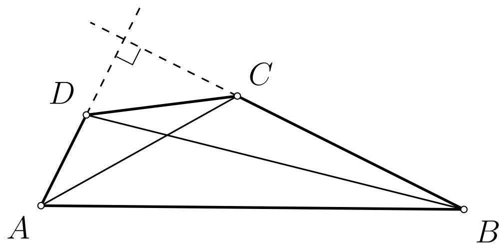
Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Nosilki stranic AD in BC konveksnega štirikotnika $ABCD$ se sekata pod pravim kotom (glej sliko). Velja še $|CD| = 1$, $|AC| = 2$ in $|BD| = 3$. Koliko je $|AB|$?



(**A**) $2\sqrt{3}$ (**B**) $3\sqrt{2}$ (**C**) 4 (**D**) $4\sqrt{3}$ (**E**) 6

A2. Letalska družba potniku za prtljago ne zaračuna dodatnih stroškov, če masa prtljage ne preseže določene dovoljene mase. Vsak dodaten kilogram prtljage pa mora potnik doplačati. Gospod in gospa Kotnik imata skupno prtljago, zato se jima ne bi zaračunalo dodatnih stroškov, če masa skupne prtljage ne bi presegla dvakratnika določene dovoljene mase. Njuna skupna prtljaga tehta 60 kg, doplačati pa sta morala 11 evrov. Prtljaga gospoda Novaka, ki potuje sam, prav tako tehta 60 kg. Toda on je moral za prtljago doplačati 33 evrov. Največ koliko kilogramov prtljage lahko ima en potnik, da mu zanjo ni treba nič doplačati?

(**A**) 11 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 39

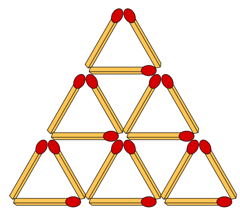
A3. Kenguruju Pitagori so všeč le tista naravna števila, ki so deljiva s 4 in imajo vsoto števk enako 3 ter imajo v zapisu natanko 5 števk enakih 0. Koliko naravnih števil je všeč kenguruju Pitagori?

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 19 (**D**) 20 (**E**) 25

B1. Poišči vsa praštevila p, q, r in s, ki zadoščajo enačbama $p+q=r$ in $q+r=s^2$.

B2. Kot med nosilkama diagonal štirikotnika $ABCD$ je velik 60°. Vsako oglišče štirikotnika prezrcalimo čez nosilko diagonale, ki poteka skozi njemu sosednji oglišči. Dokaži, da zrcalne slike oglišč ležijo na isti premici.

B3. Iz 18 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega trikotnika?



61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

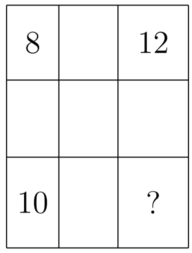
Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Polona je razdelila pavokotnik na 9 manjših pravokotnikov in na tri izmed štirih vogalnih pravokotnikov zapisala njihove ploščine (glej sliko). Koliko je ploščina četrtega vogalnega pravokotnika?

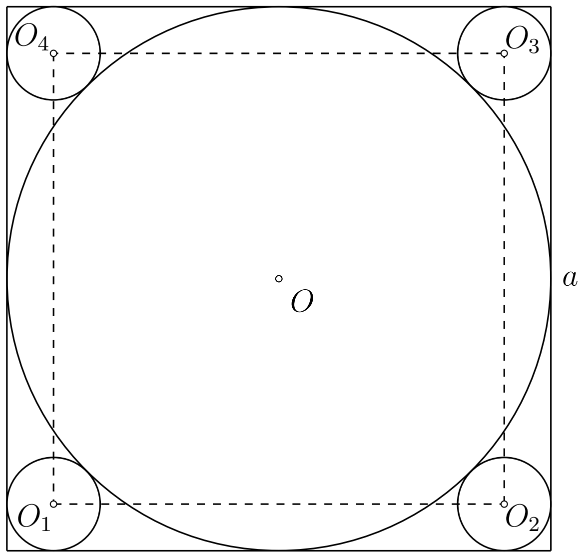


(**A**) 9 (**B**) 13.5 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

A2. Dano je naravno število $x > 1$. Kako se potenca $x^{(x^{x+1})}$ izrazi s spremenljivko y, če je $x^x = y$?

(**A**) y^2 (**B**) y^y (**C**) y^{2y} (**D**) $y^{(y^2)}$ (**E**) $y^{(y^y)}$

A3. V kvadrat s stranico dolžine a je včrtana krožnica s središčem v O. Štiri manjše krožnice s središči O_1, O_2, O_3 in O_4 se dotikajo večje krožnice in po dveh stranic kvadrata (glej sliko). Koliko je ploščina kvadrata $O_1O_2O_3O_4$?



(**A**) $3a^2(3-2\sqrt{2})$ (**B**) $4a^2(3-2\sqrt{2})$

(**C**) $a^2(3-\sqrt{2})$ (**D**) $a^2(2-\sqrt{2})$

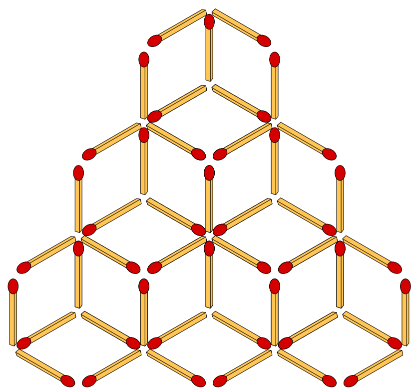
(**E**) $3a^2(2-\sqrt{2})$

B1. Naj bo n naravno število. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$2^n(-x)^n + (-1)^{3n+1}2^{n+1}x^{n-1}(2x+1) - (-2x)^{n+1} = 0.$$

B2. Naj bo M točka na stranici BC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri A. Razpolovišče daljice AM označimo s P. Naj bosta P_B in P_C zrcalni sliki točke P preko stranic AC in AB, B' in C' pa zrcalni sliki točk B in C preko točke P. Denimo, da so točke B', C', P_B in P_C kolinearne. Dokaži, da je tedaj M razpolovišče stranice BC.

B3. Iz 45 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega pravilnega šestkotnika?



61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

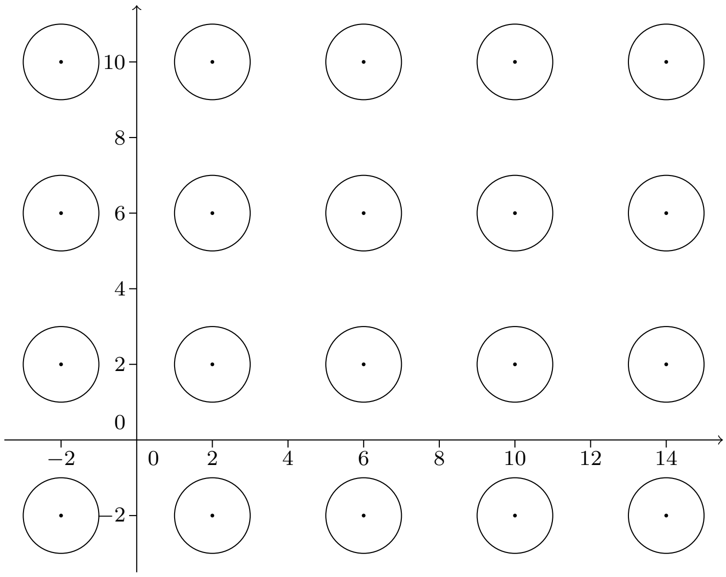
Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. V koordinatnem sistemu je narisana neskončna mreža krožnic s polmeri 1. Ena izmed krožnic ima središče v točki $(2, 2)$, razdalje med središči sosednjih krožnic pa so enake 4 (glej sliko). Za vsako točko (x, y), ki leži na neki izmed krožnic, izračunamo vsoto $x + y$. Katere izmed navedenih vrednosti ne dobimo pri izračunu teh vsot?

