Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. V koordinatni sistem nariši množico točk (x, y), ki ustrezajo pogoju $(\mid x \mid \leq 2) \wedge (-2 \leq y \leq 4) \wedge (y \leq x)$. Izračunaj ploščino in obseg lika, ki nastane.

B2. Poenostavi izraz v množici realnih števil: $\left(\frac{1}{x^4-27x}-\frac{1}{x^4-3x^3}\right):\frac{x^{n+2}-9x^n}{x^{n+5}+3x^{n+4}+9x^{n+3}}; x \neq 0,3,-3$.

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Dani sta dve nepovezani nalogi.

a) Skrči izraz, kolikor je mogoče $\left(\frac{b}{a}\right)^{2m+2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{1-m} - 5 \cdot \left(\frac{b^2c}{a^3}\right)^{m+3} : \left(\frac{bc}{a^2}\right)^{m+3}$.

b) Izračunaj vrednost izraza $\left(3-\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+7}{2}} - 5 \cdot \sqrt{\frac{3}{125}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}} - \sqrt{27^{\frac{2}{3}} - 0,25^{-\frac{3}{2}}}$.

B2. Dana sta pravilna večkotnika, ki imata skupaj 15 stranic in 34 diagonal. Določi število stranic in vsoto velikosti notranjih kotov vsakega izmed danih večkotnikov.

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Stožec z dolžino stranice 13 cm ima površino $90\ \pi$ cm^2. Njegova prostornina je enaka $\frac{3}{40}$ prostornine krogle in enaka $\frac{1}{12}$ prostornine valja z višino 3 cm. V kolikšnem razmerju so polmeri stožca, krogle in valja?

B2. Dana je funkcija $f(x) = \log_2(2 + \sqrt{x+4})$.

- V kateri točki graf funkcije f seka abscisno os?
- V kateri točki graf funkcije f seka ordinatno os?
- Določi presečišče grafa funkcije f in premice z enačbo $y = 3$.
- Funkciji f določi inverzno funkcijo.

  Odgovore utemeljite.

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Izračunaj koordinate presečišč grafov funkcije $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x + 2$ in funkcije $g(x) = 3x^3 - 8x^2 - 1$. Zapiši smerni koeficient premice skozi ti dve presečišči. Izračunaj tangens manjšega od kotov med to premico in premico z enačbo $3x + 2y - 11 = 0$.

B2. Dani sta dve nepovezani nalogi.

(a) Reši enačbo $5V_{n+1}^{3} = 8C_{n+2}^{4}$; pri čemer je V_n^r oznaka za variacije brez ponavljanja reda r v množici z n elementi in C_n^r oznaka za kombinacije brez ponavljanja reda r v množici z n elementi.

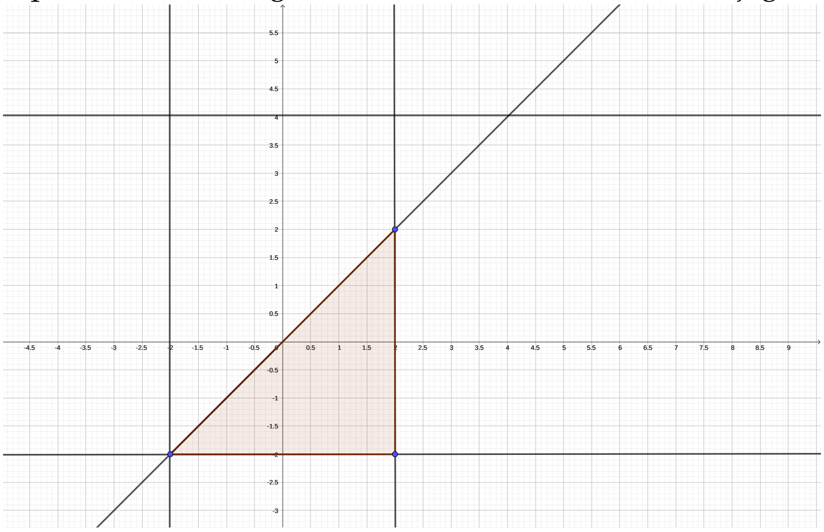
(b) Izračunaj, za katere vrednosti x števila $\log_2(x-1)$, $\log_2(x+3)$, $\log_2(x^2-9)$ v tem vrstnem redu tvorijo aritmetično zaporedje.

