

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2020/2021

1. skupina: Poslovna matematika

Sreda, 17. marec 2021

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

Šivilja sešije 96 zaščitnih mask, če šiva 3 dni po osem ur na dan. Masko sešije v 15 minutah.

- a) Koliko dni bi morale šivati tri šivilje, če šivajo 7 ur na dan, če se, zaradi dodatne zaščitne podloge, čas šivanja ene maske podaljša za 5 minut in morajo sešiti 315 zaščitnih mask?

3 točke

- b) Koliko šivilj bi moralo še dodatno šivati zaščitne maske, če se zaradi velikega povpraševanja po zaščitnih maskah količina poveča na 2970, šivilje šivajo 5 dni po 9 ur na dan, za eno masko potrebujejo 12 minut in so za 10 % bolj produktivne?

4 točke

2. naloga

Nagradni sklad športnega društva znaša 9.100,00 EUR. Za organizacijo tekmovanja društvo nameni $\frac{1}{7}$ nagradnega sklada, ostanek pa za nagrade tekmovalcem.

Sredstva za nagrade razdeli takole: $\frac{3}{5}$ nagradnega sklada nameni za tri prvouvrščene tekmovalce, ostanek pa za tekmovalce, ki so zasedli četrto do sedmo mesto.

Med prve tri razdeli nagrado tako, da prvi dobi 2-krat toliko kot drugi, tretji pa 200,00 EUR manj kot drugi. Med preostale štiri tekmovalce pripadajoči znesek nagrade razdeli tako, da vsak naslednji tekmovalec dobi 100,00 EUR manj od prejšnjega.

Koliko dobi vsak nagrajeni tekmovalec?

7 točk

3. naloga

V pekarni Dobri kruh pečejo različne vrste kruha.

- a) Izračunajte dnevno količino spečenega kruha, če spečejo 42 % črnega kruha, 14 % belega kruha, 8 % rženega kruha, 6 % ovsenega kruha, 12 % koruznega kruha, 2 % čebulnega kruha in 168 kg polnozrnatega kruha, kar predstavlja 16 %. Izračune vpišite v tabelo.

3 točke

Vrsta kruha	Odstotki	Količina v kg
Črni kruh		
Beli kruh		
Rženi kruh		
Ovseni kruh		
Koruzni kruh		
Čebulni kruh		
Polnozrnati kruh		
Skupaj		

- b) Zaradi bližajočih se praznikov se bo povpraševanje po kruhu povečalo. Tako bodo dnevno količino belega kruha povečali za 48 kg, ponudili bodo še dve vrsti kruha, in sicer sadnega in pirinega. Sadnega bodo spekli 60 kg, pirinega pa 30 kg. Črnega kruha bodo spekli 630 kg, kar predstavlja enak odstotek kot v običajnih dneh. Količino rženega kruha bodo povečali za 2 %, polnozrnatega kruha pa za 1 %. Ovsenega kruha bodo spekli 3 %, koruznega 8 % in čebulnega 1 % od celotne količine.

Izračunajte celotno količino spečenega kruha, količine in odstotke za posamezne vrste kruha.

3 točke

Vrsta kruha	Odstotki	Količina v kg
Črni kruh		
Beli kruh		
Rženi kruh		
Ovseni kruh		
Koruzni kruh		
Čebulni kruh		
Polnozrnati kruh		
Sadni kruh		
Pirin kruh		
Skupaj		

- c) Izračunajte tudi, za koliko odstotkov je bila praznična peka večja od običajne in zapišite odgovor?

1 točka

4. naloga

Jasna je prodala avto za 8.200,00 EUR. 20 % kupnine je posodila bratu, ostanek pa je vložila na banko. Banka obrestuje vloge po navadnem obrestnem računu.

- a) Koliko je Jasna privarčevala na banki (obresti) in s kolikšnim zneskom razpolaga po 18 mesecih, če je letna obrestna mera 2,2 %?

3 točke

- b) Brat ji je po enem letu vrnil 1.700,00 EUR. Za koliko odstotnih točk višja ali nižja je bila obrestna mera za dano posojilo bratu od tiste, ki jo ponuja banka?

2 točki

- c) Jasna je ves denar (1.700,00 EUR), ki ji ga je vrnil brat, za nekaj mesecev vložila na banko, ki obrestuje vloge po 3,32 % letni obrestni meri. Ob koncu vezave obeh vlog je prejela 8.500,00 EUR. Koliko mesecev se je obrestovala druga vloga?

2 točki



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2020/2021

2. skupina: Statistika

Sreda, 17. marec 2021

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Statistični urad RS (SURS) izda na svoji spletni strani stat.si letno več kot 700 objav z več kot 20 področij. S toliko področij namreč zbira podatke, ki jih analizira in pripravi za objavo. Kaj še pravi statistika o statistiki?

Na družbenih omrežjih je bilo objavljenih več kot 2.400 kratkih sporočil. SURS je čedalje bolj dejaven na družbenih omrežjih: na Twitterju objavlja od julija 2009, na Facebooku od novembra 2017, od oktobra 2020 pa tudi na Instagramu.

(Vir: <https://www.stat.si/StatWeb/News/Index/9377>)

Tabela 1: **Število objav Statističnega urada Republike Slovenije po vrstah družbenih omrežjih v letu 2020**

Vrsta družbenega omrežja	Število objav	Struktura v %
Twitter, slovenska različica	1.251	
Twitter, angleška različica	846	
Facebook	290	
Instagram	38	
Skupaj	2425	

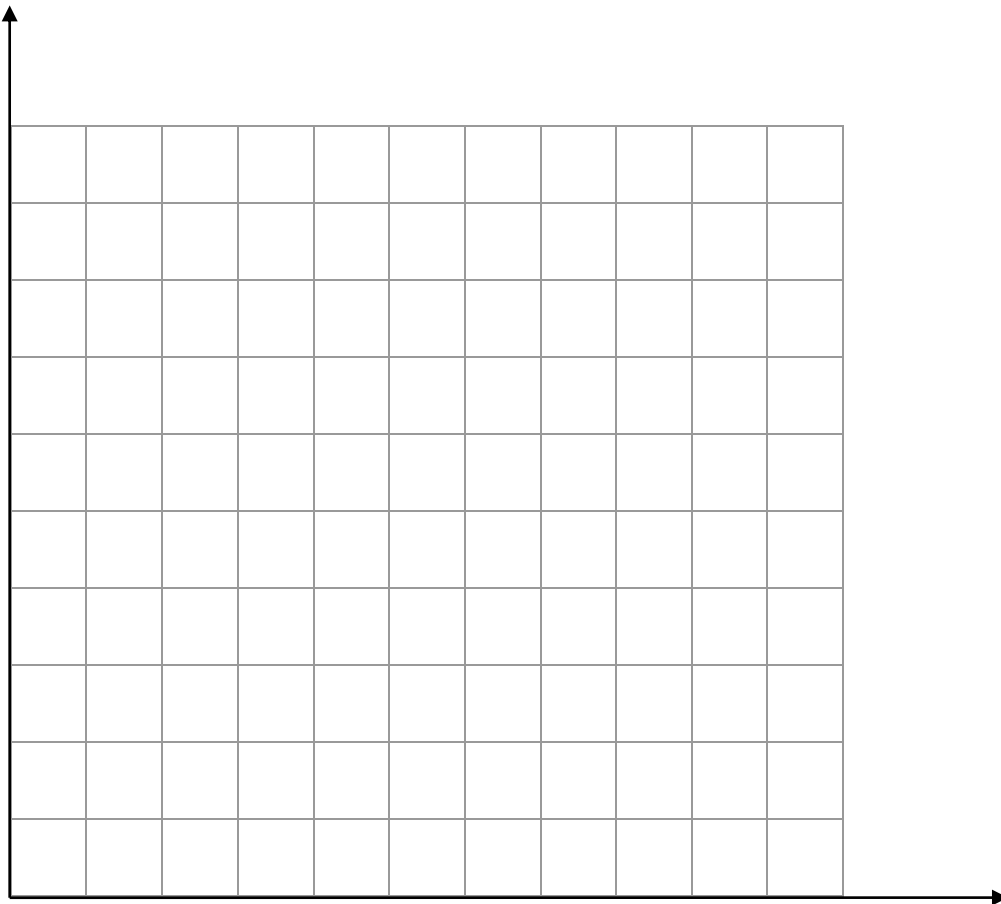
Vir: SURS, februar 2021

- a) Izračunajte strukturo objav Statističnega urada Republike Slovenije po vrsti družbenega omrežja v letu 2020. (Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno ter vpišite v tabelo 1.)