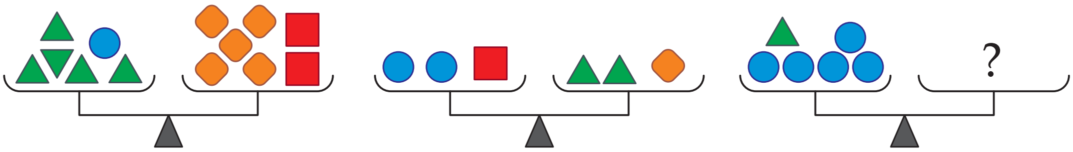


(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

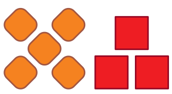
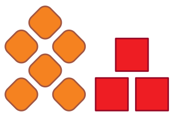
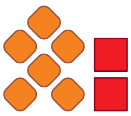
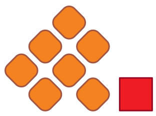
A2. Dolžine stranic pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri A so naravna števila. Dolžina stranice AB je 101. Koliko je obseg trikotnika ABC?

(A) 306 **(B)** 10201 **(C)** 10202 **(D)** 10302 **(E)** 10303

A3. Prvi dve tehtnici na sliki sta uravnoteženi.



Kaj moramo postaviti na desno stran tretje tehtnice na sliki, da bo tudi ta uravnotežena?

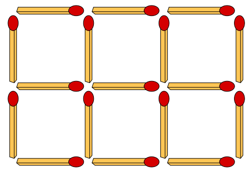
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\log_2(\log_2(7x-6))+1=\log_2(\log_2(3x-2))+\log_2 3.$$

B2. Diagonali tetivnega štirikotnika $ABCD$ se sekata pod kotom, ki ni velik 60°. Vsako oglišče štirikotnika prezrcalimo čez nosilko diagonale, ki poteka skozi njemu sosednji oglišči. Dokaži, da tudi zrcalne slike oglišč tvorijo tetivni štirikotnik.

B3. Iz 17 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega kvadrata?



61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Koliko je takih 6-mestnih števil, ki se ne začnejo z 0 in vsebujejo število 2017 kot strnjen podniz? Npr. število 820178 vsebuje strnjen podniz 2017, število 820817 pa ne.

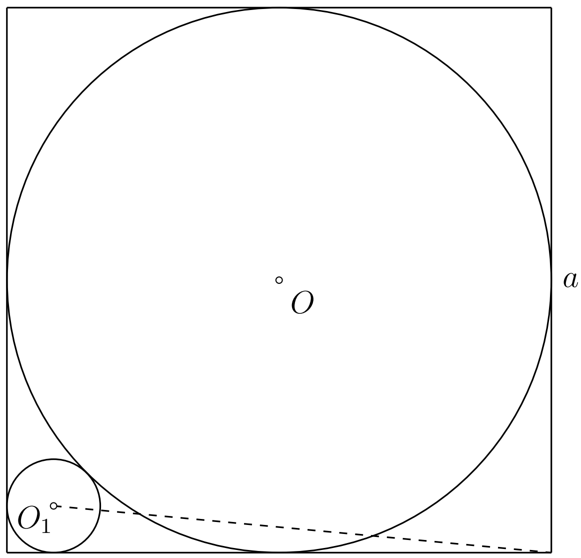
(**A**) 100 (**B**) 190 (**C**) 200 (**D**) 280 (**E**) 300

A2. Prvo število zaporedja šestih števil je enako 4, zadnje pa 47. Vsako število od vključno tretjega naprej je enako vsoti prejšnjih dveh števil. Naj bo S vsota vseh šestih števil zaporedja. Tedaj S leži na intervalu med

(**A**) 51 in 90 (**B**) 91 in 100 (**C**) 101 in 110 (**D**) 111 in 120 (**E**) 121 in 160

A3. V kvadrat s stranico dolžine a je včrtana krožnica s središčem v O. Manjša krožnica s središčem v O_1 se dotika večje krožnice in dveh stranic kvadrata (glej sliko). Koliko je razdalja med O_1 in ogliščem kvadrata, ki ne leži na premici OO_1?

(**A**) $\frac{3a}{4}\sqrt{13-8\sqrt{2}}$ (**B**) $\frac{a\sqrt{2}}{3}\sqrt{13-8\sqrt{2}}$
(**C**) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{13-8\sqrt{2}}$ (**D**) $\frac{a}{2}\sqrt{9-4\sqrt{2}}$
(**E**) $\frac{a\sqrt{2}}{3}\sqrt{9-4\sqrt{2}}$



B1. Določi vse vrednosti, ki jih zavzame izraz $A = n \cdot \left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor$, ko n preteče vsa naravna števila. Pri tem $\lfloor x \rfloor$ označuje največje celo število, ki ni večje od x.

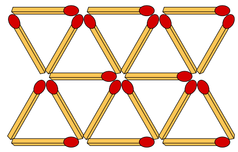
B2. Za točko P znotraj trikotnika ABC pravimo, da je *izjemna*, če velja naslednji pogoj:

Če so A', B' in C' zaporedoma presečišča premic AP, BP in CP s stranicami BC, AC in AB, lahko daljice AA', BB' in CC' vzporedno premaknemo tako, da oblikujemo trikotnik, katerega dolžine stranic so $|AA'|$, $|BB'|$ in $|CC'|$.

(a) Dokaži, da je težišče trikotnika izjemna točka.

(b) Dokaži trditev "Edina izjemna točka znotraj trikotnika je težišče trikotnika."

B3. Iz 20 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega trikotnika?



61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
A	D	D

I/A1. Označimo presečišče nosilk stranic AD in BC z E. Tedaj po Pitagorovem izreku velja

$$|ED|^2 + |EC|^2 = |CD|^2 = 1,$$
$$|EA|^2 + |EC|^2 = |AC|^2 = 4,$$
$$|ED|^2 + |EB|^2 = |BD|^2 = 9.$$

Če seštejemo drugo in tretjo enačbo in od njiju odštejemo prvo, dobimo $|EA|^2+|EB|^2 = 12$. Po Pitagorovem izreku sledi $|AB|^2 = |EA|^2 + |EB|^2 = 12$, torej je $|AB| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Pravilen odgovor je (A).

I/A2. Označimo največjo dovoljeno težo za enega potnika z d. Gospod in gospa Kotnik imata skupaj $60 - 2d$ dodatnih kilogramov prtljage, za katere sta plačala 11 evrov. Torej sta za vsak dodaten kilogram plačala $\frac{11}{60-2d}$ evrov. Gospod Novak ima $60 - d$ dodatnih kilogramov prtljage, za katere je plačal 33 evrov. Za vsak kilogram je torej plačal $\frac{33}{60-d}$ evrov. Ker morata biti tarifi enaki, je $\frac{11}{60-2d} = \frac{33}{60-d}$. Enačbo delimo z 11 in odpravimo ulomke, da dobimo $60 - d = 3(60 - 2d)$. Od tod izračunamo $d = 24$. Pravilen odgovor je torej (D).

I/A3. Števke, ki so enake 0 k vsoti števk ne prispevajo ničesar. Iz neničelnih števk pa lahko dobimo vsoto 3 le na tri načine, $3 = 3$, $1 + 2 = 3$ ali $1 + 1 + 1 = 3$. Ker je natanko 5 števk števila, ki je všeč kenguruju Pitagori, enakih 0, imamo torej tri možnosti.

Naravno število, ki ima števke $3, 0, 0, 0, 0, 0$ in je deljivo s 4, je samo 300000. Ničle namreč ne smejo nastopati na začetku števila.

Naravna števila s števkami $1, 2, 0, 0, 0, 0, 0$ so po vrsti 1000002, 1000020, 1000200, 1002000, 1020000, 1200000, 2000001, 2000010, 2000100, 2001000, 2010000, 2100000. Od teh števila 1000002, 2000001 in 2000010 niso deljiva s 4, ostala pa so.

Naravna števila s števkami $1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0$, ki so deljiva s 4, morajo imeti na zadnjih dveh mestih števko 0. Taka števila (razvrščena po številu števk 0 na desni strani) so 10001100, 10010100, 10100100, 11000100, 10011000, 10101000, 11001000, 10110000, 11010000, 11100000.

Skupaj je kenguruju Pitagori všeč natanko 20 naravnih števil.

I/B1. Iz prve enačbe vidimo, da je $r \geq 4$, torej mora biti r liho praštevilo. Če je tudi q liho praštevilo, potem iz druge enačbe sledi, da je s sodo praštevilo, torej $s = 2$. Tedaj je $s^2 = 4$, hkrati pa je $q + r \geq 6$, saj sta q in r lihi praštevili. Prišli smo do protislovja, saj enačba $q + r = s^2$ ni izpolnjena.