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

16. marec 2006

Naloge za 1. letnik (rešitve)

1. V koordinatni sistem narišemo množico točk, ki ustreza pogoju $(|\ x\ | \leq 2) \wedge (-2 \leq y \leq 4) \wedge (y \leq x)$. Dobljena množica točk oblikuje pravokotni trikotnik s katetama $k_1 = k_2 = 4$. Izračunamo ploščino trikotnika $S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2} = 8$. S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino hipotenuze nastalega trikotnika $h = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ in njegov obseg $o = 8 + 4\sqrt{2}$.



Narisana množica točk $|\ x\ | \leq 2$ .... 1 točka
Narisana množica točk $-2 \leq y \leq 4$ .... 1 točka
Narisana množica točk $y \leq x$ .... 1 točka
Označen presek množic .... 1 točka
Zapis ali uporaba dolžin obeh katet $k_1 = k_2 = 4$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca za izračun ploščine pravokotnega trikotnika $S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$ .... 1 točka
Izračun ploščine trikotnika $S = 8$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba Pitagorovega izreka $h^2 = {k_1}^2 + {k_2}^2$ .... 1 točka
Izračun dolžine hipotenuze $h = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ .... 1 točka
Izračun obsega $o = 8 + 4\sqrt{2}$ .... 1 točka

2. Najprej razstavimo prvi imenovalec $x^4 - 27x = x(x^3 - 27) = x(x-3)(x^2+3x+9)$ in drugi imenovalec $x^4 - 3x^3 = x^3(x-3)$ ter razširimo oba ulomka na najmanjši skupni imenovalec in dobimo $\frac{-3x-9}{x^3(x-3)(x^2+3x+9)}$. Za tem razstavimo števec tretjega ulomka $x^{n+2} - 9x^n = x^n(x^2-9) = x^n(x-3)(x+3)$ in imenovalec tretjega ulomka $x^{n+5} + 3x^{n+4} + 9x^{n+3} = x^{n+3}(x^2+3x+9)$. Ko ulomke okrajšamo kolikor je mogoče dobimo rezultat $-\frac{3}{(x-3)^2}$.

Razcep prvega imenovalca $x^4 - 27x = x(x^3 - 27) = x(x-3)(x^2+3x+9)$ .... 1+1 točka
Razcep drugega imenovalca $x^4 - 3x^3 = x^3(x-3)$ .... 1 točka
Zapis izrazov v oklepaju na skupi imenovalec $\frac{-3x-9}{x^3(x-3)(x^2+3x+9)}$ .... 1 točka
Razcep tretjega števca $x^{n+2} - 9x^n = x^n(x^2-9) = x^n(x-3)(x+3)$ .... 1+1 točka
Razcep tretjega imenovalca $x^{n+5} + 3x^{n+4} + 9x^{n+3} = x^{n+3}(x^2+3x+9)$ .... 1 točka
Krajšanje ulomkov .... 1* točka
Rezultat $-\frac{3}{(x-3)^2}$ .... 1+1 točka

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

16. marec 2006

Naloge za 2. letnik (rešitve)

1. a) V prvem členu upoštevamo pravilo za množenje potenc z isto osnovo in dobimo $\left(\frac{b}{a}\right)^{2m+2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{1-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m+3}$. V drugem členu pišemo obe potenci pod skupni eksponent, delimo in krajšamo ulomka ter dobimo $5 \cdot \left(\frac{b^2c}{a^3}\right)^{m+3} : \left(\frac{bc}{a^2}\right)^{m+3} = 5 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{m+3}$. Člena odštejemo in dobimo $-4 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{m+3}$.
V prvem členu faktor pred korenom zapišemo pod skupni korenski znak, kvadriramo, zmnožimo, krajšamo, korenimo in dobimo $(3-\sqrt{5}) \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+7}{2}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2(3\sqrt{5}+7)}{2}} = \sqrt{\frac{(9-6\sqrt{5}+5)\cdot(3\sqrt{5}+7)}{2}} = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})(3\sqrt{5}+7)}{2}} = \sqrt{49-45} = 2$ Drugi člen delno korenimo, nato zapišemo pod skupni korenski znak, rešimo po pravilih in dobimo $5 \cdot \sqrt{\frac{3}{125}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5\cdot\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{3}}} = \frac{5}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5\cdot\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot5^2\cdot5}{5^3\cdot3^2\cdot3}} = 1$.
V tretjem členu osnove potenc v korenjencu zapišemo v obliki potenc, izračunamo korenjenec, korenimo in dobimo $\sqrt{27^{\frac{2}{3}} - 0,25^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt{3^{3\frac{2}{3}} - 2^{-2\left(-\frac{3}{2}\right)}} = \sqrt{9-8} = 1$ Zapišemo rezultat 0.