1 točka

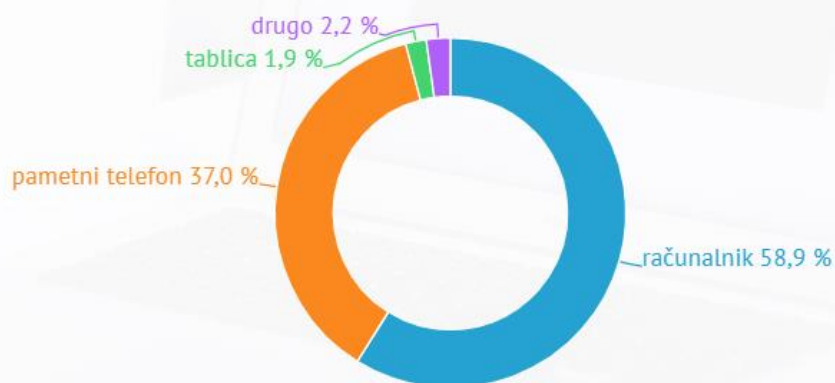
- b) Strukturo objav Statističnega urada Republike Slovenije po vrsti družbenega omrežja v letu 2020 prikažite grafično s strukturnim stolpcem.

3 točke



V 2020 so na SURS-ovi spletni strani zabeležili skoraj 640.000 obiskov. Ogljed strani je trajal povprečno 2 minuti in 35 sekund. Največkrat je bila stran obiskana v novembru. Za dostop do nje je največ obiskovalcev uporabilo računalnik. (Vir: <https://www.stat.si/StatWeb/News/Index/9377>)

Obiskovalci SURS-ove spletne strani glede na naprave, uporabljene za dostop do nje (v %), 2020



Vir: SURS

- c) Izračunajte, koliko obiskovalcev je dostopalo do spletnih strani Statističnega urada z računalnikom, pametnim telefonom ali tablico. (Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 2.)

2 točki

Tabela 2: **Obiskovalci SURS-ove spletne strani glede na naprave, uporabljene za dostop do nje v letu 2020**

Vrsta uporabljene naprave	Število obiskovalcev
Računalnik	
Pametni telefon	
Tablica	
Druge naprave	
Skupaj	640.000

- d) Za primer pod točko c opredelite statistično množico (populacijo) ter spremenljivko in vrsto statistične spremenljivke.

1 točka

2. NALOGA

Tabela 3: Osnovne značilnosti izbranih statističnih regij v Sloveniji v letu 2018

Statistična regija	Število članov na gospodinjstvo	Število delovno aktivnih prebivalcev	Število gospodinjstev	Število stanovanj
Pomurska	2,59	41.468	44.230	48.136
Podravska	2,39	126.593	134.815	137.647
Osrednjeslovenska	2,53	303.299	215.138	217.439
Obalno-kraška	2,42	48.754	47.230	55.266

Vir: SURS, januar 2021

a) Izračunajte število prebivalcev za izbrane statistične regije. (Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 4.)

2 točki

b) Izračunajte število delovno aktivnih prebivalcev na 100 prebivalcev za izbrane statistične regije. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 4.)

2 točki

c) Izračunajte število stanovanj na 1000 prebivalcev za izbrane statistične regije. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 4.)

2 točki

d) Izračunajte recipročni koeficient koeficientu pod točko c za Pomursko regijo.

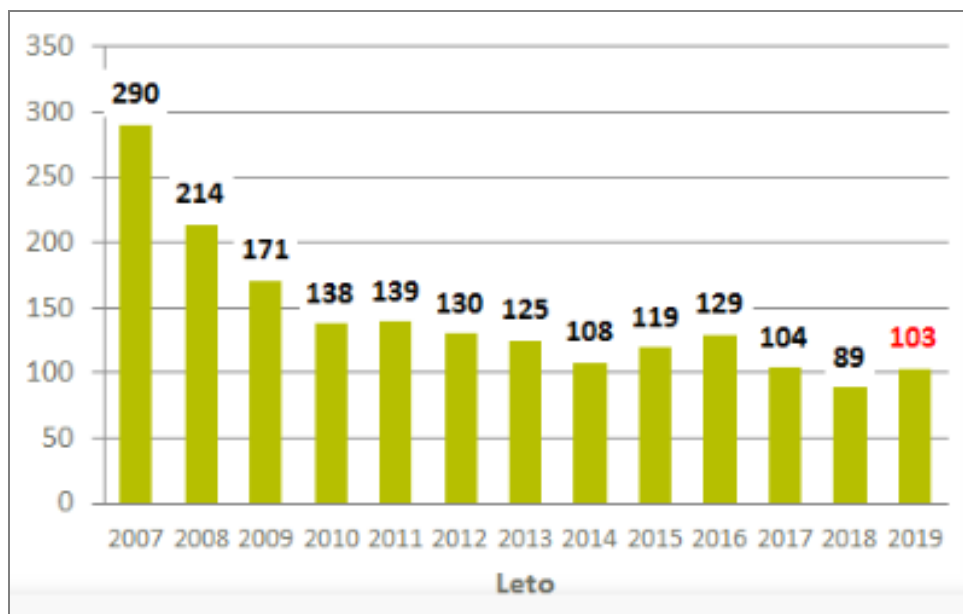
1 točka

Tabela 4: Izbrani kazalci za statistične regije v Sloveniji v letu 2018

Statistična regija	a)	b)	c)
Pomurska			
Podravska			
Osrednjeslovenska			
Obalno-kraška			

3. NALOGA

Glasbena industrija v Evropi in Veliki Britaniji podpira kar dva milijona delovnih mest, britanska raziskava pa je pokazala, da gospodarstvu prinaša 82 milijard evrov letno. Zaradi trenutne koronakrize se je delo v glasbeni industriji zmanjšalo kar za 75 odstotkov. (Vir: <https://www.ehonovice.si/aktualno/glasbena-industrija-je-v-krizi-kaksne-so-resitve-za-prihodnost/>)



Slika 1: Število izdanih pesmi glasbene založbe »My music« v državi Izmišljeni

Vir: Izmišljeni podatki.

- a) Izračunajte indekse s stalno osnovo 2007 za število izdanih pesmi založbe "My music". (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

2 točki

Tabela 1: Indeksi s stalno osnovo 2007 za število izdanih pesmi založbe "My music" v državi Izmišljeni za obdobje od leta 2007 do 2013

Leto	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
$I_{j/2007}$							

- b) Komentirajte izračunani indeks za leto 2013.

1 točka

- c) Izračunajte stopnje rasti števila izdanih pesmi založbe "My music" za obdobje od leta 2013 do 2019.

2 točki

Tabela 6: **Stopnje rasti števila izdanih pesmi založbe "My music" v državi Izmišljeni za obdobje od leta 2013 do 2019**

Leto	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
S_j							

- d) Dopolnite besedilo:

Koeficient rasti za leto 2017 je znašal _____.

Če veste, da je bilo leta 2020 izdanih samo 67 pesmi v opazovani glasbeni založbi, bi moral biti koeficient rasti tega leta _____.

2 točki

4. NALOGATabela 7: **Dijaki 4.h oddelka po oddaljenosti od doma do šole na izbrani srednji šoli v Sloveniji v letu 2020/2021**

Oddaljenost od doma do šole v km	Število dijakov	
do 2	5	
nad 2 do 4	8	
nad 4 do 6	6	
nad 6 do 8	5	
nad 8 do 10	4	
nad 10	2	
Skupaj	30	

a) Za podatke v tabeli 7 izračunajte relativne frekvence. (Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.)

2 točki

b) Koliko znaša kumulativa frekvenc 3. razreda in kaj nam pove?

2 točki

c) Koliko odstotkov dijakov je od doma do šole oddaljenih nad 6 do 10 kilometrov?

1 točka

d) Koliko znaša kumulativa relativnih frekvenc v 4. razredu?

1 točka

e) Obkrožite pravilen odgovor, ki pojasnjuje relativno frekvenco 3. razreda:

- A 6 dijakov je bilo oddaljenih od doma do šole nad 4 do 6 km.
- B Delež dijakov, ki so bili oddaljeni od doma do šole nad 4 do 6 km, je 20 %.
- C Delež dijakov, ki so bili oddaljeni od doma do šole do 6 km, je 20 %.
- D Odstotek dijakov, ki so bili oddaljeni od doma do šole nad 4 do 6 km, je 20 %.

1 točka

3. SKUPINA

Ime in priimek: _____

Razred: _____ Mentor/-ica: _____

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.

Dovoljena je uporaba žepnega računalca. Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

1. V spodnji tabeli so zbrani statistični podatki za košarkarja Luko Dončiča v košarkarski ligi NBA v sezoni 2019/2020 po mesecih. *Meti iz igre* so meti za 2 ali 3 točke skupaj. *Zadeti prosti meti* ekipi prinesejo 1 točko. *Dvojni dvojček* pomeni dvomestno število točk in dvomestno število skokov na eni tekmi.

