Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Vrednost izraza $3 \cdot (-2)^3 - 2^4 \cdot (5 - 1^2 \cdot 4) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot (-2) \cdot (-1)^7 - 9 \cdot (-1)^6 \cdot \frac{1}{3} + 1$ je:

(**A**) -20 (**B**) -24 (**C**) 15 (**D**) 10 (**E**) $\frac{1}{6}$

A2. Razlika kvadratov poljubnih dveh zaporednih lihih števil je:

(**A**) deljiva z 8 (**B**) deljiva s 4, a ne z 8 (**C**) deljiva z 2, a ne s 4
(**D**) praštevilo (**E**) deljiva s poljubnim lihim številom

A3. Metka gre v kino vsak drugi dan. Blagajničarka deli brezplačne vstopnice vsak enajsti dan, toda le, če je ta dan nedelja. Metka je dobila brezplačno vstopnico 15. maja. Metka bo istega leta dobila brezplačno vstopnico:

(**A**) 15. oktobra (**B**) 16. oktobra (**C**) 17. oktobra
(**D**) 18. oktobra (**E**) neki dan, različen od navedenih

A4. Sliko števila $\frac{5}{8}$ na številski premici prezrcalimo preko točke, ki ponazarja število $\frac{3}{7}$. Zrcalna slika, ki jo dobimo, predstavlja število:

(**A**) $\frac{45}{56}$ (**B**) $\frac{23}{28}$ (**C**) $\frac{11}{15}$ (**D**) $\frac{13}{56}$ (**E**) $\frac{23}{15}$

A5. Koliko je 5 % od 4 %?

(**A**) 0,2 (**B**) 0,02 (**C**) 0,0002 (**D**) 0,22 (**E**) 0,002

A6. Množico realnih števil, zapisano kot $\Big((-3,-1) \cup (2,3\,]\Big) \cap [-2,2\,]$, lahko zapišemo v obliki:

(**A**) $[-2,2\,]$ (**B**) $[-2,-1)$ (**C**) $\{2\}$ (**D**) $(-2,1) \cup \{2\}$ (**E**) $(-3,-2)$

II. DEL

B1. Natančno izračunaj vrednost izraza $0{,}3 : \dfrac{0{,}3 - 1\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{8} - 1} + 0{,}1\overline{6}$.

B2. Dijak bo varčeval za maturantski izlet, na katerega bo odšel ob koncu četrtega letnika. Ob koncu prvega, drugega in tretjega letnika bo na banko vložil po 100 evrov. Banka mu prihranke letno obrestuje po 3,5 % obrestni meri. Koliko bo moral dijak še doplačati za maturantski izlet, ki bo stal 400 evrov? Rezultat zaokroži na eno decimalno mesto. Zapiši odgovor.

B3. Število n ima obliko $3a2140b$. Določi vse možne pare števk a in b tako, da bo število n deljivo s 6.

B4. Poenostavi izraz $\left(\left(a-b\right)^2\right)^2 - \left(a^2+b^2\right)^2 + 4ab(a-b)^2$.

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Smerni koeficient linearne funkcije $f(x) = \dfrac{3 - \frac{x}{2}}{\frac{4}{5}}$ je enak:

(**A**) 0,7 (**B**) $\frac{15}{4}$ (**C**) $-\frac{1}{2}$ (**D**) $-0{,}625$ (**E**) 3

A2. Premica, dana z enačbo $x + 2y - 3 = 0$,

(**A**) seka ordinatno os v točki $A(0,3)$
(**B**) je vzporedna z abscisno osjo
(**C**) je vzporedna z ordinatno osjo
(**D**) je vzporedna s premico $2x + y - 4 = 0$
(**E**) seka abscisno os v točki $B(3,0)$

A3. Natančna vrednost izraza $32^{0,6} - 16^{0,75} + 1,44^{0,5}$ je:

(**A**) 1,2 (**B**) $2\sqrt{3}$ (**C**) 5 (**D**) -9 (**E**) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

A4. Rešitve enačbe $\left(x^2 - 8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 4$ so:

(**A**) $x_{1,2} = \pm 6$ (**B**) $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$ (**C**) $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$
(**D**) $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{5}$ (**E**) Enačba ni rešljiva

A5. Zunanji koti trikotnika so v razmerju 2 : 3 : 4. Notranji koti tega trikotnika so v razmerju:

(**A**) 5 : 3 : 1 (**B**) 5 : 4 : 3 (**C**) 4 : 3 : 2
(**D**) 5 : 3 : 2 (**E**) drugačnem od navedenih

A6. Koliko stranic ima večkotnik, ki ima 230 diagonal?

(**A**) 15 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 27

II. DEL

B1. Dani sta funkciji $f(x) = mx - x + 2$ in $g(x) = 2 + 2x$.