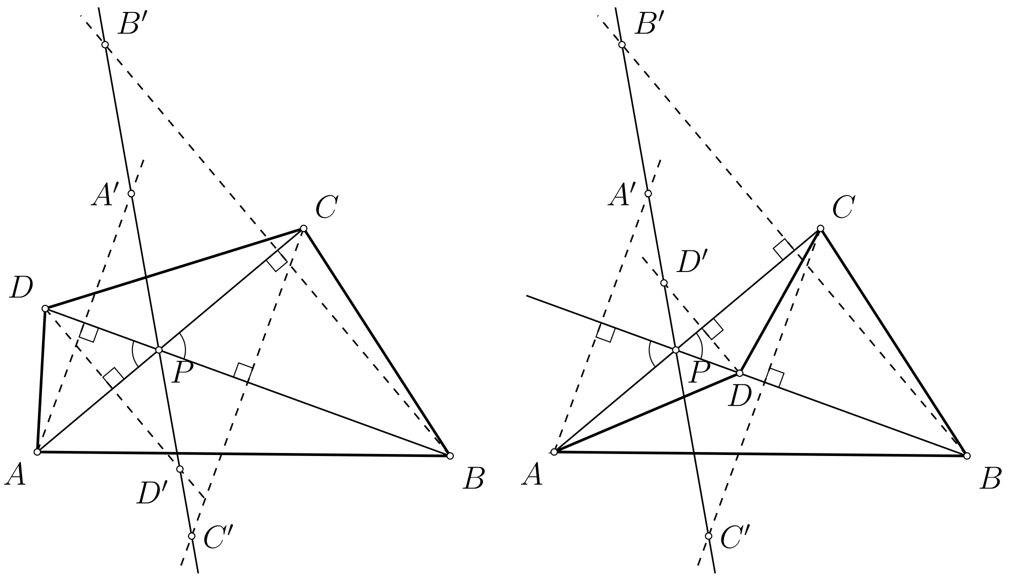
Od tod sklepamo, da je q sodo praštevilo, torej $q = 2$. Iz prve enačbe izrazimo $r = p + 2$ in to vstavimo v drugo enačbo, da dobimo $p + 4 = s^2$. To enačbo preoblikujemo v $p =$

$(s-2)(s+2)$. Ker je p praštevilo, od tod sledi $s-2=1$ in $s+2=p$, saj je $s-2<s+2$. Torej je $s=3$ in $p=5$. Iz $r=p+2$ dobimo še $r=7$.

Dobili smo eno samo rešitev $p=5$, $q=2$, $r=7$ in $s=3$.

Ugotovitev, da je r liho praštevilo .... 1 točka
Izločitev možnosti $s=2$ in ugotovitev $q=2$ .... 1 točka
Zapis in razcep enačbe $p+4=s^2$ .... 2 točki
Obravnava posameznih faktorjev in izračun $s=3$ .... 2 točki
Zapis rešitve .... 1 točka
(Če tekmovalec ugane rešitev, se mu prizna 1 točka.)

I/B2.



Zrcalne slike oglišč A, B, C in D pri zrcaljenju čez nosilke ustreznih diagonal označimo po vrsti z A', B', C' in D'. Označimo presečišče nosilk diagonal s P.

Denimo najprej, da P leži v notranjosti štirikotnika. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $\sphericalangle BPC = 60°$. Zaradi zrcaljenja potem velja $\sphericalangle A'PD = \sphericalangle DPA = 60°$, $\sphericalangle APD' = \sphericalangle DPA = 60°$, $\sphericalangle C'PB = \sphericalangle BPC = 60°$ in $\sphericalangle CPB' = \sphericalangle BPC = 60°$. Sledi

$$\sphericalangle A'PD' = \sphericalangle A'PD + \sphericalangle DPA + \sphericalangle APD' = 180°$$

in

$$\sphericalangle C'PB' = \sphericalangle C'PB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPB' = 180°.$$

Prva enakost pove, da točke A', D' in P ležijo na isti premici, druga pa, da točke B', C' in P ležijo na isti premici. Zaradi zrcaljenja velja tudi $\sphericalangle A'PA = \sphericalangle C'PC = 120°$. Ker točke A, C in P ležijo na isti premici in točki A' in C' ležita na različnih bregovih premice AC, od tod sledi, da tudi točke A', C' in P ležijo na isti premici. Od tod sledi, da vseh pet točk A', B', C', D' in P leži na isti premici.

Denimo sedaj, da P leži zunaj štirikotnika. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da D leži med B in P in da je $\sphericalangle BPC = 60°$. Na enak način kot v prvem primeru pokažemo, da točke B', C' in P ležijo na isti premici. Zaradi zrcaljenja je $\sphericalangle CPD' = \sphericalangle DPC = 60°$ in $\sphericalangle A'PA = 2\cdot 60° = 120°$. Torej je $\sphericalangle CPA' = 180° - \sphericalangle A'PA = 60°$ in zato velja $\sphericalangle CPA' = \sphericalangle CPD'$. Ker točki A' in D' ležita na istem bregu premice AC, sledi, da so tudi točke A', D' in P kolinearne. Kot v prvem primeru sledi, da je vseh pet točk A', B', C', D' in P leži na isti premici.

2. način. Naj bo P presečišče premic AC in BD. S p označimo premico skozi P, ki razpolavlja tisti kot med AC in BD, ki meri $120°$. Premica p zato seka obe nosilki diagonal pod kotom $60°$. Dokazati želimo, da točke A', B', C' in D' ležijo na p.

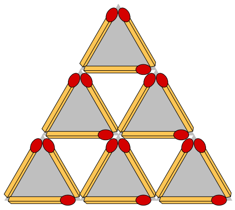
Ker se AC in BD sekata v točki P pod kotom $60°$, mora tudi zrcalna slika premice AC preko premice BD sekati BD v točki P pod kotom $60°$. To je ravno premica p. Po drugi strani pa vemo, da točki A' in C' ležita na zrcalni sliki premice AC. Zato A' in C' ležita na p. Podobno mora zrcalna slika premice BD preko premice AC sekati AC v točki P pod kotom $60°$. To je ravno premica p. Ker točki B' in D' ležita na zrcalni sliki BD, ležita na premici p.

Dokazali smo, da točke A', B', C' in D' ležijo na premici p.

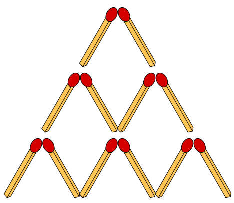
1.način
$\triangle APA'$ **ali** $(\triangle BPB', \triangle CPC', \triangle DPD')$ **je enakokrak** **.............1 točka Ugotovitev**
$\sphericalangle A'PD = \sphericalangle DPA = 60°, \sphericalangle APD' = \sphericalangle DPA = 60°, \sphericalangle C'PB = \sphericalangle BPC = 60°, \sphericalangle CPB' = \sphericalangle BPC = 60°$ **...2 točki**
Izračun $\sphericalangle A'PD' = 180°$ **in** $\sphericalangle C'PB' = 180°$ **................................2 točki**
Zaključek A', B', C', D', P **ležijo na isti premici** **..............................2 točka**
Če tekmovalec ne obravnava primera, ko P **leži izven štirikotnika dobi največ 5 točk.**

2.način
Izračun vseh štirih kotov okrog P **.....................................1 točka**
Premica p**, ki razpolavlja večji kot med diagonalama** **........................2 točki**
Premica skozi A, C **se preko nosilke diagonale** BD **preslika na** p **............. 2 točki**
Premica skozi B, D **se preko nosilke diagonale** AC **preslika na** p **............1 točka**
Zaključek A', B', C', D', P **ležijo na isti premici** **..............................1 točka**

I/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 9 majhnih trikotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico, 3 srednje trikotnike s stranicami dolgimi 2 vžigalici ter 1 velik trikotnik s stranicami dolgimi 3 vžigalice. Osenčimo nekatere trikotnike, kot to prikazuje slika.



Ker moramo iz vsakega osenčenega trikotnika odstraniti vsaj eno vžigalico in nobena dva osenčena trikotnika nimata skupne stranice, moramo skupaj odstraniti vsaj 6 vžigalic. Da to tudi zadostuje, prikazuje naslednja slika.