Mesec	Tekme	Odigran čas	Meti iz igre	Zadeti meti iz igre	Meti za 3 točke	Zadeti meti za 3 točke	Prosti meti	Zadeti prosti meti	Skoki	Dvojni dvojčki
Oktober	4	2 h 21 min 12 s	72	33	36	10	32	24	35	2
November	14	7 h 53 min 12 s	293	144	134	45	144	121	144	11
December	11	5 h 22 min 18 s	209	93	100	30	92	71	96	6
Januar	14	7 h 53 min 12 s	307	138	123	41	120	80	133	9
Februar	5	2 h 46 min	97	44	38	11	45	36	45	4
Marec	6	3 h 41 min 24 s	134	60	61	19	58	37	49	2
Julij	1	42 min 6 s	27	11	9	1	9	5	13	1
Avgust	6	3 h 26 min 24 s	117	58	41	14	62	52	58	4

Vir: www.nba.com/stats

- a) Koliko časa na tekmo je v povprečju v obdobju od decembra do februarja odigral Luka? Odgovor zapiši v minutah in sekundah. [4 točke]

- b) Koliko točk na odigrano minuto je v novembru v povprečju dosegel Luka? Rezultat zaokroži na dve decimalni mesti. [4 točke]

c) Koliko točk več ali manj bi v oktobru dosegel Luka, če bi bil njegov odstotek zadetih metov za 2 točki enak, kot je bil odstotek zadetih prostih metov? [5 točk]

d) Luka je v celotni sezoni dosegel 1759 točk. Najmanj koliko dodatnih tekem s 35 točkami in 15 skoki bi potreboval, da bi bilo njegovo povprečno število točk na tekmo in povprečno število skokov na tekmo dvojni dvojček? Kolikšno bi bilo tedaj njegovo povprečno število točk na tekmo? Število točk zaokroži na dve decimalni mesti. [7 točk]

2. Podjetje je zaslužilo večjo vsoto denarja, ki ga bo potrebovalo šele čez nekaj časa. Zato razmišlja o investiciji v stanovanjski kompleks, ki stane 2 000 000 €. Načrtuje, da bo del stanovanj lahko prodalo čez dve leti in zanje iztržilo 1 200 000 €, del pa čez štiri leta in zanje iztržilo še 1 000 000 €. Letna obrestna mera na trgu je 3 %.

Rezultate v evrih ali odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Kolikšna je neto sedanja vrednost investicije v stanovanjski kompleks? [9 točk]

Nasvet: Neto sedanja vrednost nam pove, koliko so danes skupaj vredni vsi denarni tokovi, povezani z odločitvijo. Pri tem vrednosti donosov prištevamo, vrednosti investicij pa odštevamo.

- b) Ali se podjetju investicija v stanovanjski kompleks splača?

[1 točka]

- c) Kolikšna je interna stopnja donosnosti investicije v stanovanjski kompleks? [10 točk]
Nasvet: Interna stopnja donosnosti investicije je tista letna obrestna mera, pri kateri je neto sedanja vrednost investicije enaka 0.

3. Dane so trenutne letne efektivne obrestne mere za različna dospelja. Čas t merimo v letih.

t	0,5	1,0	1,5	2,0
$R(0, t)$	3,00 %	3,50 %	3,90 %	4,10 %

Na trgu so bile pravkar izdane tri kuponske obveznice istega izdajatelja, vse imajo nominalno vrednost 100 € in dospelje čez 2 leti.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Prva obveznica izplačuje *polletne* kupone, prvega čez natanko pol leta. Določi višino kuponov, če njena cena na trgu danes znaša 98 €. [7 točk]

b) Druga obveznica izplačuje *naraščajoče polletne* kupone, prvega čez natanko pol leta. Kupona v prvem letu znašata 3 €, kupona v drugem letu pa sta za 1 € višja kot v prvem letu. Določite ceno obveznice ob izdaji. [5 točk]

c) Tretja obveznica izplačuje *padajoče polletne* kupone, prvega čez natanko pol leta. Kupona v drugem letu sta za 2 € nižja kot v prvem letu. Določite obe višini kuponov, če je obveznica danes naprodaj po svoji nominalni vrednosti. [6 točk]

d) Vlagatelj želi kupiti obveznice s konstantnimi polletnimi kuponi, vendar mu finančni posrednik te transakcije ne omogoča. Utemelji, da lahko z nakupom ustreznega števila obveznic z naraščajočimi in padajočimi polletnimi kuponi pripravi portfelj, ki izplačuje konstantne polletne kupone. [2 točki]

4. Standardni terminski posel na črnomoško pšenico na čikaški blagovni borzi se nanaša na 50 ton pšenice. Četrletni strošek skladiščenja ene tone pšenice znaša 35 \$ in je plačljiv vnaprej na začetku vsakega obdobja skladiščenja. Privzemi, da se letna efektivna obrestna mera s časom ne spreminja in znaša 1 % za vsa dospetja.

Rezultate v dolarjih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) 31. oktobra znaša trenutna cena ene tone črnomoške pšenice 275,12 \$. Kolikšna je tedaj terminska cena ene tone te pšenice, ki je navedena v standardnem terminskem poslu z ročnostjo 30. aprila prihodnje leto? [8 točk]

- b) Veliko živilsko predelovalno podjetje si konec oktobra želi zagotoviti ceno pšenice, ki jo bo potrebovalo v predelavi v začetku maja prihodnje leto. Pričakujejo, da bodo takrat potrebovali 150 ton pšenice. Koliko standardnih terminskih poslov z ročnostjo 30. aprila morajo skleniti 31. oktobra? Koliko bodo za njih plačali? [2 točki]

c) Čez tri mesece, to je 31. januarja, znaša trenutna cena ene tone črnomske pšenice 280,23\$. Na borzi lahko sklenemo (nov) standardni trimesečni terminski posel na črnomske pšenice, možno pa je tudi kupiti (stare) terminske posle iz točke a).

Koliko tedaj znaša terminska cena ene tone pšenice, ki je navedena v novem terminskem poslu z ročnostjo 30. aprila? Kolikšen je tedaj denarni tok ob sklenitvi enega starega terminskega posla iz točke a)?

[10 točk]

Stran s formulami

Terminski posli

- na delnico, ki ne izplačuje dividend

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na delnico, ki izplačuje dividende

$$F_t = (S_t - I(t, T))(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- valutni terminski posel

$$F_t = S_t \frac{(1 + R_d)^{T-t}}{(1 + R_f)^{T-t}}, \quad K = F_0$$

$$V_t = N(S_t(1 + R_f)^{-(T-t)} - K(1 + R_d)^{-(T-t)})$$

- dogovor o terminski obrestni meri

$$R(t, S, T) = \frac{1}{T - S} \left(\frac{1 + R(0, T) \cdot (T - t)}{1 + R(0, S) \cdot (S - t)} - 1 \right), \quad K = R(0, S, T)$$

$$V_t = \frac{N \cdot (R(t, S, T) - K) \cdot (T - S)}{1 + R(t, T) \cdot (T - t)}$$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}$$

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\}$$

- premija v času t , če delnica ne izplačuje dividend

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica ne izplačuje dividend

$$p_t + S_t = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- premija v času t , če delnica izplačuje dividende

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)} - I(t, T), 0\} \leq c_t \leq S_t - I(t, T)$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t + I(t, T), 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica izplačuje dividende

$$p_t + S_t - I(t, T) = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropske in ameriške opcije

$$c_t^E \leq c_t^A, \quad p_t^E \leq p_t^A$$



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2020/2021

1. skupina: Poslovna matematika - REŠITVE

Sreda, 17. marec 2021

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

Šivilja sešije 96 zaščitnih mask, če šiva 3 dni po osem ur na dan. Masko sešije v 15 minutah.

- a) Koliko dni bi morale šivati tri šivilje, če šivajo 7 ur na dan, če se, zaradi dodatne zaščitne podloge, čas šivanja ene maske podaljša za 5 minut in morajo sešiti 315 zaščitnih mask?

3 točke

1 šivilja	15 min/maska	3 dni	8 ur/dan	96 zaščitnih mask
↓	↑	↑	↓	↑
3 šivilje	20 min/maska	x dni	7 ur/dan	315 zaščitnih mask

$$X = \frac{3 * 1 * 20 * 8 * 315}{3 * 15 * 7 * 96} = \underline{\underline{5 \text{ dni}}}$$

Odg.: Tri šivilje bi morale 315 zaščitnih mask šivati 5 dni.

1 točka – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje)

1 točka – določitev vrste sorazmerij

1 točka – izračun neznanke in zapis odgovora

- b) Koliko šivilj bi moralo še dodatno šivati zaščitne maske, če se zaradi velikega povpraševanja po zaščitnih maskah količina poveča na 2970, šivilje šivajo 5 dni po 9 ur na dan, za eno masko potrebujejo 12 minut in so za 10 % bolj produktivne?

4 točke

1 šivilja	96 zaščitnih mask	15 min/maska	3 dni	8 ur/dan	100 %
↑	↑	↑	↓	↓	↓
x šivilj	2970 zaščitnih mask	12 min/maska	5 dni	9 ur/dan	110 %

$$x = \frac{1 * 2970 * 12 * 3 * 8 * 100}{96 * 15 * 5 * 9 * 110} = \underline{\underline{12 \text{ šivilj}}}$$

Odg.: Dodatno bi moralo šivati še 11 šivilj.

1 točka – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje)

1 točka – določitev vrste sorazmerij

1 točka – izračun vrednosti neznanke

1 točka – zapis odgovora

2. naloga

Nagradni sklad športnega društva znaša 9.100,00 EUR. Za organizacijo tekmovanja društvo nameni $\frac{1}{7}$ nagradnega sklada, ostanek pa za nagrade tekmovalcem.