(a) Določi m tako, da bosta grafa funkcij vzporedna.

(b) Upoštevaj $m = -3$ in izračunaj koordinati presečišča grafov.

(c) Nariši graf funkcije $|g(x)|$.

B2. Dan je pravokotnik $ABCD$, katerega stranica AB je dolga 7 dm. Točka E leži na stranici BC, tako da je $\sphericalangle AEB = 43^\circ$ in $\sphericalangle EDC = 30^\circ$. Izračunaj dolžino stranice BC na milimeter natančno. Nariši skico.

B3. Poenostavi izraz

$$\sqrt[12]{x \cdot \sqrt{y^{-6}}} \cdot \sqrt[4]{x^3 y^{-1}} : \sqrt[6]{x^{\frac{1}{2}} y \cdot \sqrt{y}} =$$

in rezultat zapiši v obliki potence z racionalnim eksponentom.

B4. Točki $A(7, 1)$ in $B(0, y)$ sta med seboj oddaljeni $5\sqrt{2}$ enot. Natančno izračunaj ordinato točke B. Zapiši obe rešitvi.

7. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

4. april 2007

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Presečišči parabole $y = x^2 - 4x + 5$ in premice $y = -5x + 5$ sta točki

(**A**) $T_1(3,5),\ T_2(0,2)$ (**B**) $T_1(3,2),\ T_2(1,5)$ (**C**) $T_1(5,0),\ T_2(3,2)$
(**D**) $T_1(0,5),\ T_2(-1,10)$ (**E**) različni od navedenih

A2. Parabola $y = ax^2 + c$ poteka skozi točki $A(-1,-3)$ in $B(-2,3)$. Velja:

(**A**) $a = 2,\ c = -5$ (**B**) $a = -2,\ c = 5$ (**C**) $a = 1,\ c = 3$
(**D**) $a = -2,\ c = -5$ (**E**) $a = 0,\ c = -3$

A3. Katera izmed navedenih funkcij je eksponentna?

(**A**) $f(x) = x^2$ (**B**) $f(x) = 3^{x\sqrt{2}}$ (**C**) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
(**D**) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (**E**) $f(x) = 2^5 + x^2$

A4. Rešitev enačbe $3^{x+2} \cdot 3^{x+3} = 9$ je:

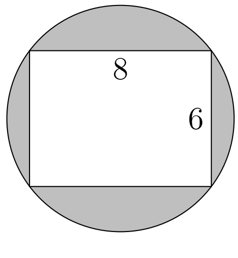
(**A**) $-\frac{3}{2}$ (**B**) $\frac{7}{2}$ (**C**) 1 (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) -1

A5. Za funkciji $f(x) = 3^{-x}$ in $g(x) = \log(x-4)$ velja:

(**A**) $f(2) \cdot g(5) = -6$ (**B**) $f(-1) \cdot g(5) = 3$ (**C**) $f(0) \cdot g(14) = 0$
(**D**) $f(1) \cdot g(\pi^2) > 0$ (**E**) $f(2) \cdot g(4{,}1) > 0$

A6. Ploščina osenčenega dela kroga je

(**A**) 23π (**B**) 48π (**C**) $25\pi - 48$
(**D**) 100π (**E**) $100\pi - 48$



II. DEL

B1. Dan je trikotnik ABC s podatki $a = 4$ cm, $b = 5$ cm in $\gamma = 60^\circ$.

(a) Natančno izračunaj dolžino težiščnice iz oglišča A.

(b) Zapiši razmerje, v katerem višina iz oglišča A deli stranico a.

B2. Določi konstanto n tako, da bo za nek $y \in \mathbb{R}$ točka $A(3, y)$ presečišče grafov funkcij $f(x) = -\frac{1}{3}x + n$ in $g(x) = \log_2(x+1) - 1$.

B3. Dana je funkcija $f(x) = 3^{x-1}$. Za katere realne vrednosti x velja enakost $f(x+1) = f(x) + 6$?

B4. V živalskem vrtu so opice v dveh kletkah. V prvi kletki sta dve opici več kot v drugi. Oskrbnik živalskega vrta je v vsaki kletki opicam razdelil 48 banan. Vsaka opica iz druge kletke je dobila 4 banane več kot vsaka opica iz prve kletke. Koliko opic je v vsaki kletki? Zapiši odgovor.

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Kolikšna je največja vrednost funkcije $f(x) = \sin x \cos x$?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**C**) 1 (**D**) $\sqrt{3}$ (**E**) 2

A2. Število različnih rešitev enačbe $x^2 = x^4$ je:

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 6

A3. Naj bo $p(x)$ poljuben polinom, ki ima štiri ničle, $q(x)$ pa tak polinom, ki ima pet ničel, da so vse ničle obeh polinomov med seboj različne. Kaj je gotovo res?