1. možnost (popolna rešitev):
Ugotovitev, da je do mreže brez trikotnikov mogoče priti z odstranitvijo šestih vžigalic

in skica primera . . . . 2 točki
Utemeljitev, da potrebujemo vseh šest vžigalic z označenimi šestimi neodvisnimi trikotniki . . . . 5 točke

2. možnost (nepopolna rešitev; možnih največ 5 točk):
Ugotovitev, da je do mreže brez trikotnikov mogoče priti z odstranitvijo šestih vžigalic in skica primera . . . . 2 točki
Ugotovitev, da so v mreži poleg devetih majhnih trikotnikov tudi štirje večji . 1 točka
Utemeljitev, ki sledi lokalno optimalnemu odstranjevanju vžigalic (npr. med dvema majhnima trikotnikoma ali skupna vžigalica majhnega in večjih trikotnikov) . . 1 točka
Utemeljitev za del spodnje meje šestih vžigalic z obravnavo likov, ki nimajo skupnih stranic . . . . 1 točka

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
D	B	B

II/A1. Označimo višini prve in tretje vrstice pravokotnikov z x in y, širini prvega in tretjega stolpca pravokotnikov pa z z in w. Tedaj so ploščine treh vogalnih pravokotnikov s številkami enake $xz = 8$, $xw = 12$, $yz = 10$, ploščina četrtega vogalnega pravokotnika pa je $yw = \frac{yz \cdot xw}{xz} = \frac{10 \cdot 12}{8} = 15$.

II/A2. Z upoštevanjem pravil za računanje s potencami in zveze $x^x = y$, dan izraz preoblikujemo

$$x^{(x^{x+1})} = x^{(x^x \cdot x)} = x^{yx} = x^{xy} = (x^x)^y = y^y.$$

Pravilen odgovor je (B).

II/A3. Označimo oglišča osnovnega kvadrata z A_1, A_2, A_3 in A_4, tako da je za vsak i oglišče A_i najbližje točki O_i. Polmer večje krožnice je $R = \frac{a}{2}$, polmer manjših krožnic pa označimo z r. Tedaj je $|A_1O_1| = r\sqrt{2}$, saj je to diagonala majhnega kvadratka s stranico dolžine r, podobno je $|A_3O_3| = r\sqrt{2}$. Diagonala osnovnega kvadrata je zato dolga

$$\begin{aligned}|A_1A_3| &= |A_1O_1| + |O_1O| + |OO_3| + |O_3A_3| = r\sqrt{2} + (r+R) + (R+r) + r\sqrt{2} = \\ &= 2R + 2r + 2r\sqrt{2} = a + 2r(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Ker pa je to diagonala osnovnega kvadrata, mora biti dolga $a\sqrt{2}$. Sledi

$$a + 2r(1+\sqrt{2}) = a\sqrt{2},$$

od koder izrazimo $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}+1)}$. Ulomek racionaliziramo, da dobimo

$$r = \frac{a(\sqrt{2}-1)^2}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a.$$

Ploščina kvadrata $O_1O_2O_3O_4$ je enaka

$$pl = (a-2r)^2 = (2\sqrt{2}a - 2a)^2 = 4a^2(\sqrt{2}-1)^2 = 4a^2(3-2\sqrt{2}).$$

II/B1. Opazimo, da je $(-1)^{3n+1} = (-1)^{2n}(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$, zato lahko enačbo preoblikujemo do

$$2^n(-1)^n x^n + (-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n-1}(2x+1) - (-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n+1} = 0.$$

Na levi strani enačbe izpostavimo skupni faktor, da dobimo

$$(-1)^n 2^n x^{n-1}(x - 2(2x+1) + 2x^2) = 0.$$

Ker je $x-2(2x+1)+2x^2 = x(2x+1)-2(2x+1) = (x-2)(2x+1)$, sledi

$$(-1)^n 2^n x^{n-1}(x-2)(2x+1) = 0.$$

Če je $n=1$, sta rešitvi enačbe $x=2$ in $x=-\frac{1}{2}$, če pa je $n \geq 2$, so rešitve enačbe $x=0$, $x=2$ in $x=-\frac{1}{2}$.

Zapis ali uporaba $(-1)^{3n+1} = (-1)^{n+1}$ **.................................... 1 točka**

Preob. enačbe v $2^n(-1)^n x^n + (-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n-1}(2x+1) - (-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n+1} = 0$. **.1 točka**

Izpostavljen skupni faktor .... 1 točka

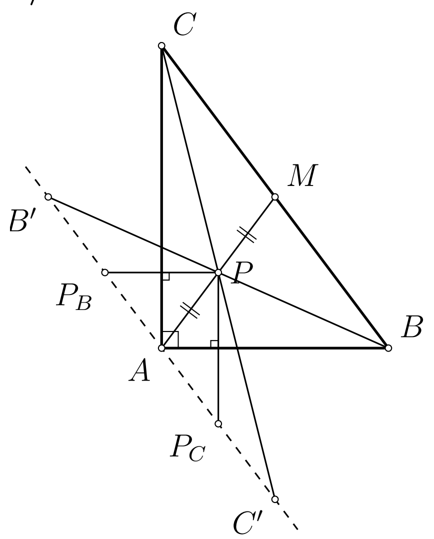
Faktorizacija drugega faktorja ($x-2(2x+1)+2x^2 = (x-2)(2x+1)$**) .... 1 točka**

Zapis rešitev za $n=1$ **.. 1 točka**

Zapis vseh rešitev za $n \geq 2$ **.. 2 točki**

(Če tekmovalec vse rešitve samo ugane se mu priznata 2 točki)

II/B2.



Ker sta P_B in P_C zrcalni sliki točke P preko stranic trikotnika, velja $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CAP_B$ in $\sphericalangle BAP = \sphericalangle P_CAB$. Torej je

$$\sphericalangle P_CAP_B = \sphericalangle P_CAB + \sphericalangle BAP + \sphericalangle PAC + \sphericalangle CAP_B = 2(\sphericalangle BAP + \sphericalangle PAC) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

kar pomeni, da so točke P_B, A in P_C kolinearne. Sledi, da vseh 5 točk B', C', P_B, P_C in A leži na isti premici. Ker se daljici BB' in CC' razpolavljata v točki P, je $BCB'C'$ paralelogram, torej sta premici BC in $B'C'$ vzporedni. Zato velja $\sphericalangle MBA = \sphericalangle C'AB = \sphericalangle P_CAB = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BAM$, kar pomeni, da je trikotnik ABM enakokrak z vrhom pri pri M in velja $|BM| = |AM|$. Podobno je tudi $\sphericalangle ACM = \sphericalangle CAB' = \sphericalangle MAC$, torej je tudi trikotnik CAM enakokrak in velja $|AM| = |CM|$. Sledi $|BM| = |CM|$, od koder sklepamo, da je M razpolovišče stranice BC.

Točke B', P_B, A, P_C, C' **so kolinearne .... 2 točki**

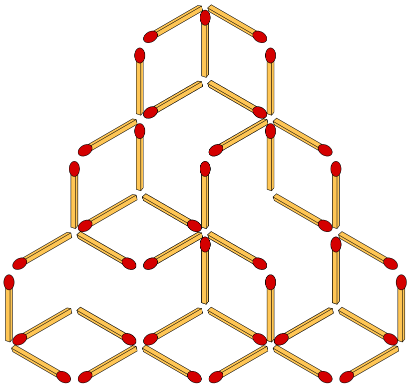
Premici BC **in** $B'C'$ **sta vzporedni .... 1 točka**

Enakost kotov $\sphericalangle MBA = \sphericalangle C'AB$ **... 1 točka**

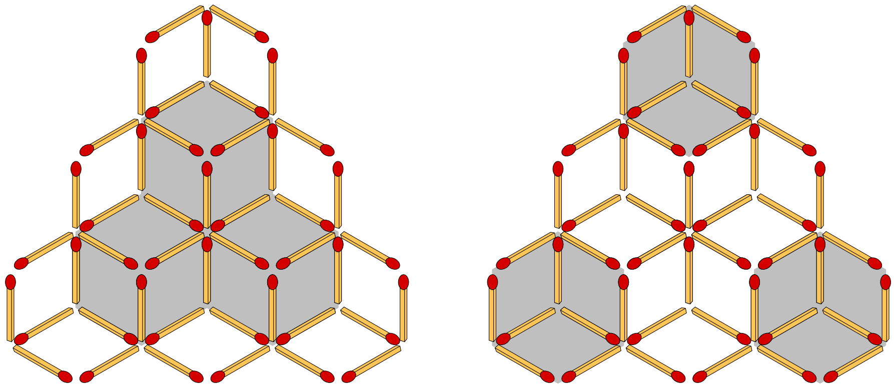
Enakost kotov $\sphericalangle C'AB = \sphericalangle BAM$ **... 1 točka**

Enakokrakost trikotnika AMB **(in analogno trikotnika** AMC**) .... 2 točki**

II/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 9 majhnih pravilnih šestkotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 1 večji pravilni šestkotnik stranicami dolgimi 2 vžigalici. Ker je vsaka vžigalica stranica kvečjemu 2 manjših pravilnih šestkotnikov, moramo odstraniti vsaj 5 vžigalic. Da to tudi zadostuje, prikazuje naslednja slika. Paziti moramo le, da izničimo tudi večji pravilni šestkotnik.