Upoštevanje pravila za množenje potenc z isto osnovo .... 1 točka
Izračun $\left(\frac{b}{a}\right)^{2m+2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{1-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m+3}$ .... 1 točka
Zapis potenc pod skupni eksponent .... 1 točka
Izračun $5 \cdot \left(\frac{b^2c}{a^3}\right)^{m+3} : \left(\frac{bc}{a^2}\right)^{m+3} = 5 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{m+3}$ .... 1 točka
Odštejemo izračuna in dobimo $-4 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{m+3}$ .... 1 točka
Izračun prvega člena $(3-\sqrt{5}) \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+7}{2}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2(3\sqrt{5}+7)}{2}} = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})(3\sqrt{5}+7)}{2}} = \sqrt{49-45} = 2$
1+1 točka
Izračun drugega člena $5 \cdot \sqrt{\frac{3}{125}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5\cdot\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{3}}} = \frac{5}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5\cdot\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot5^2\cdot5}{5^3\cdot3^2\cdot3}} = 1$ .... 1 točka
Izračun tretjega člena $\sqrt{27^{\frac{2}{3}} - 0,25^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt{3^{3\frac{2}{3}} - 2^{-2\left(-\frac{3}{2}\right)}} = \sqrt{9-8} = 1$ .... 1 točka
Rezultat 0 .... 1 točka

2. Upoštevamo skupno število stranic in zapišemo prvo enačbo $m + n = 15$. Upoštevamo formulo za število diagonal in zapišemo drugo enačbo $\frac{n(n-3)}{2} + \frac{m(m-3)}{2} = 34$. Rešimo sistem npr. na zamenjalni način in dobimo enačbo $m^2 - 15m + 56 = 0$. Rešimo enačbo npr. z razcepom $(m-7)(m-8) = 0$. Rešitve so $m_1 = 8$ in $m_2 = 7$ oz. $n_1 = 7$ in $n_2 = 8$. Ugotovimo, da gre za 8-kotnik in 7-kotnik. Izračunamo vsoto notranjih kotov 8-kotnika $(8-2)180^\circ = 1080^\circ$ in vsoto notranjih kotov 7-kotnika $(7-2)180^\circ = 900^\circ$.

Zapis prve enačbe $m + n = 15$ .... 1 točka
Zapis druge enačbe $\frac{n(n-3)}{2} + \frac{m(m-3)}{2} = 34$ .... 1 točka
Reševanje sistema .... 1*+1* točka
Urejena enačba $m^2 - 15m + 56 = 0$ .... 1 točka
Reševanje enačbe .... 1* točka
Izračun $m_1 = 8$ in $m_2 = 7$ oz. $n_1 = 7$ in $n_2 = 8$ .... 1 točka
Ugotovitev, da gre za 8-kotnik in 7-kotnik .... 1 točka
Izračun vsote notranjih kotov 8-kotnika $(8-2)180^\circ = 1080^\circ$ .... 1 točka
Izračun vsote notranjih kotov 7-kotnika $(7-2)180^\circ = 900^\circ$ .... 1 točka
Če kandidat s poskušanjem ugane, da gre za 7-kotnik in 8-kotnik in pravilno izračuna obe vsoti notranjih kotov, dobi zadnje 3 točke.

dMFA

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

16. marec 2006

Naloge za 3. letnik (rešitve)

1. Podatke za stožec vstavimo v formulo za površino stožca $90\pi = \pi r^2 + 13\pi r$, delimo enačbo s π ter dobljeno enačbo $90 = r^2 + 13r$ preoblikujemo $r^2 + 13r - 90 = 0$, tako da dobimo iz $(r + 18)(r - 5) = 0$ rešitev za polmer stožca $r_s = 5$ cm. Iz $v^2 = s^2 - r^2$ izračunamo višino stožca $v = 12$ cm. Vstavimo dobljena podatka in izračunamo prostornino stožca $V_s = \frac{\pi r^2 v}{3} = 100\,\pi$ cm^3. Nato izračunamo prostornino krogle $V_k = \frac{40 V_s}{3} = \frac{400}{3}\pi$ cm^3 ter izračunamo polmer krogle $r_k = 10$ cm. Zatem izračunamo še prostornino valja $V_v = 12V_s = 1200$ cm^3 in izračunamo še polmer valja $r_v = 20$ cm. Nazadnje zapišemo razmerja polmerov $r_s : r_k : r_v = 5 : 10 : 20 = 1 : 2 : 4$.