(**A**) Funkcija $\frac{p(x)}{q(x)}$ ima eno ničlo. (**B**) Funkcija $\frac{q(x)}{p(x)}$ ima štiri ničle.

(**C**) Polinom $p(x) + q(x)$ ima devet ničel. (**D**) Polinom $p(x) - q(x)$ nima ničel.

(**E**) Polinom $p(x)q(x)$ ima devet ničel.

A4. Definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{2-x}}$ je:

(**A**) $x \geq 1$ (**B**) $x > 1$ (**C**) $x < 2$

(**D**) $x \leq 2$ (**E**) različno od navedenih

A5. V geometrijskem zaporedju s prvim členom $\sqrt{3}$ in količnikom $\sqrt[10]{3}$ je trinajsti člen enak:

(**A**) $3\sqrt[10]{3^7}$ (**B**) $3\sqrt[5]{3^4}$ (**C**) $3\sqrt[10]{3^4}$ (**D**) $\sqrt[5]{3^3}$ (**E**) $\sqrt[5]{3^7}$

A6. Katero izmed navedenih zaporedij je aritmetično?

(**A**) $\sin 4°,\ \sin 5°,\ \sin 6°$ (**B**) $\cos 4°,\ \cos 5°,\ \cos 6°$ (**C**) $\log n,\ \log n^3,\ \log n^5$

(**D**) $\tan 4°,\ \tan 5°,\ \tan 6°$ (**E**) $\log n,\ \log 3n,\ \log 5n$

II. DEL

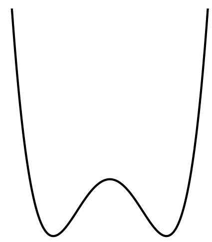
B1. Dana je funkcija $f(x)=\cos(x-\frac{7\pi}{6})$. Izračunaj $f(x_1)$, če je $\cos(x_1)=\frac{-\sqrt{6}}{3}$ in je $\frac{\pi}{2}<x_1<\pi$. Rezultat naj bo točen, izvedeno naj bo delno korenjenje in racionalizacija imenovalcev.

B2. Seštej

$$1+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6+\ldots+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{38},$$

ne da bi uporabil žepno računalo.

B3. Vika je narisala graf polinoma, Jure pa je izbrisal koordinatni osi. Preriši graf in nariši abscisno os tako, da



(a) bo polinom imel štiri realne ničle lihe stopnje.

(b) bo polinom imel eno ničlo sode stopnje in dve ničli lihe stopnje.

(c) polinom ne bo imel realnih ničel.

B4. Nariši graf funkcije $f(x)=|-x^{-1}+x^{-2}|$. Narisano krivuljo, ki predstavlja graf, posebej označi (npr. z odebeljeno črto ali drugo barvo).

7. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

4. april 2007

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B	A	B	D	E	B

A1. Poenostavljen izraz je enak $3 \cdot (-8) - 16 \cdot (5-4) \cdot \frac{1}{2} + 10 - \frac{9}{3} + 1$. Po nadaljnjem urejanju dobimo $-24 - 16 \cdot \frac{1}{2} + 10 - 3 + 1 = -24 - 8 + 8 = -24$.

A2. Naj bosta zaporedni lihi števili $2n-1$ in $2n+1$. Tedaj je razlika njunih kvadratov enaka $(4n^2+4n+1) - (4n^2-4n+1) = 8n$. Razlika je deljiva z 8.

A3. Pomagamo si s skupnim večkratnikom $v(2, 11, 7) = 154$, saj Metka hodi v kino vsak drugi dan, brezplačne vstopnice pa delijo vsak 11. dan, če je ta dan nedelja, ki je vsak 7. dan. Ugotovimo, da je 154 dni po 15. maju ravno 16. oktober.

A4. Število $\frac{5}{8}$ je večje od števila $\frac{3}{7}$, zato je preslikano število enako $\frac{3}{7} - (\frac{5}{8} - \frac{3}{7}) = \frac{6}{7} - \frac{5}{8} = \frac{13}{56}$.

A5. Izračunamo $\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{100} = \frac{2}{1000} = 0{,}002$.

A6. Najbolje, če si narišemo skico. Z nje razberemo, da je rešitev $[-2, -1)$.

II. DEL

B1. Razlika v števcu ulomka je enaka $-1{,}2$, razlika v imenovalcu pa 1. Nato opravimo deljenje, prvi člen se poenostavi v $-\frac{1}{4}$. Število $0{\cdot}1\overline{6}$ pretvorimo v ulomek $\frac{1}{6}$. Ulomka seštejemo in dobimo rezultat $-\frac{1}{12}$.