Sredstva za nagrade razdeli takole: $\frac{3}{5}$ nagradnega sklada nameni za tri prvouvrščene tekmovalce, ostanek pa za tekmovalce, ki so zasedli četrto do sedmo mesto.

Med prve tri razdeli nagrado tako, da prvi dobi 2-krat toliko kot drugi, tretji pa 200,00 EUR manj kot drugi. Med preostale štiri tekmovalce pripadajoči znesek nagrade razdeli tako, da vsak naslednji tekmovalec dobi 100,00 EUR manj od prejšnjega.

Koliko dobi vsak nagrajeni tekmovalec?

Izračun zneska za organizacijo tekmovanja (m_1) in preostanka za nagrade (m_2)

$$m_1 = \frac{1}{7} \text{ od } 9.100,00 = 1.300,00 \text{ EUR znesek za organizacijo tekmovanja}$$

$$m_2 = 9.100,00 - 1.300,00 = 7.800,00 \text{ EUR preostanek za nagrade}$$

Razdelitev sredstev za nagrade:

a. izračun nagrade za tri prvouvrščene tekmovalce = $\frac{3}{5}$ od 7.800,00 = 4.680,00 EUR

Udeleženeec	Razlike	Odgovor	Točke
1.	2 x	2.440,00 EUR	1
2.	x	1.220,00 EUR	1
3.	x – 200,00	1.020,00 EUR	1
	4 x – 200,00 = 4.680,00		
	4 x = 4.680,00 + 200,00		
	x = 1.220,00		

1 točka – izračun nagrade za prvouvrščenega tekmovalca

1 točka – izračun nagrade za drugouvrščenega tekmovalca

1 točka – izračun nagrade za tretjeouvrščenega tekmovalca

b. izračun ostanka nagrade za tekmovalce, ki so zasedli četrto do sedmo mesto

$$\text{izračun ostanka nagrade} = 7.800,00 - 4.680,00 = 3.120,00 \text{ EUR}$$

Udeleženeec	Razlike	Odgovor	Točke
4.	x	930,00 EUR	1
5.	x – 100,00	830,00 EUR	1
6.	x – 200,00	730,00 EUR	1
7.	x – 300,00	630,00 EUR	1
	4 x – 600,00 = 3.120,00		
	4 x = 3.120,00 + 600,00		
	x = 930,00		

1 točka – izračun nagrade za četrtoouvrščenega tekmovalca

1 točka – izračun nagrade za petouvrščenega tekmovalca

1 točka – izračun nagrade za šestouvrščenega tekmovalca

1 točka – izračun nagrade za sedmouvrščenega tekmovalca

3. naloga

V pekarni Dobri kruh pečejo različne vrste kruha.

- a) Izračunajte dnevno količino spečenega kruha, če spečejo 42 % črnega kruha, 14 % belega kruha, 8 % rženega kruha, 6 % ovsenega kruha, 12 % koruznega kruha, 2 % čebulnega kruha in 168 kg polnozrnatega kruha, kar predstavlja 16 %. Izračune vpišite v tabelo.

3 točke

Vrsta kruha	Odstotki	Količina v kg	Točke
Črni kruh	42 %	441 kg	} 2 t
Beli kruh	14 %	147 kg	
Rženi kruh	8 %	84 kg	
Ovseni kruh	6 %	63 kg	
Koruzni kruh	12 %	126 kg	
Čebulni kruh	2 %	21 kg	
Polnozrnati kruh	16 %	168 kg	
Skupaj	100 %	1.050 kg	1 t

$$\begin{array}{l}
 16 \% \dots\dots\dots 168 \text{ kg} \\
 100 \% \dots\dots\dots x \text{ kg} \\
 x = \frac{100 \cdot 168}{16} = \mathbf{1.050 \text{ kg}}
 \end{array}$$

1 točka – izračun celotne dnevne količine pečenega kruha

2 točki – izračun količin za posamezne vrste kruha

- b) Zaradi bližajočih se praznikov se bo povpraševanje po kruhu povečalo. Tako bodo dnevno količino belega kruha povečali za 48 kg, ponudili bodo še dve vrsti kruha, in sicer sadnega in pirinega. Sadnega bodo spekli 60 kg, pirinega pa 30 kg. Črnega kruha bodo spekli 630 kg, kar predstavlja enak odstotek kot v običajnih dneh. Količino rženega kruha bodo povečali za 2 %, polnozrnatega kruha pa za 1 %. Ovsenega kruha bodo spekli 3 %, koruznega 8 % in čebulnega 1 % od celotne količine.

Izračunajte celotno količino spečenega kruha, količine in odstotke za posamezne vrste kruha.

3 točke

Vrsta kruha	Odstotki	Količina v kg	Točke
Črni kruh	42 %	630 kg	} 2 t
Beli kruh	13 %	195 kg	
Rženi kruh	10 %	150 kg	
Ovseni kruh	3 %	45 kg	
Koruzni kruh	8 %	120 kg	
Čebulni kruh	1 %	15 kg	
Polnozrnati kruh	17 %	255 kg	
Sadni kruh	4 % ^{*(1)}	60 kg	
Pirin kruh	2 %	30 kg	
Skupaj	100 %	1.500 kg ^{*(1)}	1 t

Stranska izračuna k točki b) ^{*(1)}

$$\begin{array}{l|l}
 42 \% \dots\dots\dots 630 \text{ kg} & 6 \% \dots\dots\dots 90 \text{ kg} \\
 100 \% \dots\dots\dots x \text{ kg} & x \% \dots\dots\dots 60 \text{ kg} \\
 x = \frac{100 \cdot 630}{42} = \underline{\underline{1.500 \text{ kg}}}^{*(1)} & X(\text{sadni kruh}) = \frac{60 \cdot 6}{90} = \underline{\underline{4 \%}}^{*(1)}
 \end{array}$$

- 1 točka – izračun celotne količine
- 2 točki – izračun posameznih količin in odstotkov

c) Izračunajte tudi, za koliko odstotkov je bila praznična peka večja od običajne in zapišite odgovor?

1 točka

$$\left. \begin{array}{l}
 100 \% \dots\dots\dots 1.050 \text{ kg} \\
 x \% \dots\dots\dots 1.500 \text{ kg} \\
 x = \frac{1500 \cdot 100}{1050} = \underline{\underline{142,86 \%}}
 \end{array} \right\} \text{ posredni način}$$

ali

$$\left. \begin{array}{l}
 100 \% \dots\dots\dots 1.050 \text{ kg} \\
 x \% \dots\dots\dots 450 \text{ kg} \\
 x = \frac{450 \cdot 100}{1050} = \underline{\underline{42,86 \%}}
 \end{array} \right\} \text{ neposredni način } (1.500 - 1.050 = 450 \text{ kg})$$

Odgovor: Praznična peka je bila večja od običajne za 42,86 %.

- 1 točka – izračun razlike v % in zapis odgovora

4. naloga

Jasna je prodala avto za 8.200,00 EUR. 20 % kupnine je posodila bratu, ostanek pa je vložila na banko. Banka obrestuje vloge po navadnem obrestnem računu.

- a) Koliko je Jasna privarčevala na banki (obresti) in s kolikšnim zneskom razpolaga po 18 mesecih, če je letna obrestna mera 2,2 %?

3 točke

$$\text{Izračun posojenega zneska} = \frac{8.200,00 \cdot 20}{100} = \underline{\underline{1.640,00 \text{ EUR}}}$$

$$G = 8.200,00 - 1.640,00 = 6.560,00 \text{ EUR}$$

$$p = 2,2 \%$$

$$\underline{m = 18 \text{ mesecev}}$$

$$o = x \text{ EUR}$$

$$G + o = x \text{ EUR}$$

$$o = \frac{G \cdot p \cdot m}{1200} = \frac{6.560,00 \cdot 2,2 \cdot 18}{1200} = \underline{\underline{216,48 \text{ EUR}}}$$

$$G^+ = G + o = 6.560,00 + 216,48 = \underline{\underline{6.776,48 \text{ EUR}}}$$

1 točka – izračun posojenega zneska

1 točka – izračun obresti

1 točka – izračun (G + o)

- b) Brat ji je po enem letu vrnil 1.700,00 EUR. Za koliko odstotnih točk višja ali nižja je bila obrestna mera za dano posojilo bratu od tiste, ki jo ponuja banka?

2 točki

$$G^+ = 1.700,00 \text{ EUR}$$

$$G = 1.640,00 \text{ EUR}$$

$$o = 60,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{l = 1 \text{ leto}}$$

$$p = x \% \text{ (letna obrestna mera)}$$

$$o = \frac{G \cdot p \cdot l}{100}$$

$$p = \frac{o \cdot 100}{G \cdot l} = \frac{60,00 \cdot 100}{1.640,00 \cdot 1} = \underline{\underline{3,66 \%}}$$

$$3,66 \% - 2,2 \% = 1,46 \text{ odstotnih točk}$$

Odgovor:

Obrestna mera za dano posojilo je za 1,46 odstotnih točk višja od tiste, ki jo ponuja banka.