2. način. Vžigalice na sliki tvorijo 9 majhnih pravilnih šestkotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 1 večji pravilni šestkotnik s stranicami dolgimi 2 vžigalici. Osenčimo nekatere majhne pravilne šestkotnike, kot to prikazujeta sliki.



Da izničimo 3 osenčene pravilne šestkotnike na levi sliki moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici z njihovih stranic, da izničimo 3 osenčene pravilne šestkotnike na desni sliki pa moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice z njihovih stranic. Ker osenčeni pravilni šestkotniki na levi sliki nimajo nobene skupne stranice z osenčenimi pravilnimi šestkotniki na desni sliki, moramo torej skupaj odstraniti vsaj $2 + 3 = 5$ vžigalic. Da to tudi zadostuje, prikazuje slika iz 1. rešitve.

1.način:
Določitev števila vseh pravilnih 6-kotnikov (9 manjših, 1 večji) . . . . 1 točka
Ugotovitev, da je vsaka vžigalica stranica kvečjemu dveh manjših 6-kotnikov . 2 točki
Sklep, da moramo odstraniti vsaj 5 vžigalic . . . . 2 točki
Primer, da odstranitev 5 vžigalic zadostuje . . . . 2 točki
(Če sklepi niso jasni/popolni, se upošteva npr. le 1 od 2 točk ipd.)

2. način:
Določitev števila vseh pravilnih 6-kotnikov (9 manjših, 1 večji) . . . . 1 točka
Razdelitev 6-kotnikov v dve po stranicah neodvisni skupini . . . . 1 točka
Sklep, da moramo v eni skupini odstraniti vsaj 2 vžigalici . . . . 1 točka
Sklep, da moramo v drugi skupini odstraniti vsaj 3 vžigalice . . . . 1 točka
Ugotovitev, da sta skupini po stranicah neodvisni, in pravilna uporaba tega sklepa . 1

točka
Primer, da odstranitev 5 vžigalic zadostuje . . . . 2 točki

3. način:
Določitev števila vseh pravilnih 6-kotnikov (9 manjših, 1 večji) . . . . 1 točka
Utemeljen sklep, da moramo odstraniti vsaj 5 vžigalic . . . . 4 točke
Primer, da odstranitev 5 vžigalic zadostuje . . . . 2 točki

Opomba:
Za rešitev, ki ne upošteva večjega 6-kotnika lahko tekmovalec dobi največ 5 točke (1 za primer in 4 za sklep, zakaj je to dovolj).

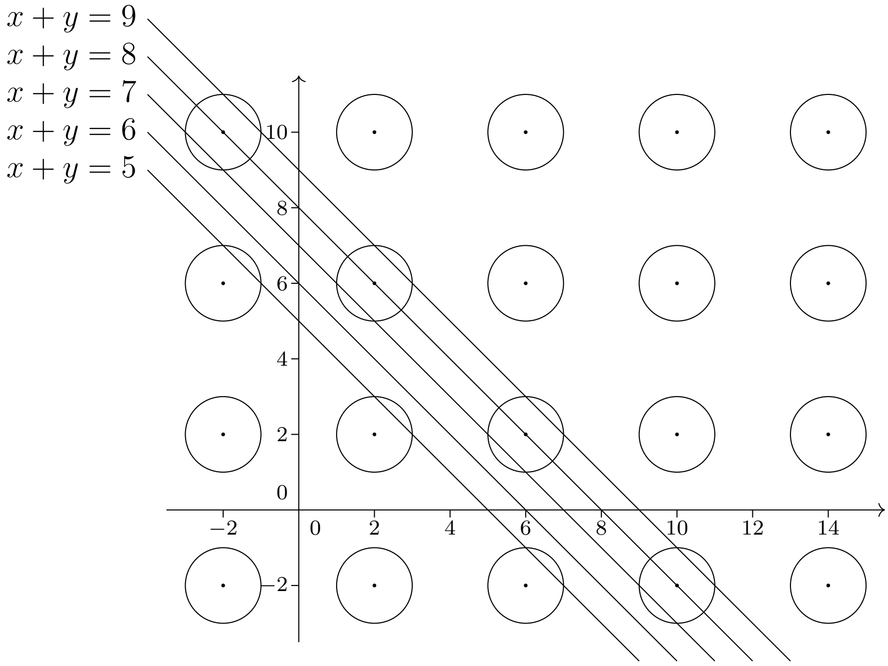
61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
B	D	E

III/A1. Točke (x, y), ki imajo vsoto koordinat enako $5, 6, 7, 8$ oz. 9 ležijo zaporedoma na premicah $x + y = 5$, $x + y = 6$, $x + y = 7$, $x + y = 8$ oz. $x + y = 9$. Če te premice narišemo na sliko, opazimo, da le premica $x + y = 6$ ne seka nobene krožnice.



Torej vsota koordinat točke na eni od krožnic v nobenem primeru ne more biti enaka 6. Pravilen odgovor je (B).

III/A2. Po Pitagorovem izreku velja $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ oziroma $101^2 + |AC|^2 = |BC|^2$. Enačbo preuredimo v $101^2 = |BC|^2 - |AC|^2 = (|BC| + |AC|)(|BC| - |AC|)$. Faktorja na desni strani enačbe sta različni naravni števili. Ker pa je 101 praštevilo, lahko število 101^2 le na en način razcepimo kot produkt dveh različnih naravnih števil in sicer kot $101^2 = 1 \cdot 101^2 = 1 \cdot 10201$. Ker je $|BC| + |AC| > |BC| - |AC|$, sledi $|BC| + |AC| = 10201$ in $|BC| - |AC| = 1$. Obseg trikotnika je $|AB| + |BC| + |AC| = 101 + 10201 = 10302$.

III/A3. Označimo težo kroga z k, težo trikotnika s t, težo manjšega kvadrata z m in težo večjega kvadrata z v. Ker sta prvi dve tehtnici uravnoteženi, sledi

$$5t + k = 5m + 2v,$$
$$2k + v = 2t + m.$$

Prvi enačbi prištejemo dvakratnik druge, da dobimo $5t + 5k + 2v = 7m + 2v + 4t$ oziroma $t + 5k = 7m$. Leva stran zadnje enačbe predstavlja težo na levi strani zadnje tehtnice, zato moramo na desno stran zadnje tehtnice postaviti 7 manjših kvadratov. Pravilen odgovor je (E).