Poenostavitev števca v $-1{,}2$ .... 1 točka
Poenostavitev imenovalca v 1 .... 1 točka
Poenostavljen prvi člen v $-\frac{1}{4}$ .... 2 točki
Zapis periodičnega decimalnega števila z ulomkom $\frac{1}{6}$ .... 1 točka
Rezultat $-\frac{1}{12}$ .... 1 točka

B2. Najprej izračunamo privarčevan znesek po prvem letu: $100 \cdot 1{,}035 = 103{,}5$ evra. Temu prištejemo 100 evrov, znesek 203,5 evra pa po drugem letu naraste v banki na $203{,}5 \cdot 1{,}035 = 210{,}6$. Ponovimo postopek še za tretje leto. Privarčevani znesek po tretjem letu je $(210{,}6 + 100) \cdot 1{,}035 = 321{,}5$ evra. Razlika med ceno izleta in privarčevanim zneskom je 78,5 evra.

Izračun vrednosti zneska po prvem obrestovanju 103,5 .... 1 točka
Izračun zneska za drugo obrestovanje 203,5 evra .... 1 točka
Izračun vrednosti zneska po drugem obrestovanju 210,6 evra .... 1 točka
Izračun vrednosti zneska po tretjem obrestovanju 321,5 evra .... 1 točka
Izračun razlike 78,5 evra .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B3. Upoštevamo kriterija deljivosti z 2 in 3. Ugotovimo, da števka b lahko zavzame vrednosti $0, 2, 4, 6, 8$, saj mora biti število sodo. Za vsako vrednost števke b premislimo, katere vrednosti lahko zavzame števka a, da bo dano število deljivo s 3, torej da bo vsota $10 + a + b$ deljiva s 3. Tako imamo:
– če je $b = 0$, je a lahko 2, 5 ali 8,
– če je $b = 2$, je a lahko 0, 3, 6 ali 9,
– če je $b = 4$, je a lahko 1, 4 ali 7,
– če je $b = 6$, je a lahko 2, 5 ali 8,
– če je $b = 8$, je a lahko 0, 3, 6 ali 9.

Ugotovitev $b \in \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ .... 1 točka
Zapisana vsota $10 + a + b$ .... 1 točka
Upoštevanje pogojev $b = 0,\ a = 2, 5, 8$;
$b = 2,\ a = 0, 3, 6, 9$;
$b = 4,\ a = 1, 4, 7$;
$b = 6,\ a = 2, 5, 8$;
$b = 8,\ a = 0, 3, 6, 9$ .... 4 točke

B4. Najprej je $\left((a-b)^2\right)^2 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$. Drugi člen je enak $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$, tretji pa $4ab(a^2 - 2ab + b^2)$. Celoten izraz poenostavimo in dobimo $-4a^2b^2$.

Kvadriranje v prvem členu $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ .... 2 točki
Kvadriranje v drugem členu $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... 1 točka
Ureditev tretjega člena $4a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3$ .... 1 točka
Upoštevanje predznaka pri drugem členu .... 1 točka
Rešitev $-4a^2b^2$ .... 1 točka

Drugi letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
D	E	A	D	A	D

A1. Funkcijo zapišemo v obliki $f(x) = \frac{5}{4}(3 - \frac{x}{2}) = -\frac{5}{8}x + \frac{15}{4}$, od koder preberemo smerni koeficient $-\frac{5}{8} = -0{,}625$.

A2. Preverimo, da premica seka abscisno os v točki $B(3, 0)$. Drugi ponujeni odgovori ne ustrezajo dani premici.

A3. Izračunamo $32^{0{,}6} - 16^{0{,}75} + 1{,}44^{0{,}5} = 32^{3/5} - 16^{3/4} + 1{,}44^{1/2} = 2^3 - 2^3 + 1{,}2 = 1{,}2$.

A4. Veljati mora $x^2 - 8^{2/3} = 16$, od tod je $x^2 - 4 = 16$ oziroma $x^2 = 20$. To pomeni, da sta rešitvi $x_{1,2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$.

A5. Označimo zunanje kote trikotnika z α_1, β_1 in γ_1. Zaradi $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 2 : 3 : 4$ lahko pišemo $\alpha_1 = 2x$, $\beta_1 = 3x$ in $\gamma_1 = 4x$, nato pa je $2x + 3x + 4x = 360°$, od tod pa $x = 40°$. Imamo torej $\alpha_1 = 80°$, $\beta_1 = 120°$ in $\gamma_1 = 160°$, notranji koti pa so veliki $\alpha = 100°$, $\beta = 60°$ in $\gamma = 20°$. Velikosti notranjih kotov so v razmerju $5 : 3 : 1$.