Vstavitev danih podatkov v formulo za površino stožca $90\pi = \pi r^2 + 13\pi r$ . . . . 1 točka
Poenostavitev $90 = r^2 + 13r$ do kvadratne enačbe $r^2 + 13r - 90 = 0$ . . . . 1 točka
Rešitev kvadratne enačbe $(r + 18)(r - 5) = 0$ in zapis polmera stožca $r_s = 5$ cm . . . . 1 točka
Iz $v^2 = s^2 - r^2$ izračun višine stožca $v = 12$ cm . . . . 1 točka
Izračun prostornine stožca $V_s = \frac{\pi r^2 v}{3} = 100\,\pi$ cm^3 . . . . 1 točka
Izračun prostornine krogle $V_k = \frac{40 V_s}{3} = \frac{400}{3}\pi$ cm^3 . . . . 1 točka
Izračun polmera krogle $r_k = 10$ cm . . . . 1 točka
Izračun prostornine valja $V_v = 12V_s = 1200$ cm^3 . . . . 1 točka
Izračun polmera valja $r_v = 20$ cm . . . . 1 točka
Zapis razmerja polmerov $r_s : r_k : r_v = 5 : 10 : 20 = 1 : 2 : 4$ . . . . 1 točka

2. Presečišče krivulje z abscisno osjo določimo tako, da izračunamo ničlo funkcije, oziroma rešimo enačbo $\log_2(2 + \sqrt{x + 4}) = 0$. Ko enačbo preoblikujemo v $\sqrt{x + 4} = -1$, ugotovimo, da nima rešitve. Graf funkcije f nima presečišča z abscisno osjo.

Presečišče grafa funkcije z ordinatno osjo izračunamo tako, da določimo začetno vrednost funkcije, izračunamo torej vrednost funkcije f pri $x = 0$. Dobimo $f(0) = \log_2(2 + \sqrt{0 + 4}) = 2$. Presečišče grafa funkcije z ordinatno osjo je v točki $N(0, 2)$.

Presečišče krivulje s premico $y = 3$ dobimo, če rešimo enačbo $3 = \log_2(2 + \sqrt{x + 4})$. Enačbo preoblikujemo in izračunamo $x = 32$. Premica in krivulja se torej sekata v točki $P(32, 3)$.

Inverzno funkcijo k funkciji $f(x) = \log_2(2 + \sqrt{x + 4})$ dobimo z reševanjem enačbe $x = \log_2(2 + \sqrt{y + 4})$. Enačbo preuredimo v $2^x = 2 + \sqrt{y + 4}$ in $2^x - 2 = \sqrt{y + 4}$, kvadriramo obe strani in dobimo $(2^x - 2)^2 = y + 4$ in nazadnje $y = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x$. Inverzno funkcijo zapišemo $f^{-1}(x) = 4^x - 2^{x+2}$.

Zapis enačbe $\log_2(2 + \sqrt{x + 4}) = 0$ . . . . 1 točka
Ureditev enačbe $\sqrt{x + 4} = -1$ . . . . 1 točka

Ugotovitev, da enačba nima rešitve in graf funkcije f nima presečišča z abscisno osjo . . . . . 1 točka

Zapis in izračun $f(0) = \log_2(2 + \sqrt{0 + 4}) = 2$ . . . . 1 točka
Zapis presečišča grafa ordinatno osjo $N(0, 2)$ . . . . 1 točka

Zapis enačbe $3 = \log_2(2 + \sqrt{x + 4})$. . . . . 1 točka
Preoblikovanje enačbe in izračun $x = 32$, zapis presečišča $P(32, 3)$ . . . . 1 točka

Zapis enačbe $x = \log_2(2 + \sqrt{y+4})$ . . . . 1 točka
Preureditev enačbe v $2^x = 2 + \sqrt{y+4}$ in $2^x - 2 = \sqrt{y+4}$, kvadriranje in preureditev $(2^x - 2)^2 = y + 4$ oziroma $y = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x$ . . . . 1 točka
Zapis inverzne funkcije $f^{-1}(x) = 4^x - 2^{x+2}$ . . . . 1 točka

dMFA

23. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

16. marec 2006

Naloge za 4. letnik (rešitve)

