Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

Tekmovanje študentov v znanju matematike za Vegova priznanja

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Za reševanje imaš na voljo 90 minut. Odgovore zapiši v gornjo preglednico. Za vsak pravilen odgovor dobiš toliko točk, kot je naloga vredna. Za vsak nepravilen odgovor ti odštejemo četrtino točk, kot je naloga vredna. Če pa pustiš polje v preglednici prazno, dobiš 0 točk. Da bi se izognili negativnemu končnemu dosežku, ti priznamo začetnih 24 točk.

Naloge, vredne 3 točke

1. Koliko je vrednost izraza $\left(2+\frac{1}{4+\frac{1}{6+\frac{1}{8}}}\right)\cdot\frac{1}{2}$?

(**A**) $1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$ (**B**) $1+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}}$ (**C**) $1+\frac{1}{8+\frac{1}{3+\frac{1}{16}}}$ (**D**) $1+\frac{1}{6+\frac{1}{4+\frac{1}{10}}}$ (**E**) $1+\frac{1}{8+\frac{1}{12+\frac{1}{16}}}$

2. Rok ima uro, pri kateri se kazalca premikata s pravo hitrostjo, a v napačno smer. Ob 12.00 uri je Rokova ura kazala pravi čas. Kolikokrat v naslednjih 24 urah bo Rokova ura kazala pravi čas?

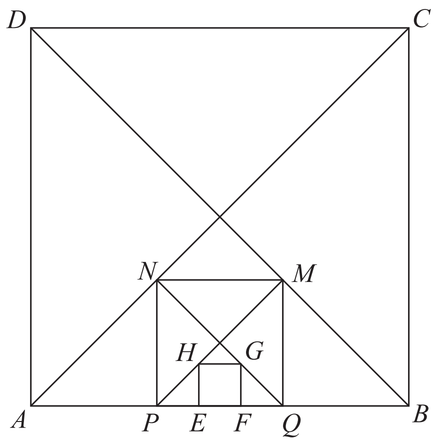
(**A**) 2-krat (**B**) 4-krat (**C**) 6-krat (**D**) 12-krat (**E**) 24-krat

3. Janez bi rad obesil mokra oblačila. Nekaj mokrih oblačil že visi na vrvi, med temi oblačili pa so prazni prostori različnih dolžin. Janez bi rad zapolnil s perilom čim več vrvi. Kateri izmed naslednjih postopkov zagotovo ne pokvari končne optimalne razporeditve obešenih oblačil?

(**A**) Najprej obesi najožje oblačilo.
(**B**) Najprej obesi najširše oblačilo.
(**C**) Najprej čim bolj zapolni najširši prazen prostor na vrvi.
(**D**) Najprej čim bolj zapolni najožji prazen prostor na vrvi.
(**E**) Obesi kos perila na prazno mesto na vrvi, kamor se natanko prilega.

4. Petra je po vrsti risala vedno manjše kvadrate (glej sliko). Kolikšno je razmerje ploščin kvadrata $ABCD$ in kvadrata $EHGF$?

(**A**) $\frac{1}{9}$ (**B**) $\frac{1}{27}$ (**C**) $\frac{1}{81}$ (**D**) $\frac{1}{64}$ (**E**) $\frac{1}{32}$

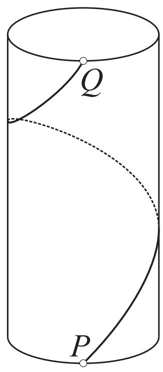


5. Maja namerava kupiti računalnik. V trgovini A so ji pripravljeni dati 25 % popusta na objavljeno ceno proizvajalca, v trgovini B pa ji lahko dajo 15 % popusta na objavljeno ceno proizvajalca in nato še dodatnih 90 evrov popusta. Maja bo plačala 15 evrov manj, če bo kupila računalnik v trgovini B, kot če bi ga kupila v trgovini A. Koliko evrov je objavljena cena proizvajalca računalnika?