A6. Število diagonal v n-kotniku je $\frac{n(n-3)}{2}$, zato pišemo $\frac{n(n-3)}{2} = 230$ in dobimo $n^2 - 3n - 460 = 0$, kar lahko zapišemo v obliki $(n - 23)(n + 20) = 0$. Smiselna rešitev je 23.

II. DEL

B1.

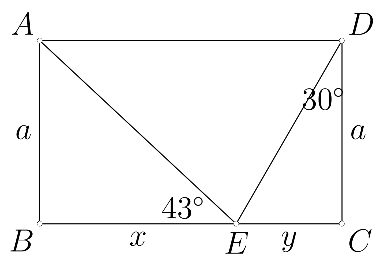
a) Smerna koeficienta premic sta $k_1 = m - 1$ in $k_2 = 2$. Upoštevamo pogoj za vzporednost $k_1 = k_2$ in dobimo enakost $m - 1 = 2$, iz česar izračunamo $m = 3$.

b) Upoštevamo $m = -3$ in dobimo enačbi funkcij $f(x) = -4x + 2$ in $g(x) = 2 + 2x$. Za izračun koordinat presečišča najprej izenačimo desni strani $-4x + 2 = 2 + 2x$ in izrazimo $x = 0$. Ustrezna ordinata presečišča je $y = 2$.

c) Najprej narišemo graf funkcije $g(x)$ z vidnimi odseki $m_0 = -1$ in $n_0 = 2$, nato pa del grafa pod abscisno osjo prezrcalimo čez to os.

Ureditev prve funkcije $f(x) = (m - 1)x + 2$ .... 1 točka
Iz enakosti $m - 1 = 2$ izračun $m = 3$ .... 1 točka
Zapis enačbe $-4x + 2 = 2 + 2x$ .... 1 točka
Izračunani koordinati $x = 0,\ y = 2$ .... 1 točka
Narisan graf $g(x)$ .... 1 točka
Narisan graf $|g(x)|$ .... 1 točka

B2. Narišemo ustrezno skico. Označimo $a = |AB| = |CD| = 700$ mm, $x = |BE|$ in $y = |EC|$. V pravokotnem trikotniku ABE velja $\tan 43° = \frac{a}{x}$, od tod izračunamo $x \doteq 750{,}66$ mm. V pravokotnem trikotniku DEC velja $\tan 30° = \frac{y}{a}$, od tod izračunamo $y \doteq 404{,}15$ mm. Dolžina stranice BC je enaka vsoti $x + y \doteq 1155$ mm.



Ustrezna skica .... 1 točka
Uporaba $\tan 43° = \frac{a}{x}$ .... 1 točka
Izračun $x = \frac{a}{\tan 43°} \doteq 750{,}66$ mm .... 1 točka
Uporaba $\tan 30° = \frac{y}{a}$ .... 1 točka
Izračun $y = a \cdot \tan 30° \doteq 404{,}15$ mm .... 1 točka
Rešitev $|BC| = x + y = 1155$ mm .... 1 točka

B3. Upoštevamo pravilo razširitve faktorjev na skupni korenski eksponent. Poenostavimo prvi faktor $\sqrt[12]{x\cdot\sqrt{y^{-6}}}=\sqrt[24]{x^2y^{-6}}$, nato drugi faktor $\sqrt[4]{x^3y^{-1}}=\sqrt[24]{x^{18}y^{-6}}$ in končno še delitelj $\sqrt[6]{x^{\frac{1}{2}}y\cdot\sqrt{y}}=\sqrt[24]{x^2y^6}$. Izraz uredimo, dobimo $\sqrt[24]{x^{18}y^{-18}}$, kar poenostavimo v $\sqrt[4]{x^3y^{-3}}$. Rezultat zapišemo s potenco: $(\frac{x}{y})^{\frac{3}{4}}$.

Uredimo prvi faktor $\sqrt[12]{x\cdot\sqrt{y^{-6}}}=\sqrt[24]{x^2y^{-6}}$ .... 1 točka
Uredimo drugi faktor $\sqrt[4]{x^3y^{-1}}=\sqrt[24]{x^{18}y^{-6}}$ .... 1 točka
Uredimo delitelj $\sqrt[6]{x^{\frac{1}{2}}y\cdot\sqrt{y}}=\sqrt[24]{x^2y^6}$ .... 1 točka
Uredimo izraz $\sqrt[24]{x^{18}y^{-18}}$ .... 1 točka
Krajšanje $\sqrt[4]{x^3y^{-3}}$ .... 1 točka
Zapis s potenco $(\frac{x}{y})^{\frac{3}{4}}$ .... 1 točka

B4. Uporabimo formulo za izračun razdalje med točkama $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Vstavimo podatke in dobimo $\sqrt{(0-7)^2+(y-1)^2}=5\sqrt{2}$. Po kvadriranju dobimo $49+y^2-2y+1=50$, uredimo v $y^2-2y=0$ in levo stran razstavimo: $y(y-2)=0$. Dobimo rešitvi $y_1=0$ in $y_2=2$.