1 točka – izračun letne obrestne mere za dano posojilo

1 točka – izračun odstotnih točk in zapis odgovora

- c) Jasna je ves denar (1.700,00 EUR), ki ji ga je vrnil brat, za nekaj mesecev vložila na banko, ki obrestuje vloge po 3,32 % letni obrestni meri. Ob koncu vezave obeh vlog je prejela 8.500,00 EUR. Koliko mesecev se je obrestovala druga vloga?

2 točki

$$\begin{aligned} \sum G^{+(1+2)} &= 8.500,00 \text{ EUR} \\ - \quad G^{+(1)} &= 6.776,48 \text{ EUR} \\ \hline G^{+(2)} &= 1.723,52 \text{ EUR} \end{aligned}$$

$$G^{+(2)} = 1.723,52 \text{ EUR}$$

$$G = 1.700,00 \text{ EUR}$$

$$o = 23,52 \text{ EUR}$$

$$p = 3,32 \%$$

$$m = x \text{ mesecev}$$

$$o = \frac{G \cdot p \cdot x \cdot m}{1200}$$

$$m = \frac{o \cdot x \cdot 1200}{G \cdot p} = \frac{23,52 \cdot 1200}{1.700,00 \cdot 3,32} = \underline{\underline{5 \text{ mesecev}}}$$

1 točka – izračun $G^{+(2)}$

1 točka – izračun časa obrestovanja v mesecih



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2020/2021

2. skupina: Statistika – REŠITVE

Sreda, 17. marec 2021

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Statistični urad RS (SURS) izda na svoji spletni strani stat.si letno več kot 700 objav z več kot 20 področij. S toliko področij namreč zbira podatke, ki jih analizira in pripravi za objavo. Kaj še pravi statistika o statistiki?

Na družbenih omrežjih je bilo objavljenih več kot 2.400 kratkih sporočil. SURS je čedalje bolj dejaven na družbenih omrežjih: na Twitterju objavlja od julija 2009, na Facebooku od novembra 2017, od oktobra 2020 pa tudi na Instagramu.

(Vir: <https://www.stat.si/StatWeb/News/Index/9377>)

Tabela 1: **Število objav Statističnega urada Republike Slovenije po vrstah družbenih omrežjih v letu 2020**

Vrsta družbenega omrežja	Število objav	Struktura v %
Twitter, slovenska različica	1.251	51,58
Twitter, angleška različica	846	34,89
Facebook	290	11,96
Instagram	38	1,57
Skupaj	2425	100,00

Vir: SURS, februar 2021

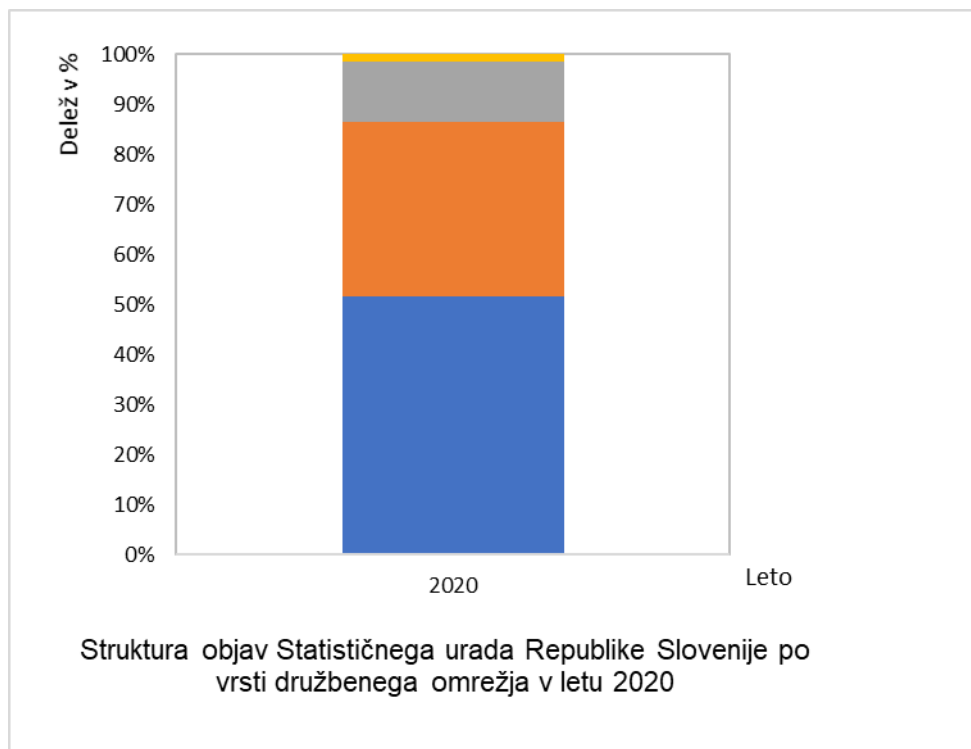
- a) Izračunajte strukturo objav Statističnega urada Republike Slovenije po vrsti družbenega omrežja v letu 2020. (Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno ter vpišite v tabelo 1.)

1 točka

1 točka– vsi pravilno izračunani strukturni odstotki

- b) Strukturo objav Statističnega urada Republike Slovenije po vrsti družbenega omrežja v letu 2020 prikažite grafično s strukturnim stolpcem.

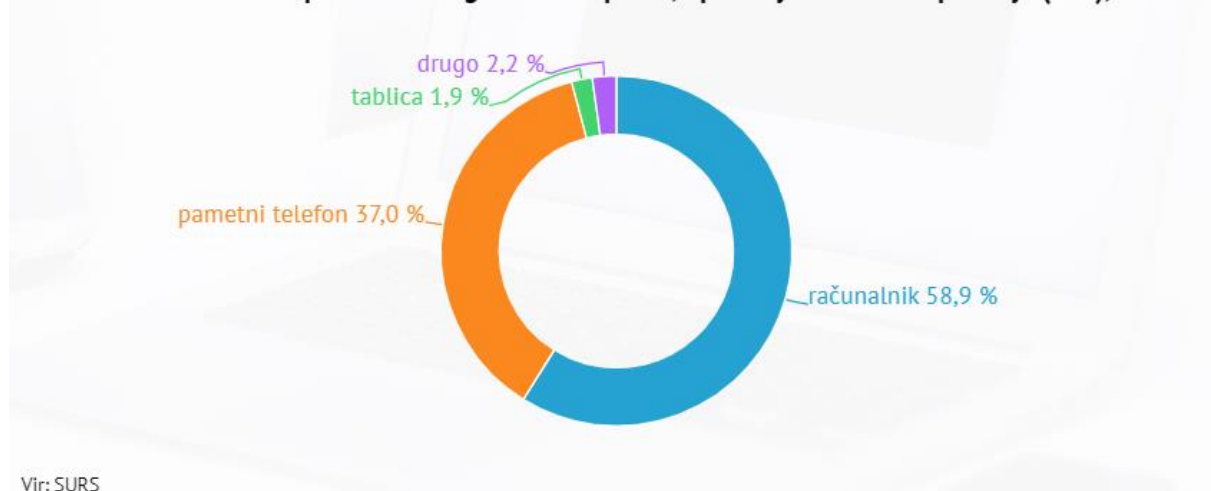
3 točke



- 1 točka – pravilno narisani strukturalni stolpec
- 1 točka – pravilno zapisan naslov grafikona
- 1 točka – pravilno opremljen grafikon (oznake osi, legenda)

V 2020 so na SURS-ovi spletni strani zabeležili skoraj 640.000 obiskov. Ogled strani je trajal povprečno 2 minuti in 35 sekund. Največkrat je bila stran obiskana v novembru. Za dostop do nje je največ obiskovalcev uporabilo računalnik. (Vir: <https://www.stat.si/StatWeb/News/Index/9377>)

Obiskovalci SURS-ove spletne strani glede na naprave, uporabljene za dostop do nje (v %), 2020



- c) Izračunajte, koliko obiskovalcev je dostopalo do spletnih strani Statističnega urada z računalnikom, pametnim telefonom ali tablico. (Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 2.)

2 točki

Tabela 2: **Obiskovalci SURS-ove spletne strani glede na naprave, uporabljene za dostop do nje v letu 2020**

Vrsta uporabljene naprave	Število obiskovalcev
Računalnik	376.960
Pametni telefon	236.800
Tablica	12.160
Druge naprave	14.080
Skupaj	640.000

2 točki – vsi pravilno izračunani podatki o številu obiskovalcev

1 točka – 1 napaka pri izračunanih podatkih o številu obiskovalcev

- d) Za primer pod točko c opredelite statistično množico (populacijo) ter spremenljivko in vrsto statistične spremenljivke.