(**A**) 750 (**B**) 900 (**C**) 1000 (**D**) 1050 (**E**) 1500

6. Jože, Polde in Rudi so se prijavili na maraton. Navijačice Angela, Antonija, Amalija in Anica so pred tekmo napovedale končni vrstni red. Angela: "Zmagal bo Jože ali Polde." Antonija: "Če bo Polde drugi, bo zmagal Rudi." Amalija: "Če bo Polde tretji, Jože ne bo zmagal." Anica: "Polde ali Rudi bo drugi." Po tekmi se je izkazalo, da so bile vse 4 izjave pravilne. Kakšen je bil vrstni red od najboljšega do najslabšega?

(**A**) Jože, Polde, Rudi (**B**) Jože, Rudi, Polde (**C**) Rudi, Polde, Jože
(**D**) Polde, Rudi, Jože (**E**) Nemogoče je določiti.



7. Okrog valja s polmerom 1 cm in višino 4 cm je enkrat navita vrvica od točke P na spodnjem robu do točke Q, ki je navpično nad P, na zgornjem robu valja (glej sliko). Koliko centimetrov je najmanjša možna dolžina vrvice?

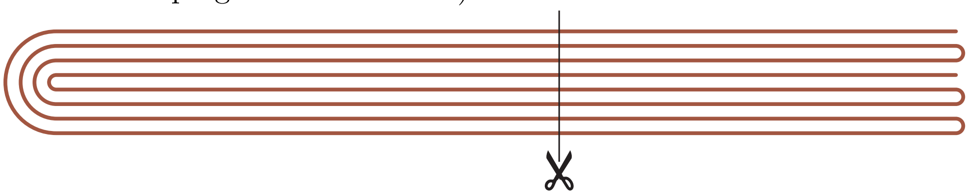
(**A**) 2π (**B**) 4π (**C**) $\pi\sqrt{2}$ (**D**) $2\sqrt{\pi^2+4}$ (**E**) $\sqrt{2\pi^2+4}$

8. Koliko je razdalja med središčema 2 mejnih ploskev pravilnega tetraedra z robom dolžine a?

(**A**) $\frac{2a}{3}$ (**B**) $a\sqrt{3}$ (**C**) $\frac{a}{3}$ (**D**) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (**E**) a

Naloge, vredne 4 točke

9. Nik je trikrat zapored prepognil vrv na polovici, nato pa tako zloženo vrv na 1 mestu prerezal (glej sliko, dolžino vrvi v pregibih zanemarimo)



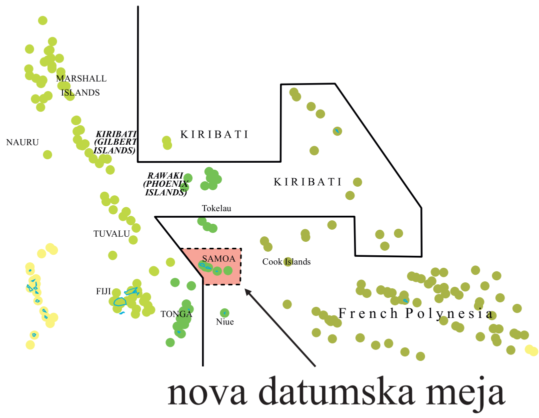
1 izmed tako dobljenih kosov vrvi je bil dolg 4 m, 1 pa 12 m. Katero izmed navedenih števil ne more biti dolžina v metrih za noben kos vrvi, ki ga je na tak način dobil Nik?

(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 24
(**E**) Vse naštete dolžine so možne.

10. Naj bosta $a, b > 0$ in naj bo $a^{2x} - b^{2x} - 2(ab)^x = 0$. Koliko je vrednost spremenljivke x?

(**A**) $\frac{1}{\ln\frac{a}{b}}$ (**B**) $\frac{\sqrt{2}}{\ln\frac{a}{b}}$ (**C**) $\ln\frac{a}{b}$ (**D**) $\frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\ln\frac{a}{b}}$ (**E**) $\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{\ln ab}$

11. Otok Samoa je 29. decembra 2011 ob 24.00, ne da bi spremenil časovni pas, premaknil datumsko mejo, tako da se je premaknil z območja vzhodno od datumske meje v območje zahodno od datumske meje (glej sliko). Kaj se je zgodilo s koledarjem na otoku Samoa?



(**A**) 2 dneva sta imela datum 29. december 2011.

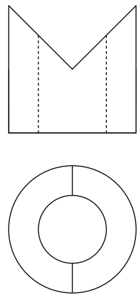
(**B**) 1 dan je bil datum 29. december 2011 in 1 dan datum 30. december 2011.