III/B1. Z upoštevanjem zveze $1 = \log_2 2$ in formule za vsoto logaritmov $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a \cdot b)$ enačbo najprej preoblikujemo v

$$\log_2(2\log_2(7x-6)) = \log_2(3\log_2(3x-2)).$$

Nato uporabimo še zvezo $a\log_2 b = \log_2 b^a$, da dobimo

$$\log_2(\log_2(7x-6)^2) = \log_2(\log_2(3x-2)^3).$$

Dvakrat antilogatirmiramo, da pridemo do enačbe

$$(7x-6)^2 = (3x-2)^3.$$

Odpravimo oklepaje in enačbo preoblikujemo v

$$27x^3 - 103x^2 + 120x - 44 = 0.$$

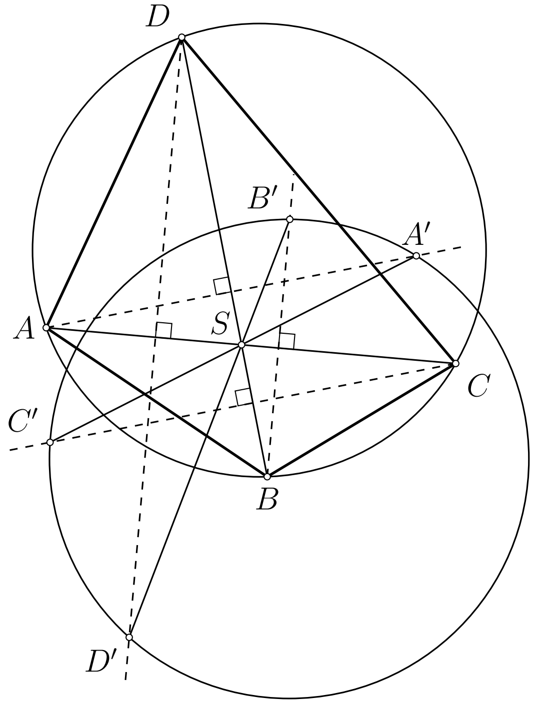
Uganemo, da je ena rešitev te enačbe $x_1 = 1$, in nato s Hornerjevim algoritmom razcepimo levo stran enačbe

$$(x-1)(27x^2 - 76x + 44) = 0.$$

S pomočjo formule za ničle kvadratnega polinoma izračunamo še ostali dve rešitvi $x_2 = 2$ in $x_3 = \frac{22}{27}$. Za vse vrednosti naredimo preizkus. Ugotovimo, da x_3 ni rešitev enačbe, saj je $7x_3 - 6 = -\frac{8}{27} < 0$ in zato izraz $\log_2(7x_3 - 6)$ ni definiran. Prav tako tudi x_1 ni rešitev enačbe, saj je $\log_2(7x_1 - 6) = 0$ in zato izraz $\log_2(\log_2(7x-6))$ ni definiran. V primeru $x_2 = 2$ pa dobimo $\log_2(\log_2 8) + 1 = \log_2(\log_2 4) + \log_2 3$, kar drži. Edina rešitev enačbe je torej $x = 2$.

Zapis ali uporaba $1 = log_2 2$ in pravila za izračun vsote logaritmov. .... 1 točka
Preob. enačbe v $(7x-6)^2 = (3x-2)^3$. .... 1 točka
Preob. enačbe v $27x^3 - 103^2 + 120x - 11 = 0$. .... 1 točka
Ugane ničlo $x = 1$ ali katero drugo. .... 1 točka
Razcep na linearni in kvadratni faktor. .... 1 točka
Preostavi dve ničli $x = 2$ in $x = -\frac{8}{27}$. .... 1 točka
S preizkusom izloči nepravi rešitvi. .... 1 točka
(Opombe: Če tekmovalec rešitev samo ugane, se mu prizna 1 točka, 1 točka se prizna za uporabo Hornerjevega algoritma (pri ničlah), 1 točka pa se odbije, če tekmovalec ne preveri pogojev, ko deli z 0.)

III/B2.



Zrcalne slike oglišč A, B, C in D pri zrcaljenju čez ustrezne diagonale označimo po vrsti z A', B', C' in D'. Naj bo S presečišče diagonal štirikotnika $ABCD$. Pri zrcaljenju čez premico AC se točka S ohranja, daljica BD pa se slika v daljico $B'D'$, zato točka S leži tudi na daljici $B'D'$. Poleg tega velja $|B'S| = |BS|$ in $|D'S| = |DS|$. Na enak način ugotovimo, da točka S leži tudi na daljici $A'C'$ in velja $|A'S| = |AS|$ in $|C'S| = |CS|$.

Ker je štirikotnik $ABCD$ tetiven, velja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ in $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$. Sledi, da sta si trikotnika ABS in DCS podobna, torej je $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$. Po zgoraj dokazanem zato velja tudi $\frac{|A'S|}{|D'S|} = \frac{|B'S|}{|C'S|}$. Zaradi zrcaljenja je

$$\sphericalangle A'SD + \sphericalangle DSA + \sphericalangle ASD' = 3\sphericalangle DSA.$$

Zato je $\sphericalangle A'SD' = 3\sphericalangle DSA$, če je $3\sphericalangle DSA \leq 360°$, oziroma $\sphericalangle A'SD' = 3\sphericalangle DSA - 360°$, če je $3\sphericalangle DSA > 360°$. Po predpostavki je $\sphericalangle DSA$ različen od $60°$ in $120°$, od koder sledi, da je $\sphericalangle A'SD'$ različen od $0°$ in $180°$. To pomeni, da točke A', S in D' ne ležijo na isti premici, ampak tvorijo trikotnik. Ker je $\sphericalangle D'SA' = \sphericalangle B'SC'$, iz enakosti $\frac{|A'S|}{|D'S|} = \frac{|B'S|}{|C'S|}$ sledi, da sta si trikotnika $D'A'S$ in $C'B'S$ podobna. V posebnem velja $\sphericalangle C'B'S = \sphericalangle SA'D'$. Ker je S med A' in C' ter med B' in D', sledi

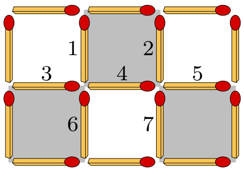
$$\sphericalangle C'B'D' = \sphericalangle C'B'S = \sphericalangle SA'D' = \sphericalangle C'A'D'.$$

Ker B' leži na drugem bregu premice $A'C'$ kot D', to pomeni, da je štirikotnik $A'B'C'D'$ tetiven.

Ugotovitev, da sta točka in prezrcaljena točka enako oddaljeni od presečišča diagonal ($|AS| = |AS'|, \ldots$) .... 1 točka
Ugotovitev, da sta si trikotnika ABS in DCS podobna oz. da sta si trikotnika DAS in CBS podobna .... 1 točka
Ugotovitev, da vse štiri prezrcaljene točke ne ležijo na isti premici .... 1 točka
Ugotovitev, da sta si trikotnika $A'B'S$ in $D'C'S$ podobna oz. da sta si trikotnika $D'A'S$

in $C'B'S$ podobna .... **2 točki**
Dokončanje dokaza tetivnosti $A'B'C'D'$ .... **2 točki**

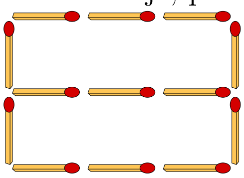
III/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 6 majhnih kvadratov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 2 večja kvadrata s stranicami dolgimi 2 vžigalici. Osenčimo nekatere majhne kvadrate in oštevilčimo nekatere vžigalice, kot to prikazuje slika.



Ker moramo iz vsakega osenčenega kvadrata odstraniti vsaj eno vžigalico, moramo skupaj odstraniti vsaj 3 vžigalice. Denimo, da zadostuje odstraniti 3 vžigalice. Tedaj mora biti vsaka odstranjena vžigalica stranica natanko 1 osenčenega in 1 neosenčenega majhnega kvadrata, hkrati pa moramo vsakemu majhnemu kvadratu odstraniti natanko 1 stranico. Vžigalic na robu mreže torej ne smemo odstraniti.

Če odstranimo vžigalico 1, potem vžigalice 2 ne smemo odstraniti. Zato moramo v zgornjem desnem majhnem kvadratu odstraniti vžigalico 5, v spodnjem desnem majhnem kvadratu pa vžigalice 7 ne smemo odstraniti. To je protislovje, saj tedaj ne odstranimo nobene vžigalice z levega velikega kvadrata. Torej vžigalice 1 ne smemo odstraniti.

Zaradi simetrije lahko podobno pokažemo, da tudi vžigalice 6 ne smemo odstraniti. Toda tedaj ne odstranimo nobene vžigalice z desnega velikega kvadrata, kar je spet protislovje. S tem smo pokazali, da odstraniti 3 vžigalice ne zadostuje. Odstraniti moramo vsaj 4 vžigalice. Da to zadostuje, prikazuje naslednja slika.