1 točka

Statistična množica (populacija): **obiskovalci spletne strani SURS-a v letu 2020**

Statistična spremenljivka: **uporabljena naprava za dostop do spletne strani**

Vrsta spremenljivke: **opisna**

1 točka – pravilno opredeljena statistična množica, spremenljivka in vrsta spremenljivke

2. NALOGA

Tabela 3: Osnovne značilnosti izbranih statističnih regij v Sloveniji v letu 2018

Statistična regija	Število članov na gospodinjstvo	Število delovno aktivnih prebivalcev	Število gospodinjstev	Število stanovanj
Pomurska	2,59	41.468	44.230	48.136
Podravska	2,39	126.593	134.815	137.647
Osrednjeslovenska	2,53	303.299	215.138	217.439
Obalno-kraška	2,42	48.754	47.230	55.266

Vir: SURS, januar 2021

- a) Izračunajte število prebivalcev za izbrane statistične regije. (Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 4.)

2 točki

$$\text{Število prebivalcev} = \text{št. članov na gospodinjstvo} \cdot \text{število gospodinjstev}$$

2 točki – vsi pravilno izračunani podatki za število prebivalcev

1 točka – 1 napaka pri izračunanih števila prebivalcev

- b) Izračunajte število delovno aktivnih prebivalcev na 100 prebivalcev za izbrane statistične regije. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 4.)

2 točki

$$\text{Število delovno aktivnih preb. na 100 preb.} = \frac{\text{število delovno aktivnih prebivalcev}}{\text{število prebivalcev}} \cdot 100$$

2 točki – vsi pravilno izračunani statistični koeficienti

1 točka – 1 napaka pri izračunanih statističnih koeficientih

- c) Izračunajte število stanovanj na 1000 prebivalcev za izbrane statistične regije. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 4.)

2 točki

$$\text{Število stanovanj na 1000 prebivalcev} = \frac{\text{število stanovanj}}{\text{število prebivalcev}} \cdot 1000$$

2 točki – vsi pravilno izračunani statistični koeficienti

1 točka – 1 napaka pri izračunanih statističnih koeficientih

d) Izračunajte recipročni koeficient koeficientu pod točko c za Pomursko regijo.

1 točka

$$K_{rec} = \frac{\text{število prebivalcev}}{\text{število stanovanj}} = \frac{114.556}{48.136} = 2,38 \text{ prebivalca na stanovanje}$$

1 točka –pravilno izračunan recipročni koeficient

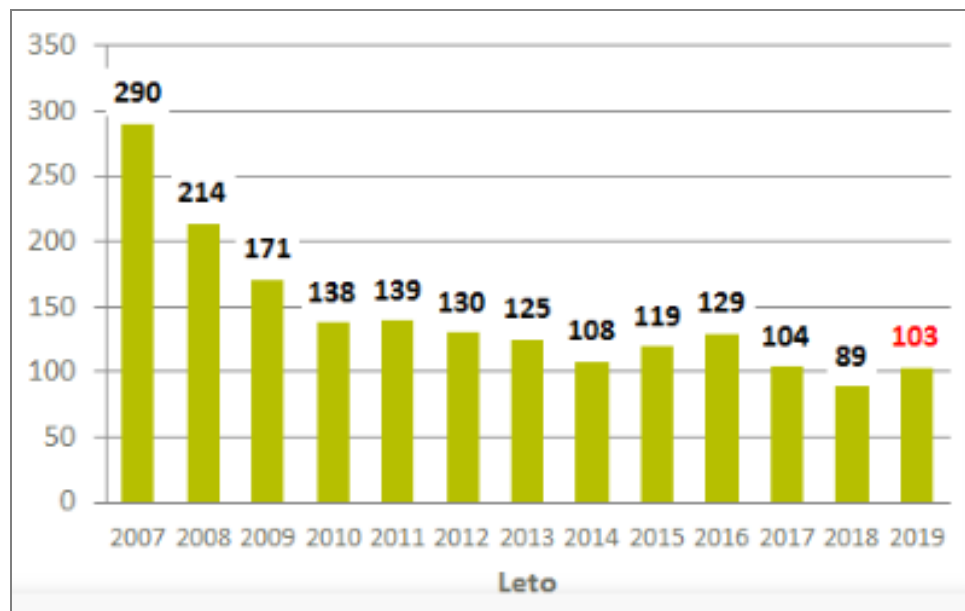
Tabela 4: Izbrani kazalci za statistične regije v Sloveniji v letu 2018

Statistična regija	a)	b)	c)
Pomurska	114.556	36,20	420,20
Podravska	322.208	39,29	427,20
Osrednjeslovenska	544.299	55,72	399,48
Obalno-kraška	114.297	42,65	483,53

3. NALOGA

Glasbena industrija v Evropi in Veliki Britaniji podpira kar dva milijona delovnih mest, britanska raziskava pa je pokazala, da gospodarstvu prinaša 82 milijard evrov letno. Zaradi trenutne koronakrize se je delo v glasbeni industriji zmanjšalo kar za 75 odstotkov.

(Vir: <https://www.ehonovice.si/aktualno/glasbena-industrija-je-v-krizi-kaksne-so-resitve-za-prihodnost/>)



Slika 1: Število izdanih pesmi glasbene založbe »My music« v državi Izmišljeni

Vir: Izmišljeni podatki.

- a) Izračunajte indekse s stalno osnovo 2007 za število izdanih pesmi založbe "My music". (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

2 točki

Tabela 1: Indeksi s stalno osnovo 2007 za število izdanih pesmi založbe "My music" v državi Izmišljeni za obdobje od leta 2007 do 2013

Leto	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
$I_{j/2007}$	100,00	73,79	58,97	47,59	47,93	44,83	43,10

2 točki – vsi pravilno izračunani indeksi

1 točka – 1 napaka pri izračunanih indeksih

- b) Komentirajte izračunani indeks za leto 2013.

1 točka

Komentar: Leta 2013 je bilo izdanih za 56,9 % manj pesmi kot leta 2007.

- c) Izračunajte stopnje rasti števila izdanih pesmi založbe "My music" za obdobje od leta 2013 do 2019.

2 točki

Tabela 6: **Stopnje rasti števila izdanih pesmi založbe "My music" v državi Izmišljeni za obdobje od leta 2013 do 2019**

Leto	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
S_j	-3,85	-13,60	10,19	8,40	-19,38	-14,42	15,73

- d) Dopolnite besedilo:

Koeficient rasti za leto 2017 je znašal **0,8062**.

Če veste, da je bilo leta 2020 izdanih samo 67 pesmi v opazovani glasbeni založbi, bi moral biti koeficient rasti tega leta **0,6505**.

2 točki

$$K_{2020} = \frac{67}{103} \cdot 100 = 0,6505$$

1 točka –pravilno izračunan koeficient rasti za leto 2017

1 točka –pravilno izračunan koeficient rasti za leto 2020

4. NALOGA

Tabela 7: **Dijaki 4.h oddelka po oddaljenosti od doma do šole na izbrani srednji šoli v Sloveniji v letu 2020/2021**

Oddaljenost od doma do šole v km	Število dijakov	fj°
do 2	5	0,167
nad 2 do 4	8	0,267
nad 4 do 6	6	0,200
nad 6 do 8	5	0,167
nad 8 do 10	4	0,133
nad 10	2	0,066
Skupaj	30	1,000

- a) Za podatke v tabeli 7 izračunajte relativne frekvence. (Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.)

2 točki

2 točki – vse pravilno izračunane relativne frekvence
1 točka – 1 napaka pri izračunanih relativnih frekvencah

- b) Koliko znaša kumulativa frekvenc 3. razreda in kaj nam pove?

2 točki

Komentar: Kumulativa frekvenc 3. razreda znaša 19, kar pomeni, da je 19 dijakov bilo oddaljenih od doma do šole do 6 km.

1 točka – pravilno zapisana in razložena kumulativa frekvenc v 3. razredu

- c) Koliko odstotkov dijakov je od doma do šole oddaljenih nad 6 do 10 kilometrov?

1 točka

30 % dijakov je bilo od doma do šole oddaljenih nad 6 do 10 kilometrov.

1 točka – pravilno razložena relativna frekvenca

- d) Koliko znaša kumulativa relativnih frekvenc v 4. razredu?

1 točka

Kumulativa relativnih frekvenc v 4. razredu je znašala 0,800.

1 točka – pravilno zapisana kumulativa relativnih frekvenc v 4. razredu

e) Obkrožite pravilen odgovor, ki pojasnjuje relativno frekvenco 3. razreda:

- A 6 dijakov je bilo oddaljenih od doma do šole nad 4 do 6 km.
- B Delež dijakov, ki so bili oddaljeni od doma do šole nad 4 do 6 km, je 20 %.
- C Delež dijakov, ki so bili oddaljeni od doma do šole do 6 km, je 20 %.
- D **Odstotek dijakov, ki so bili oddaljeni od doma do šole nad 4 do 6 km, je 20 %.**

1 točka

1 točka – obkrožen pravilni odgovor

3. SKUPINA

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih damo tudi ob prenosu napake.

Točke brez zvezdice damo le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. V spodnji tabeli so zbrani statistični podatki za košarkarja Luko Dončiča v košarkarski ligi NBA v sezoni 2019/2020 po mesecih. *Meti iz igre* so meti za 2 ali 3 točke skupaj. *Zadeti prosti meti* ekipi prinesejo 1 točko. *Dvojni dvojček* pomeni dvomestno število točk in dvomestno število skokov na eni tekmi.