1. Presečišče grafov funkcij določimo tako, da enačimo funkcijska predpisa $f(x) = g(x)$. Dobimo enačbo višje stopnje $x^4 - 2x^3 - 7x + 2 = 3x^3 - 8x^2 - 1$. Enačbo preoblikujemo in dobimo $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$. Ugotovimo, da je $x_1 = 1$ rešitev te enačbe, naredimo Hornerjev algoritem in dobimo razcep $(x^3 - 4x^2 + 4x - 3)(x - 1) = 0$. Prvi faktor je enak nič za $x_2 = 3$. Še enkrat naredimo Hornerjev algoritem in dobimo razcep $(x^2 - x + 1)(x - 3)(x - 1) = 0$. Kvadratni faktor ima negativno diskriminanto in zato drugih realnih rešitev ni. Za $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$ izračunamo še ordinati presečišč. $y_1 = g(x_1) = -6$ in $y_2 = g(x_2) = 8$. Iskani presečišči sta $P_1(1, -6)$ in $P_2(3, 8)$. Izračunamo smerni koeficient premice skozi ti dve presečišči $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 7$. Smerni koeficient prve premice je $k_1 = 7$. Premico $3x + 2y - 11 = 0$ zapišemo v eksplicitni obliki $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$. Smerni koeficient druge premice je torej $k_2 = -\frac{3}{2}$. Uporabimo obrazec za tangens vmesnega kota $\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| = \frac{17}{19}$.

Enačenje funkcijskih predpisov . . . . 1 točka
Preoblikovanje v $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$ . . . . 1 točka
Rešitev $x_1 = 1$ . . . . 1 točka
Rešitev $x_2 = 3$ . . . . 1 točka
Zapis presečišč $P_1(1, -6)$ in $P_2(3, 8)$ . . . . 1+1 točka
Izračun $k_1 = 7$ . . . . 1 točka
Določitev $k_2 = -\frac{3}{2}$ . . . . 1 točka
Zapis ali upoštevanje $\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$ . . . . 1 točka
Izračun $\tan\varphi = \frac{17}{19}$ . . . . 1 točka

2.
a) Upoštevamo pomen variacij in kombinacij in dobimo zvezo $5(n+1)n(n-1) = \frac{8(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$. Množimo s 3 in vse prenesemo na eno stran, dobimo $15(n+1)n(n-1) - (n+2)(n+1)n(n-1) = 0$. Izpostavimo skupni faktor in dobimo enačbo $(n+1)n(n-1)(13-n) = 0$. Rešitve $n = -1$, $n = 0$ in $n = 1$ ne ustrezajo. Ustrezna rešitev je $n = 13$.
b) Upoštevamo definicijo aritmetičnega zaporedja in dobimo $2\log_2(x+3) = \log_2(x-1) + \log_2(x^2-9)$. Upoštevamo pravila za logaritmiranje in dobimo $\log_2(x+3)^2 = \log_2((x-1)(x^2-9))$. Antilogaritmiramo in preoblikujemo v $0 = x^3 - 2x^2 - 15x$. Izpostavimo in razstavimo v $0 = x(x-5)(x+3)$. Rešitvi $x = 0$ in $x = -3$ ne ustrezata. Rešitev $x = 5$ ustreza.

Upoštevana formula za variacije $(n+1)n(n-1)$ . . . . 1 točka
Upoštevana formula za kombinacije $\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ . . . . 1 točka
Reševanje enačbe . . . . 1* točka
Ugotovitev, da rešitve $n = -1$, $n = 0$ in $n = 1$ ne ustrezajo. Če je bila enačba deljena z $(n+1)n(n-1)$ zapis pogojev $n \neq -1$, $n \neq 0$ in $n \neq 1$ . . . . 1 točka
Rešitev je $n = 13$ . . . . 1 točka

Upoštevanje definicij aritmetičnega zaporedja in zapis enačbe $2\log_2(x+3) = \log_2(x-1) + \log_2(x^2-9)$ . . . . 1 točka

Reševanje enačbe .... 1* točka
Antilogaritmiranje in preoblikovanje enačbe do oblike $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe $x = 0$ in $x = -3$ ne ustrezata .... 1 točka
Ugotovitev, da je zaporedje aritmetično za $x = 5$ .... 1 točka