Nastavljena enačba $d(A,B)=5\sqrt{2}$ .... 1 točka
Vstavljeni koordinati $\sqrt{(0-7)^2+(y-1)^2}=5\sqrt{2}$ .... 1 točka
Poenostavitev do oblike $49+y^2-2y+1=50$ .... 1 + 1 točka
Izračunani ordinati $y_1=0$ in $y_2=2$ .... 1 + 1 točka

Tretji letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
D	A	B	A	D	C

A1. Iz $x^2-4x+5=-5x+5$ sledi $x^2+x=0$, odtod pa dobimo dve rešitvi $x_1=0$ in $x_2=-1$. Ustrezni ordinati sta $y_1=5$ in $y_2=10$. Presečišči sta torej $T_1(0,5)$ in $T_2(-1,10)$.

A2. Koordinate točk A in B vstavimo v enačbo parabole. Dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama: $-3=a+c$, $3=4a+c$. Sistem rešimo in dobimo rešitev $a=2$ in $c=-5$.

A3. Vse navedene funkcije, razen funkcije pod (B), so potenčne, funkcija $f(x)=3^x+\sqrt{2}$ je eksponentna.

A4. Eksponentno enačbo preuredimo v $3^{2x+5}=3^2$. Upoštevamo enakost eksponentov $2x+5=2$, od tod pa dobimo rešitev $x=-\frac{3}{2}$.

A5. Preverimo, da izmed navedenih trditev velja le $f(1)\cdot g(\pi^2)>0$.

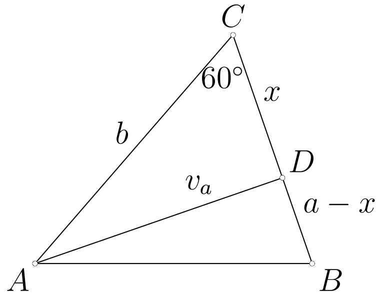
A6. Osenčen je tisti del kroga s polmerom 5 (polovica diagonale pravokotnika), ki ni pokrit s pravokotnikom. Ploščina osenčenega dela je $5^2\pi-8\cdot 6=25\pi-48$.

II. DEL

B1.

a) Narišemo skico ter označimo dane podatke a, b, γ in iskano t_a. Razberemo, da lahko uporabimo kosinisni izrek $t_a^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b \cdot \cos\gamma$ in izračunamo dolžino težiščnice $t_a = \sqrt{19}$.

b) Na skici označimo v_a in nožišče D. Označimo npr. $|CD| = x$. V pravokotnem trikotniku CAD velja $\cos\gamma = \frac{x}{b}$. Iz te zveze izrazimo $x = b \cdot \cos\gamma$ in izračunamo $x = \frac{5}{2}$. Tako je $|BD| = a - x = \frac{3}{2}$ in imamo razmerje $x : (a - x) = 5 : 3$.



Uporaba kosinusnega izreka $t_a^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b \cdot \cos\gamma$ . . 1 točka
Vstavitev ustreznih podatkov $t_a^2 = 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5\frac{1}{2}$. 1 točka
Izračun $t_a = \sqrt{19}$ . . . . 1 točka
Izračun $x = b \cdot \cos\gamma = \frac{5}{2}$ . . . . 1 točka
Izračun $a - x = \frac{3}{2}$ . . . . 1 točka
Zapis razmerja $x : (a - x) = 5 : 3$ . . . . 1 točka

B2. Ker je točka A presečišče grafov obeh funkcij, leži na obeh grafih in ustreza enakosti $y = \log_2(3 + 1) - 1 = 1$. Tako sta znani koordinati točke A: $(3, 1)$. Ker ta točka leži tudi na grafu linearne funkcije, velja enakost $1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + n$. Iz te enakosti izračunamo vrednost konstante $n = 2$.

Upoštevanje abscise točke A $y = \log_2(3 + 1) - 1$ . . . . 1 točka
Izračun $y = \log_2 4 = 2$ . . . . 1 točka
Izračun ordinate $y = 2 - 1 = 1$ . . . . 1 točka
Zapis točke $A(3, 1)$ . . . . 1 točka
Zapis enakosti $1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + n$ . . . . 1 točka
Izračun $n = 2$ . . . . 1 točka

B3. Upoštevamo enakost in dobimo enačbo $3^x = 3^{x-1} + 6$, ki jo preuredimo v $3^x - 3^{x-1} = 6$ in izpostavimo skupni faktor $3^{x-1}(3 - 1) = 6$. Od tod je $3^{x-1} = 3$, upoštevamo enakost eksponentov $x - 1 = 1$ in dobimo rešitev $x = 2$.