Mesec	Tekme	Odigran čas	Meti iz igre	Zadeti meti iz igre	Meti za 3 točke	Zadeti meti za 3 točke	Prosti meti	Zadeti prosti meti	Skoki	Dvojni dvojčki
Oktober	4	2 h 21 min 12 s	72	33	36	10	32	24	35	2
November	14	7 h 53 min 12 s	293	144	134	45	144	121	144	11
December	11	5 h 22 min 18 s	209	93	100	30	92	71	96	6
Januar	14	7 h 53 min 12 s	307	138	123	41	120	80	133	9
Februar	5	2 h 46 min	97	44	38	11	45	36	45	4
Marec	6	3 h 41 min 24 s	134	60	61	19	58	37	49	2
Julij	1	42 min 6 s	27	11	9	1	9	5	13	1
Avgust	6	3 h 26 min 24 s	117	58	41	14	62	52	58	4

Vir: www.nba.com/stats

- a) Koliko časa na tekmo je v povprečju v obdobju od decembra do februarja odigral Luka? Odgovor zapiši v minutah in sekundah. [4 točke]

Rešitev

V obdobju od decembra do februarja je Luka odigral $11 + 14 + 5 = 30$ tekem.

Odigran čas za vsak mesec pretvorimo v sekunde:

$$t_{\text{dec}} = 5 \cdot 3600 + 22 \cdot 60 + 18 = 19\,338 \text{ s}$$

$$t_{\text{jan}} = 28\,392 \text{ s}$$

$$t_{\text{feb}} = 9\,960 \text{ s}$$

Dobimo povprečen odigran čas na tekmo

$$\frac{19\,338 + 28\,392 + 9\,960}{30} = \frac{57\,690}{30} = 1923 \text{ s} = 32 \text{ min } 3 \text{ s.}$$

Čas lahko pretvorimo tudi v minute in dobimo

$$t_{\text{dec}} = 5 \cdot 60 + 22 + \frac{18}{60} = 322,3 \text{ min}$$

$$t_{\text{jan}} = 473,2 \text{ min}$$

$$t_{\text{feb}} = 166 \text{ min}$$

Povprečen odigran čas na tekmo je

$$\frac{322,3 + 473,2 + 166}{30} = \frac{961,5}{30} = 32,05 \text{ min} = 32 \text{ min } 3 \text{ s.}$$

Točkovanje

Število odigranih tekem 1 točka.

Pretvorba odigranega časa v sekunde ali minute in vsota 1+1* točka.

Povprečni čas 1* točka.

- b) Koliko točk na odigrano minuto je v novembru v povprečju dosegel Luka? Rezultat zaokroži na dve decimalni mesti. [4 točke]

Rešitev

Število zadetih metov iz igre je 144, število zadetih metov za 3 točke pa 45.

Število zadetih metov za 2 točki je $144 - 45 = 99$.

Število zadetih prostih metov za 1 točko je 121.

Pomnožimo število zadetih metov z ustreznim številom točk in seštejemo, da dobimo število vseh točk v novembru:

$$T = 45 \cdot 3 + 99 \cdot 2 + 121 \cdot 1 = 454$$

V novembru je Luka odigral 7 ur 53 minut in 12 sekund, kar je 473,2 minute.

Na minuto je torej v povprečju dosegel $\frac{454}{473,2} = 0,96$ točke.

Točkovanje

Število zadetih metov za 2 točki; 1 točka.

Skupno število točk v novembru 1*+1 točka.

Število točk na odigrano minuto 1* točka.

- c) Koliko točk več ali manj bi v oktobru dosegel Luka, če bi bil njegov odstotek zadetih metov za 2 točki enak, kot je bil odstotek zadetih prostih metov? [5 točk]

Rešitev

Zadošča, da določimo samo spremembo točk pri metih za dve točki.

Odstotek zadetih prostih metov v oktobru je $\frac{24}{32} = 75\%$.

Število zadetih metov za 2 točki je $33 - 10 = 23$.

Število doseženih točk iz metov za 2 točki je $23 \cdot 2 = 46$.

Število vseh metov za 2 točki je $72 - 36 = 36$.

Če bi bil enako uspešen pri metih za 2 točki, bi zadel $0,75 \cdot 36 = 27$ metov in dosegel $27 \cdot 2 = 54$ točk.

To je $54 - 46 = 8$ točk več, kot jih je dejansko dosegel.

Točkovanje

Odstotek zadetih prostih metov v oktobru 1 točka.

Število dejansko zadetih metov ali doseženih točk iz metov za 2 točki; 1 točka.

Število vseh metov za 2 točki; 1 točka.

Število zadetih metov ali točk iz metov za 2 točki ob upoštevanju novega odstotka uspešnosti 1 točka.

Razlika v številu točk (obvezna navedba smeri spremembe) 1 točka.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

- d) Luka je v celotni sezoni dosegel 1759 točk. Najmanj koliko dodatnih tekem s 35 točkami in 15 skoki bi potreboval, da bi bilo njegovo povprečno število točk na tekmo in povprečno število skokov na tekmo dvojni dvojček? Kolikšno bi bilo tedaj njegovo povprečno število točk na tekmo? Število točk zaokroži na dve decimalni mesti. [7 točk]

Rešitev

V celotni sezoni je Luka odigral 61 tekem.

Povprečno število doseženih točk na tekmo je $\frac{1759}{61} = 28,84 \geq 10$.

To je že dvomestno število, in bi ga z vsako naslednjo tekmo s 35 doseženimi točkami samo še povišal.

Vseh skokov v sezoni je imel 573.

Povprečno število skokov na tekmo je $\frac{573}{61} = 9,39 < 10$ skoka na tekmo.

Zanima nas potrebno število dodatnih tekem s 15 skoki, da bo povprečje zraslo na 10 skokov na tekmo.

Rešiti moramo neenačbo

$$\frac{573 + 15 \cdot n}{61 + n} \geq 10$$

kjer je n število dodatnih tekem.

Dobimo $n \geq 7,4$, kar pomeni, da bi potreboval najmanj 8 tekem.

Njegovo povprečno število točk na tekmo bi tedaj znašalo $\frac{1759 + 8 \cdot 35}{61 + 8} = 29,55$ točke.

Točkovanje

Ugotovitev, da je pogoj dvomestnega števila točk že izpolnjen, pogoj dvomestnega števila skokov pa ne, 3 točke.

Zapisana neenakost 2 točki.

Pravilno rešena neenakost in število potrebnih tekem 1* točka.

Novo povprečno število točk na tekmo 1* točka.

2. Podjetje je zasluži večjo vsoto denarja, ki ga bo potrebovalo šele čez nekaj časa. Zato razmišlja o investiciji v stanovanjski kompleks, ki stane 2 000 000 €. Načrtuje, da bo del stanovanj lahko prodalo čez dve leti in zanje iztržilo 1 200 000 €, del pa čez štiri leta in zanje iztržilo še 1 000 000 €. Letna obrestna mera na trgu je 3 %.

Rezultate v evrih ali odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Kolikšna je neto sedanja vrednost investicije v stanovanjski kompleks? [9 točk]

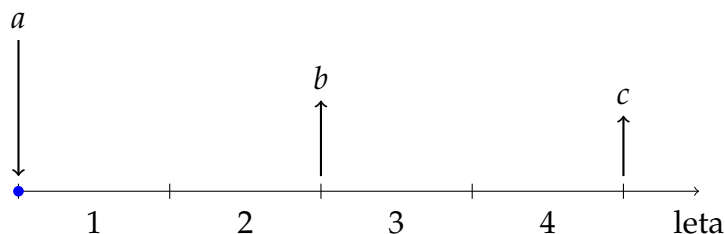
Nasvet: Neto sedanja vrednost nam pove, koliko so danes skupaj vredni vsi denarni tokovi, povezani z odločitvijo. Pri tem vrednosti donosov prištevamo, vrednosti investicij pa odštevamo.

Rešitev

Denarni tokovi, ki jih predstavlja investicija v stanovanjski kompleks:

- Danes plačamo $a = 2\,000\,000$ €.
- Čez dve leti dobimo $b = 1\,200\,000$ €.
- Čez štiri leta dobimo $c = 1\,000\,000$ €.

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Letna obrestna mera je $p\% = 3\%$.

Letni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{p}{100} = 1,03$.

Ker nas zanima neto sedanja vrednost, redukcijski termin postavimo na sedanji trenutek.

$$NSV = \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^4} - a$$

$$NSV = \frac{1\,200\,000}{1,03^2} + \frac{1\,000\,000}{1,03^4} - 2\,000\,000$$

$$NSV = 19\,602,14 \text{ €}$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov oziroma razumevanje naloge 3 točke.

Letni obrestni faktor 1 točka.

Izraz za neto sedanjo vrednost 1*+2 točki.

Izračun NSV 1*+1 točka.

- b) Ali se podjetju investicija v stanovanjski kompleks splača? [1 točka]

Rešitev

Ker je neto sedanja vrednost pozitivna, se podjetju investicija splača.

Točkovanje

Odgovor 1 točka.