Utemeljitev, da moramo odstraniti vsaj tri vžigalice .... **2 točki**
Utemeljitev, da moramo vžigalice z roba mreže pustiti pri miru .... **2 točki**
Utemeljitev, da moramo vžigalico 1 pustiti pri miru .... **1 točka**
Utemeljitev, da moramo odstraniti vsaj štiri vžigalice .... **1 točka**
Utemeljitev, da je dovolj odstraniti štiri vžigalice .... **1 točka**

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
D	D	C

IV/A1. 6-mestno število, ki vsebuje strnjen podniz 2017 je ene od treh oblik: $xy2017$, $x2017y$ ali $2017xy$, kjer sta x in y števki. Hitro opazimo, da nobeno naravno število ne more biti dveh oblik hkrati. Torej moramo le prešteti, koliko števil je posamezne oblike, saj s tem nobenega števila ne bomo šteli dvakrat. Števil oblike $xy2017$ je $9 \cdot 10 = 90$, saj x ne sme biti enak 0. Števil oblike $x2017y$ je $9 \cdot 10 = 90$, števil oblike $2017xy$ pa $10 \cdot 10 = 100$. Vseh števil skupaj je $90 + 90 + 100 = 280$.

IV/A2. Označimo drugo število v zaporedju z a. Tedaj je zaporedje števil enako $4, a, a+4, 2a+4, 3a+8, 5a+12$. Zadnje število je enako $5a + 12 = 47$, od koder izračunamo $a = 7$. Vsota vseh šestih števil je enaka $S = 4 + a + (a+4) + (2a+4) + (3a+8) + (5a+12) = 12a + 32 = 12 \cdot 7 + 32 = 116$. Pravilen odgovor je (D).

IV/A3. Označimo oglišča kvadrata z A, B, C in D, tako da je oglišče A najbližje točki O_1. Polmer večje krožnice je $R = \frac{a}{2}$, polmer manjše krožnice pa označimo z r. Tedaj je $|AO_1| = r\sqrt{2}$, saj je to diagonala majhnega kvadratka s stranico dolžine r. Dolžina $|AO|$ je enaka

$$|AO| = |AO_1| + |O_1O| = r\sqrt{2} + (r + R) = \frac{a}{2} + r(1 + \sqrt{2}).$$

Ker pa je AO polovica diagonale osnovnega kvadrata, mora biti $|AO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Sledi

$$\frac{a}{2} + r(1 + \sqrt{2}) = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

od koder izrazimo $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}+1)}$. Ulomek racionaliziramo, da dobimo

$$r = \frac{a(\sqrt{2} - 1)^2}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a.$$

Razdaljo $|O_1B|$, ki jo iščemo, dobimo po Pitagorovem izreku, če narišemo pravokotnico iz O_1 na stranico AB

$$|O_1B|^2 = r^2 + (a - r)^2 = a^2 - 2ar + 2r^2 = a^2 - (3 - 2\sqrt{2})a^2 + 2 \cdot \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{4}a^2 =$$
$$= a^2 \left(1 - 3 + 2\sqrt{2} + \frac{17 - 12\sqrt{2}}{2}\right) = a^2 \left(\frac{13 - 8\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(13 - 8\sqrt{2}\right).$$

Sledi $|O_1B| = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{13 - 8\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{13 - 8\sqrt{2}}$.

IV/B1. Pokažimo, da izraz A zavzame natanko vrednosti 0 in vsa naravna števila od vključno 1009 do vključno 2017.

Označimo z $m < n$ ostanek števila 2017 pri deljenju z n. Tedaj lahko število 2017 zapišemo v obliki $2017 = kn + m$, kjer je k nenegativno celo število. Tedaj je

$$A = n \cdot \left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor = nk,$$

kar je zagotovo celo število. Če je $k = 0$, je $A = 0$. Če je $k = 1$, je $A = n$, hkrati pa je $n \leq 2017 < 2n$, torej je $1009 \leq n \leq 2017$. V tem primeru torej A zavzame vsa naravna števila med vključno 1009 in 2017. Če pa je $k \geq 2$, je $2n \leq 2017$ oziroma $m < n \leq 1008$ in zato $A = nk = 2017 - m > 1009$ ter $A = 2017 - m \leq 2017$. V tem primeru A ne zavzame nobenih novih števil.

2. način. Ker je n naravno število, je $\left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor$ nenegativno celo število, zato je tudi A nenegativno celo število. Za vsako realno število x velja $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, zato je

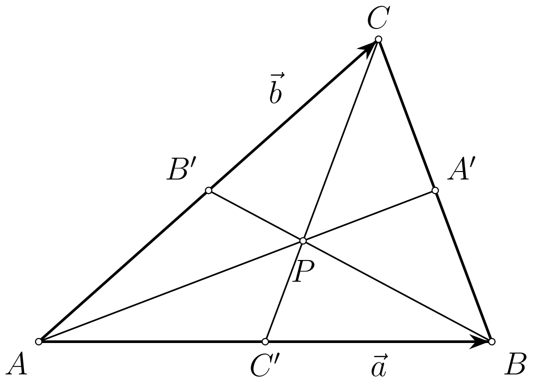
$$2017 - n = n\left(\frac{2017}{n} - 1\right) < A \leq n \cdot \frac{2017}{n} = 2017.$$

Od tod sledi, da za vsak $n \leq 1008$ velja $1009 < A \leq 2017$. Če je $1009 \leq n \leq 2017$, potem je $1 \leq \frac{2017}{n} < 2$, zato je $\left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor = 1$ in $A = n$. S tem A zavzame vsa naravna števila od vključno 1009 do vključno 2017. Če pa je $n \geq 2018$, potem je $0 < \frac{2017}{n} < 1$, zato je $\left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor = 0$ in tudi $A = 0$.

1. način:
Zapis $2017 = kn + m$**, kjer** $k, m \in \mathbb{N}_0$ **in** $0 < m < n$ .... **2 točki***
(*Če pogoj $0 < m < n$ **manjka, se dodeli le 1 točka)**
Utemeljitev, da za $n > 2017$ **dobimo** $A = 0$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da za $1009 \leq n \leq 2017$ **število** A **zavzame vse vrednosti od** 1009 **do** 2017 .... **2 točki**
Ugotovitev $A = 2017 - m$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da za $n \leq 1008$ **velja** $1009 \leq A \leq 2017$ .... **1 točka**

2. način:
Dokaz $A \leq 2017$ .... **1 točka**
Dokaz $2017 - n < A$ .... **2 točki**
Utemeljitev, da za $n > 2017$ **dobimo** $A = 0$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da za $1009 \leq n \leq 2017$ **število** A **zavzame vse vrednosti od** 1009 **do** 2017 .... **2 točki**
Utemeljitev, da za $n \leq 1008$ **velja** $1009 \leq A \leq 2017$ .... **1 točka**

IV/B2.



Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

(a) Če je P težišče, tedaj je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \\
\overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \\
\overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.
\end{aligned}$$

Sledi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$, torej lahko z vzporednimi premiki daljic AA', BB' in CC' sestavimo trikotnik, če postavimo daljice tako, da točki A' in B sovpadeta ter točki B' in C sovpadeta. Težišče trikotnika je torej izjemna točka.

(b) Naj bo P izjemna točka. Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, obstajata realni števili α in β, da velja $\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Ker P leži v notranjosti trikotnika, je $\alpha, \beta > 0$. Izrazimo vektorje $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ in $\overrightarrow{CC'}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$\overrightarrow{AA'} = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \vec{a} + \ell(\vec{b} - \vec{a})$ za neki konstanti k in ℓ, od koder sledi $k\alpha = 1 - \ell$ in $k\beta = \ell$. Iz teh dveh enačb sledi $k = \frac{1}{\alpha+\beta}$, torej je $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$.

$\overrightarrow{BB'} = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{a}) = \ell\vec{b} - \vec{a}$ za neki konstanti k in ℓ, od koder sledi $k(\alpha - 1) = -1$ in $k\beta = \ell$. Torej je $k = \frac{1}{1-\alpha}$ in $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{1-\alpha}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{a})$.

$\overrightarrow{CC'} = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{b}) = \ell\vec{a} - \vec{b}$ za neki konstanti k in ℓ, od koder sledi $k\alpha = \ell$ in $k(\beta - 1) = -1$. Torej je $k = \frac{1}{1-\beta}$ in $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{1-\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{b})$.

Ker lahko z vzporednimi premiki iz daljic AA', BB' in CC' sestavimo trikotnik, mora veljati $\overrightarrow{AA'} \pm \overrightarrow{BB'} \pm \overrightarrow{CC'} = 0$ za neko izbiro predznakov.