Nastavitev enačbe $3^x = 3^{x-1} + 6$ . . . . 1 točka
Ureditev enačbe $3^x - 3^{x-1} = 6$ . . . . 1 točka
Izpostavitev skupnega faktorja $3^{x-1}(3 - 1) = 6$ . . . . 1 točka
Zapis enakosti $3^{x-1} = 3$ . . . . 1 točka
Upoštevanje enakosti eksponentov $x - 1 = 1$ . . . . 1 točka
Rešitev $x = 2$ . . . . 1 točka

B4. Naj bo število opic v drugi kletki x in število opic v prvi kletki $x+2$. Oskrbnik vsaki skupini opic razdeli 48 banan. V drugi kletki dobi vsaka opica $\frac{48}{x}$ banan, v prvi kletki pa $\frac{48}{x+2}$ banan. Nastavimo enačbo $\frac{48}{x} = \frac{48}{x+2} + 4$, ki jo preuredimo v kvadratno enačbo $x^2 + 2x - 24 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_1 = -6$ in $x_2 = 4$, a je le $x = 4$ ustrezna. V prvi kletki je 6 opic, v drugi pa so 4 opice.

Uporaba npr. $x =$ število opic v 2. kletki in $x + 2 =$ število opic v 1. kletki .... 1 točka
Nastavitev enačbe $\frac{48}{x} = \frac{48}{x+2} + 4$ .... $1 + 1$ točka
Ureditev enačbe $x^2 + 2x - 24 = 0$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $x_1 = -6$ in $x_2 = 4$ .... 1 točka
Odgovor: V prvi kletki je 6 opic, v drugi pa so 4 opice. .... 1 točka

Četrti letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	C	E	C	A	C

A1. Zapišimo $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Ker doseže funkcija $g(x) = \sin 2x$ največjo vrednost 1, doseže funkcija $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ največjo vrednost $\frac{1}{2}$.

A2. Enačbo preuredimo v $x^4 - x^2 = 0$ in izpostavimo skupni faktor $x^2(x^2 - 1) = 0$. Prva rešitev je $x_1 = 0$, drugi dve pa dobimo iz $x^2 - 1 = 0$ in sta $x_2 = 1$ in $x_3 = -1$. Torej ima enačba tri različne rešitve.

A3. Racionalna funkcija ima toliko ničel, kolikor jih ima polinom v števcu, saj so vse ničle različne, zato trditvi (A) in (B) nista pravilni. Niti trditvi (C) in (D) ne veljata za poljubno izbrane polinome. Trditev (E) velja.

A4. Kvadratni koren je definiran, če je izraz pod korenom nenegativen, torej mora veljati $\frac{(x-1)^2}{2-x} \geq 0$. Števec tega ulomka je nenegativen za vsak realen x, zato o obstoju korena odloča imenovalec. Ta pa ne sme biti enak 0, zato mora veljati $2 - x > 0$, od koder sledi $x < 2$.

A5. Uporabimo formulo za izračun trinajstega člena geometrijskega zaporedja $a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$ in vstavimo podatke: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[10]{3}^{12}$. Oba faktorja damo pod korenom iste stopnje in dobimo $\sqrt[10]{3^5 \cdot 3^{12}} = \sqrt[10]{3^{10} \cdot 3^7} = 3\sqrt[10]{3^7}$.

A6. Ugotovimo, da je $\log n^3 - \log n = 3 \log n - \log n = 2 \log n$ in $\log n^5 - \log n^3 = 5 \log n - 3 \log n = 2 \log n$, torej je zaporedje v primeru (C) aritmetično. Druga zaporedja niso aritmetična.

II. DEL

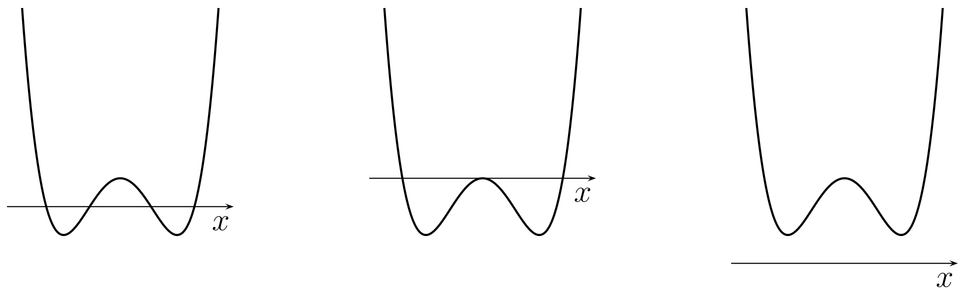
B1. Zanima nas vrednost funkcije f v točki x_1, to je $f(x_1) = \cos(x_1 - \frac{7\pi}{6})$. Uporabimo adicijski izrek $\cos(x_1 - \frac{7\pi}{6}) = \cos x_1 \cos \frac{7\pi}{6} + \sin x_1 \sin \frac{7\pi}{6}$. Uporabimo prehod na oster kot in izračunamo $\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. Izračunamo še $\sin x_1 = \sqrt{1 - \cos^2 x_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Dobljene podatke uporabimo za izračun $-\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$.