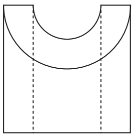
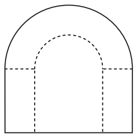
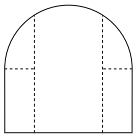
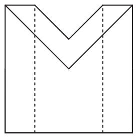
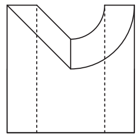
(**C**) Noben dan ni bil datum 29. december 2011.

(**D**) 2 dneva je bil datum 30. december 2011.

(**E**) Noben dan ni bil datum 30. december 2011.

12. Matjaž je narisal skico figure, kot se vidi od spredaj in od zgoraj, črtkane črte so nevidne (glej desni sliki). Na kateri izmed spodnjih skic je prikazana figura, kot se vidi od strani?

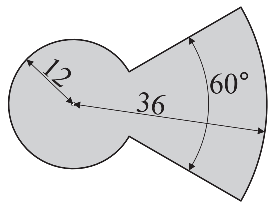


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

13. Vsota 2 naravnih števil a in b je enaka 125. Katera izmed enakosti lahko velja za neko naravno število k?

(**A**) $2^a \cdot 3^b = 12^k$ (**B**) $2^a \cdot 3^b = 18^k$ (**C**) $2^a \cdot 3^b = 36^k$
(**D**) $2^a \cdot 3^b = 72^k$ (**E**) Nobena izmed navedenih enakosti.

14. Violeta je narisala 2 koncentrični krožnici, polmer manjše je 12 cm, polmer večje pa 36 cm. Nato je narisala še krožni izsek večjega kroga za kot 60° in del območja osenčila (glej sliko). Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina osenčenega območja?

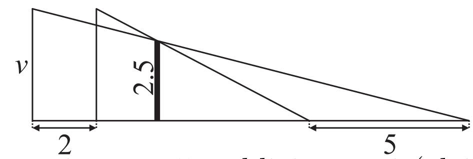


(**A**) 356π (**B**) 346π (**C**) 528π (**D**) 336π (**E**) 526π

15. Matej je stal pred ogledalom, a se ni v celoti videl v ogledalu. Vrh njegove glave je bil ravno na vrhu ogledala, tako da je videl glavo v celoti, nog pod koleni pa ni videl (glej sliko) Kaj lahko stori, da se bo v celoti videl v ogledalu, ko bo stal pred njim?

(**A**) Obesi ogledalo višje na steno. (**B**) Obesi ogledalo nižje na steno.
(**C**) Se premakne bližje k ogledalu. (**D**) Se premakne bolj stran od ogledala.
(**E**) Nič od naštetega.

16. Na šolski odbojkarski tekmi je bila mreža na višini 2.5 m. Odbojkar Jan je udaril žogo, ki je poletela naravnost tik nad mrežo v igrišče na nasprotni strani mreže. Če bi se Jan za 2 m približal mreži in na isti višini udaril žogo, ki bi poletela naravnost tik nad mrežo, bi žoga priletela v igrišče na drugi strani mreže 5 m bližje mreži (glej sliko). Koliko metrov nad tlemi je Jan udaril žogo?



(**A**) 3 (**B**) 3.5 (**C**) 4 (**D**) 4.5 (**E**) 5

Naloge, vredne 5 točk

17. Robert je v 3 dneh prebral knjigo s 630 stranmi: 1. dan je prebral $\frac{1}{3}$ strani v knjigi, vsota števil strani, ki jih je prebral 2. dan, je 4410. Koliko strani je prebral Robert 3. dan?

(**A**) 210 (**B**) 211 (**C**) 230 (**D**) 390 (**E**) 400

18. Ribiči Emil, ki ima škornje velikosti 46, Edo, ki ima škornje velikosti 44, in Erik, ki ima škornje velikosti 42, so na večdnevnem ribolovu bivali v istem šotoru. Takoj, ko se je zbudil, se je odpravil vsak izmed njih lovit ribe. Pri tem je obul škornje prave velikosti ali prevelike škornje, premajhnih pa ne. Če so v šotoru ostali samo še premajhni škornji zanj, potem ribič ni šel lovit rib. Kolikšna je verjetnost, da natanko 1 ribič ne gre lovit rib?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{7}{12}$ (**C**) $\frac{13}{24}$ (**D**) $\frac{37}{72}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

19. Naj bo $A_1A_2A_3\ldots A_{1000}$ pravilni 1000-kotnik in naj bo M presečišče daljic A_1A_{501} in $A_{201}A_{701}$. Koliko stopinj je velik kot A_1MA_{201}?