Denimo najprej, da je $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$, torej

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) + \frac{1}{1-\alpha}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{1-\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{b}) = 0.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, od tod sledi

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - 1 + \frac{\alpha}{1-\beta} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{1-\alpha} - 1 = 0.$$

V obeh enačbah odpravimo ulomke in ju poenostavimo, da dobimo

$$\alpha\beta - \beta + \beta^2 + \alpha^2 = 0 \qquad \text{in} \qquad \alpha\beta - \alpha + \beta^2 + \alpha^2 = 0.$$

Od tod sledi $\alpha = \beta$. Če to vstavimo v eno izmed enačb, dobimo $3\beta^2 - \beta = 0$. Ker je $\beta > 0$, mora biti $\beta = \frac{1}{3}$ in $\alpha = \frac{1}{3}$.

Denimo sedaj, da je $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'} = 0$. Tedaj podobno kot zgoraj dobimo enačbi

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - 1 - \frac{\alpha}{1-\beta} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{1-\alpha} + 1 = 0,$$

ki ju preoblikujemo do

$$\beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta = 0 \qquad \text{in} \qquad \beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha + 2\beta = 0.$$

Od tod sledi $\alpha = -2\beta$, kar pa je protislovje, saj sta α in β pozitivni števili.

Če je $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$, na podoben način dobimo protislovje $\beta = -2\alpha$.

Če pa je $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'} = 0$, dobimo enačbi

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + 1 - \frac{\alpha}{1-\beta} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{1-\alpha} + 1 = 0,$$

ki ju preoblikujemo do

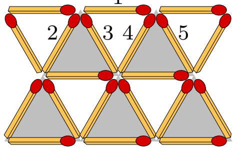
$$2\alpha + \beta - \beta^2 - \alpha^2 - 3\alpha\beta = 0 \qquad \text{in} \qquad \alpha + 2\beta - \beta^2 - \alpha^2 - 3\alpha\beta = 0.$$

Od tod sledi $\alpha = \beta$. Ko to vstavimo v prvi enačbo, dobimo $3\beta - 5\beta^2 = 0$. Ker je $\beta > 0$, mora biti $\beta = \frac{3}{5}$ in $\alpha = \frac{3}{5}$. Toda v tem primeru P leži zunaj trkotnika, saj je $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}(\vec{a} + \vec{b})$, medtem ko za razpolovišče M stranice BC velja $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

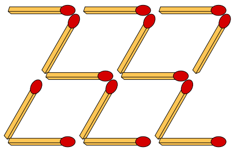
S tem smo pokazali, da znotraj trikotnika leži največ ena izjemna točka, iz točke (a) pa vemo, da je to težišče trikotnika.

Dokaz, da je težišče posebna točka .... **2 točki**
Zapis AA', BB', CC' **z dvema linearno neodvisnima vektorjema** .... **2 točki**
Ugotovitev, da obstaja več primerov: $A\vec{A}' \pm B\vec{B}' \pm C\vec{C}' = \vec{0}$ .... **1 točka**
Obravnavanje zgornjih primerov .... **1 točka**
Zaključni sklep .... **1 točka**

IV/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 10 majhnih trikotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 4 večje trikotnike s stranicami dolgimi 2 vžigalici. Osenčimo nekatere majhne trikotnike in oštevilčimo nekatere vžigalice, kot to prikazuje slika.



Ker moramo iz vsakega osenčenega trikotnika odstraniti vsaj eno vžigalico, moramo skupaj odstraniti vsaj 5 vžigalic. Denimo, da zadostuje odstraniti 5 vžigalic. Tedaj mora biti vsaka odstranjena vžigalica stranica natanko 1 osenčenega in 1 neosenčenega majhnega trikotnika, hkrati pa moramo vsakemu majhnemu trikotniku odstraniti natanko 1 stranico. V zgornjem levem neosenčenem trikotniku moramo zato odstraniti vžigalico 2, v zgornjem desnem neosenčenem trikotniku pa vžigalico 5. Toda potem v sosednjih osenčenih trikotnikih vžigalic 3 in 4 ne smemo odstraniti. Hkrati tudi vžigalice 1 ne smemo odstraniti, saj ni stranica osenčenega trikotnika. To pa je protislovje, ker neodstranjene vžigalice 1, 3 in 4 tvorijo trikotnik. Sledi, da moramo odstraniti vsaj 6 vžigalic. Da to zadostuje, prikazuje naslednja slika.



Točkovnik naloge 4.3

Za vse načine reševanja velja sledeče:
Če tekmovalec/ka zgolj navede rešitev kot število šest in ne poda veljavnega primera (skice) za to rešitev . . . . 0 točk

1. način:
Tekmovalec/ka najde rešitev z odstranitvijo šestih vžigalic in jo predstavi na sliki . . 1 točka

Tekmovalec/ka nadaljuje reševanje naloge tako, da dokazuje, da v primeru ko odstranimo manj kot šest vžigalic ostane vsaj en trikotnik. Nato ugotovi, da je dovolj pokazati, da naloge ne moremo rešiti z odstranitvijo petih vžigalic. Bodisi napiše utemeljitev, da če bi uspeli rešiti nalogo z odstranitvijo manj kot petih vžigalic lahko rešimo nalogo tudi z odstranitvijo petih vžigalic, tako da ostranimo še kakšno vžigalico, bodisi preveri, da naloge ne moremo rešiti z odstranitvijo manj kot petih vžigalic in to ugotovitev obrazloži (napiše, da moramo iz vsakega majhnega trikotnika odstraniti vsaj eno vžigalico, nato zaključi, da ker je vsaka vžigalica stranica največ dveh majhnih trikotnikov moramo odstraniti najmanj pet vžigalic) . . . . 1 točka

Tekmovalec/ka utemelji, da bi za rešitev s petimi odstranjenimi vžigalicami morali odstranjevati vžigalice, ki so stranice dveh trikotnikov . . . . 2 točki

Tekmovalec/ka utemelji, da je pogoj za tako rešitev, da iz vsakega trikotnika odstranimo natanko eno vžigalico (napiše, da v nasprotnem primeru obstaja trikotnik iz katerega nismo odstranili vžigalice) . . . . 1 točka

Tekmovalec/ka navede, katere vžigalice so stranice natanko dveh trikotnikov (ali nariše skico) . . . . 1 točka

Tekmovalec/ka utemelji, da izmed teh vžigalic ni pet takih, ki bi zadoščale zgornjim pogojem (torej, da je v vsakem majhnem trikotniku natanko ena) in zaključi, da se z odstranitvijo petih vžigalic ne da rešiti naloge . . . . 1 točka

2. način:
Tekmovalec/ka utemelji, da moramo odstraniti vsaj pet vžigalic (glej 1. način) 1 točka

Tekmovalec/ka poda sliko osenčenih in neosenčenih trikotnikov in označi stranice . 1 točka

Tekmovalec/ka utemelji, da če zadostuje, da odstranimo pet vžigalic, mora tedaj

veljati, da je vsaka odstranjena vžigalica stranica enega osenčenega in enega neosenčenega majhnega trikotnika . . . . 1 točka

Tekmovalec/ka utemelji, da mora veljati, da iz vsakega majhnega trikotnika odstranimo natanko eno vžigalico . . . . 1 točka

Tekmovalec/ka utemeji, da moramo tedaj odstraniti vžigalici 2 in 5. Nato ugotovi, da zaradi zgornjih pogojev ne moremo odstraniti nobene od vžigalic 1, 3 in 4 ter zaključi, da zato naloge ne moremo rešiti z odstranitvijo zgolj petih vžigalic . . . . 2 točki

Temkmovalec/ka najde rešitev z odstranitvijo šestih vžigalic in jo predstavi na sliki 1 točka

3. način:
Tekmovalec/ka ugotovi, da moramo iz vseh robnih trikotnikov (torej levo spodaj, levo zgoraj, desno spodaj in desno zgoraj) odstraniti vsaj eno vžigalico. Tekmovalec/ka utemelji, da s tem ko jemljemo vžigalice, ki mejijo na še en trikotnik kvečjemu zmanjšamo število vžigalic, ki jih moramo odstraniti. Zato odstranimo slednje . . . . 3 točke

Ostaneta nam še dva majhna disjunktna trikotnika. Tekmovalec/ka od tod zaključi, da je najmanjše število vžigalic, ki jih moramo odstraniti, da dosežemo želeno vsaj šest 3 točke

Tekmovalec/ka odstrani še po eno povezavo iz vsakega ostalega majhnega trikotnika ali pa alternativno poda kakšno drugo rešitev z odstranitvijo šestih vžigalic . . 1 točka