Zapis adicijskega izreka $\cos(x_1 - \frac{7\pi}{6}) = \cos x_1 \cos \frac{7\pi}{6} + \sin x_1 \sin \frac{7\pi}{6}$ .... 1 točka
Izračun $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 1 točka
Izračun $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Izračun $\sin x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .... 1 točka
Poenostavljen izraz .... $1 + 1$ točka

B2. Vrsto poenostavimo do oblike $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{19}$. Ugotovimo, da so seštevanci členi geometrijskega zaporedja, torej je to vsota dvajsetčlenega geometrijskega zaporedja. Iz zapisa razberemo $a_1 = 1$, $q = 2$. Uporabimo formulo za vsoto n členov geometrijskega zaporedja $s_n = a_1 \cdot \frac{\cdot q^n-1}{q-1}$. Vstavimo ustrezne podatke in dobimo $s_{20} = 1 \cdot \frac{2^{20}-1}{2-1} = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575$.

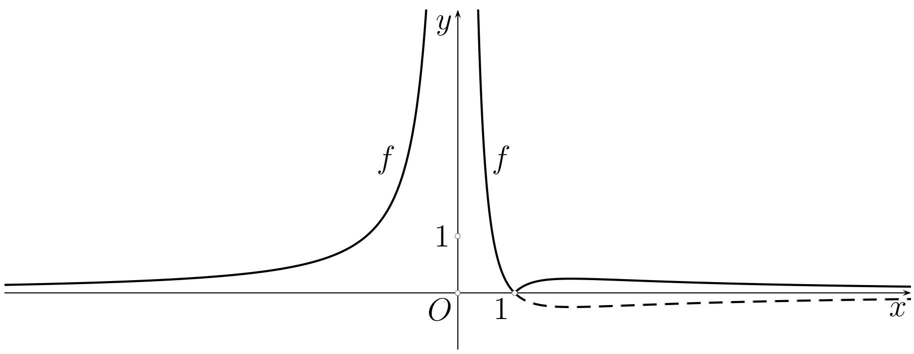
Poenostavitev $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{19}$ .... 1 točka
Upoštevanje oz. ugotovitev, da so to členi geometrijskega zaporedja .... 1 točka
Upoštevanje ali zapis $a_1 = 1$, $q = 2$ .... 1 točka
Določitev števila členov $n = 20$ .... 1 točka
Zapis vsote $s_{20} = 1 \cdot \frac{2^{20}-1}{2-1}$ .... 1 točka
Izračun $s_{20} = 2^{20} - 1$ .... 1 točka

B3. Polinom ima štiri realne ničle, če seka abscisno os 4 krat. Polinom ima 1 ničlo sode stopnje, če se abscisne osi 1 krat dotika. (Tedaj ima tudi dve ničli stopnje 1, saj seka graf še 2 krat.) Polinom nima nobene realne ničle, če je ves graf nad osjo x, torej abscisne osi nikjer ne seka.



Vsaka pravilno narisana abscisna os .... 2 točki

B4. Zapis funkcije preoblikujemo v $f(x) = \left|\frac{1-x}{x^2}\right|$. Analiziramo racionalno funkcijo $g(x) = \frac{1-x}{x^2}$. Ta ima ničlo prve stopnje v $x = 1$, pol druge stopnje v $x = 0$ in vodoravno asimptoto $y = 0$. Za risanje grafa si lahko pomagamo še z iskanjem nekaj točk na grafu funkcije g, npr. $(2, -\frac{1}{4})$, $(3, -\frac{2}{9})$, $(-1, 2)$ in $(-2, \frac{3}{4})$. Končno narišemo še graf funkcije f: ta se ujema z grafom funkcije g na intervalu $(-\infty, 1]$, na intervalu $(1, \infty)$ pa je simetričen grafu funkcije g glede na abscisno os.



Urejen zapis funkcije $f(x) = \left|\frac{1-x}{x^2}\right|$ .... 1 točka
Zapis ničle, polov, asimptote (vsaj dva zapisa) .... 1 točka
Graf funkcije $g(x)$ (vsaka veja) .... 1 + 1 točka
Graf funkcije $f(x) = \left|\frac{1-x}{x^2}\right|$ (natančno narisano zrcaljenje) .... 1 točka
Narisana končna rešitev .... 1 točka