(**A**) 17.64 (**B**) 18 (**C**) 36 (**D**) 72

(**E**) Nič od naštetega.

20. Lastnik otoka je prebivalcem otoka sporočil, da lahko še naprej živijo na otoku tisti prebivalci, ki bodo spoštovali naslednja 3 pravila:

1. Na zemljevid otoka je narisal ravno črto in povedal, da morajo vsi, ki imajo radi sonce, živeti na eni strani črte, vsi, ki ne marajo sonca, pa na drugi strani črte.

2. Na zemljevid je narisal še 2. ravno črto in povedal, da morajo vsi, ki imajo radi čokolado, živeti na eni strani 2. črte, vsi, ki ne marajo čokolade, pa na drugi strani črte.

3. Na zemljevid je narisal še 3. ravno črto in povedal, da morajo vsi, ki so plešasti, živeti na eni strani 3. črte, vsi, ki niso plešasti, pa na 2. strani črte. Ljubo, plešasti ljubitelj čokolade in sonca je ugotovil, da bo lahko ostal, kjer je živel doslej, ne bo pa mogel na obalo. Bo lahko Dragica iz sosednje vasi, ki ne mara ne sonca in ne čokolade in ima dolge lase ostala v svoji vasi?

(**A**) Da.

(**B**) Odvisno od tega, na katerem delu otoka živi.

(**C**) Ne, lahko pa se bo preselila na obalo.

(**D**) Ne, lahko pa se bo preselila v notranjost otoka.

(**E**) Ne, morala bo zapustiti otok.

21. Kolo na sprednji strani skiroja se povsem obrabi po 300 km vožnje, kolo na zadnji strani skiroja pa po 500 km vožnje. Luka je kupil nov skiro. Po koliko kilometrih vožnje mora Luka zamenjati položaja koles na sprednji in zadnji strani skiroja, da se bosta obe kolesi povsem obrabili istočasno?

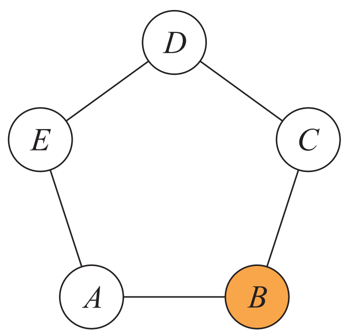
(**A**) 62.5 (**B**) 175 (**C**) 187.5 (**D**) 200 (**E**) 212.5

22. Prijatelja Aleš in Jure sta se odločila, da bosta ugotovila dolžino tovornega vlaka, ki se je s konstantno hitrostjo peljal mimo njiju. Ko je bil sprednji del vlaka pri Alešu in Juretu, je Aleš začel hoditi v isto smer, Jure pa v nasprotno smer, kot se je premikal vlak. Prijatelja sta hodila z enako hitrostjo, vsak izmed njiju pa se je ustavil, ko je šel mimo njega zadnji del vlaka. Aleš je prehodil 45 m, Jure pa 30 m. Koliko metrov je bil dolg tovorni vlak?

(**A**) 75 (**B**) 150 (**C**) 180 (**D**) 225

(**E**) Nemogoče je določiti.

23. Kenguru Goran je na začetku na polju A. V vsakem koraku lahko s kateregakoli polja, razen polja B, skoči na katerokoli od 2 sosednjih polj. Če kenguru skoči na polje B, preneha skakati. Na koliko načinov lahko kenguru Goran pride s polja A na polje B v natanko 14 skokih?



(**A**) 128 (**B**) 144 (**C**) 2^{13} (**D**) 2^{12}

(**E**) Nobeno od naštetih števil.

24. Za koliko naravnih števil n, je izraz $3^n + 10n$ popolni kvadrat?

(**A**) 0 (**B**) 1

(**C**) 2 (**D**) Za več kot 2, a končno mnogo števil.

(**E**) Za neskončno mnogo števil.