- c) Kolikšna je interna stopnja donosnosti investicije v stanovanjski kompleks? [10 točk]
Nasvet: Interna stopnja donosnosti investicije je tista letna obrestna mera, pri kateri je neto sedanja vrednost investicije enaka 0.

Rešitev

Najprej poiščemo tak letni obrestni faktor r_1 , da je neto sedanja vrednost investicije enaka 0.

$$\frac{b}{r_1^2} + \frac{c}{r_1^4} - a = 0$$
$$ar_1^4 - br_1^2 - c = 0$$

Uvedemo novo neznanko $r_1^2 = t$, da dobimo kvadratno enačbo

$$at^2 - bt - c = 0$$
$$10t^2 - 6t - 5 = 0$$

z rešitvama

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{236}}{20} = \frac{3 \pm \sqrt{59}}{10}.$$

Smiselna je pozitivna rešitev $t_1 = \frac{3 + \sqrt{59}}{10} = 1,068115 = r_1^2$.

Iz nje dobimo obrestni faktor $r_1 = \sqrt{t_1} = 1,0335$.

Interna stopnja donosnosti je $ISD = 100(r_1 - 1) = 3,35 \%$.

Točkovanje

Enačba za novi obrestni faktor 1*+1 točka.

Kvadratna enačba 1*+1 točka.

Rešitvi kvadratne enačbe 1*+1 točka.

Smiselna rešitev 1 točka.

Pripadajoči obrestni faktor 1 točka.

Interna stopnja donosnosti 1*+1 točka.

3. Dane so trenutne letne efektivne obrestne mere za različna dospelja. Čas t merimo v letih.

t	0,5	1,0	1,5	2,0
$R(0, t)$	3,00 %	3,50 %	3,90 %	4,10 %

Na trgu so bile pravkar izdane tri kuponske obveznice istega izdajatelja, vse imajo nominalno vrednost 100 € in dospelje čez 2 leti.

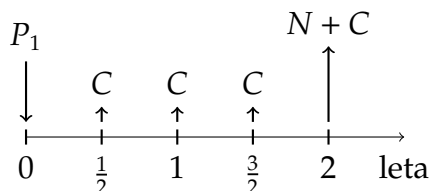
Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Prva obveznica izplačuje *polletne* kupone, prvega čez natanko pol leta. Določi višino kuponov, če njena cena na trgu danes znaša 98 €. [7 točk]

Rešitev

Nominalna vrednost obveznice je $N = 100$ €, cena obveznice je $P_1 = 98$ €.

Iskani polletni kupon označimo s C .



Uporabimo formulo za vrednotenje obveznic.

$$P_1 = C \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C \cdot D(0, 1) + C \cdot D(0, \frac{3}{2}) + (N + C) \cdot D(0, 2)$$

$$P_1 = C \cdot (D(0, \frac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \frac{3}{2}) + D(0, 2)) + N \cdot D(0, 2)$$

Dobimo

$$C = \frac{P_1 - N \cdot D(0, 2)}{D(0, \frac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \frac{3}{2}) + D(0, 2)}$$

$$C = \frac{P_1 - \frac{N}{(1+R(0,2))^2}}{\frac{1}{(1+R(0, \frac{1}{2}))^{1/2}} + \frac{1}{1+R(0,1)} + \frac{1}{(1+R(0, \frac{3}{2}))^{3/2}} + \frac{1}{(1+R(0,2))^2}}$$

$$C = \frac{98 - \frac{100}{1,041^2}}{\frac{1}{1,031^{1/2}} + \frac{1}{1,035} + \frac{1}{1,039^{3/2}} + \frac{1}{1,041^2}}$$

$$C = 1,50 \text{ €}$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 2 točki.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1*+1 točka.

Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1 točka.

Izraz za višino kupona 1* točka.

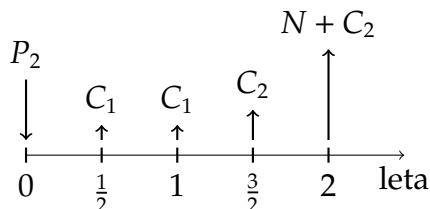
Višina kupona 1 točka.

- b) Druga obveznica izplačuje *naraščajoče polletne* kupone, prvega čez natanko pol leta. Kupona v prvem letu znašata 3€, kupona v drugem letu pa sta za 1€ višja kot v prvem letu. Določi ceno obveznice ob izdaji. [5 točk]

Rešitev

Prva dva polletna kupona znašata $C_1 = 3€$.

Zadnja dva polletna kupona znašata $C_2 = 4€$.



Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$$P_2 = C_1 \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C_1 \cdot D(0, 1) + C_2 \cdot D(0, \frac{3}{2}) + (N + C_2) \cdot D(0, 2)$$

$$P_2 = \frac{C_1}{(1 + R(0, \frac{1}{2}))^{1/2}} + \frac{C_1}{1 + R(0, 1)} + \frac{C_2}{(1 + R(0, \frac{3}{2}))^{3/2}} + \frac{N + C_2}{(1 + R(0, 2))^2}$$

$$P_2 = \frac{3}{1,03^{1/2}} + \frac{3}{1,035} + \frac{4}{1,039^{3/2}} + \frac{104}{1,041^2}$$

$$P_2 = 105,60€$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje obveznice) 2 točka.

Formula za vrednotenje obveznice, usklajena z besedilom naloge, 1*+1 točka.

Cena obveznice 1 točka.

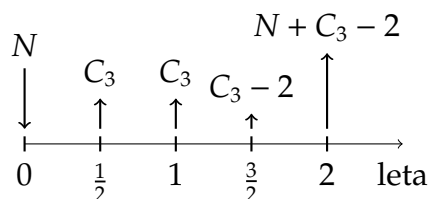
- c) Tretja obveznica izplačuje *padajoče polletne* kupone, prvega čez natanko pol leta. Kupona v drugem letu sta za 2€ nižja kot v prvem letu. Določite obe višini kuponov, če je obveznica danes naprodaj po svoji nominalni vrednosti. [6 točk]

Rešitev

Cena obveznice je $P_3 = N = 100€$.

Naj prva dva polletna kupona znašata C_3 .

Zadnja dva polletna kupona zato znašata $C_3 - 2€$.



Uporabimo formulo za vrednotenje obveznic.

$$N = C_3 \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C_3 \cdot D(0, 1) + (C_3 - 2) \cdot D(0, \frac{3}{2}) + (N + C_3 - 2) \cdot D(0, 2)$$

$$N = C_3 \cdot (D(0, \frac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \frac{3}{2}) + D(0, 2)) - 2D(0, \frac{3}{2}) - 2D(0, 2) + N \cdot D(0, 2)$$

Dobimo

$$C_3 = \frac{N + 2D(0, \frac{3}{2}) + 2D(0, 2) - N \cdot D(0, 2)}{D(0, \frac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \frac{3}{2}) + D(0, 2)}$$
$$C_3 = \frac{N + \frac{2}{(1+R(0, \frac{3}{2}))^{3/2}} + \frac{2}{(1+R(0, 2))^2} - \frac{N}{(1+R(0, 2))^2}}{\frac{1}{(1+R(0, \frac{1}{2}))^{1/2}} + \frac{1}{1+R(0, 1)} + \frac{1}{(1+R(0, \frac{3}{2}))^{3/2}} + \frac{1}{(1+R(0, 2))^2}}$$
$$C_3 = \frac{100 + \frac{2}{1,039^{3/2}} + \frac{2}{1,041^2} - \frac{100}{1,041^2}}{\frac{1}{1,03^{1/2}} + \frac{1}{1,035} + \frac{1}{1,039^{3/2}} + \frac{1}{1,041^2}}$$
$$C_3 = 3,00 \text{ €}$$

Kupona v prvem letu znašata 3 €.

Kupona v drugem letu znašata 1 €.

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje obveznice) 2 točki.

Formula za vrednotenje obveznice, usklajena z besedilom naloge, 1* točka.

Višina enega od kuponov 1*+1 točka.

Višina drugega od kuponov 1 točka.

- d) Vlagatelj želi kupiti obveznice s konstantnimi polletnimi kuponi, vendar mu finančni posrednik te transakcije ne omogoča. Utemelji, da lahko z nakupom ustreznega števila obveznic z naraščajočimi in padajočimi polletnimi kuponi pripravi portfelj, ki izplačuje konstantne polletne kupone. [2 točki]

Rešitev

Prihodnja izplačila obveznic ter sestava portfelja so:

Obveznica \ Trenutek izplačila	0,5	1,0	1,5	2,0	Število obveznic
Naraščajoči kuponi	3	3	4	104	x
Padajoči kuponi	3	3	1	101	y

Kuponi portfelja bodo konstantni, če velja

$$3x + 3y = 4x + y \Rightarrow x = 2y.$$

Vlagatelj mora kupiti dvakrat toliko obveznic z naraščajočo kuponsko obrestno mero kot obveznic s padajočo kuponsko obrestno mero.

Konkretni količini obveznic izbere glede na višino sredstev, ki jih želi vložiti.

Točkovanje

Razmerje med števili obveznic (zadošča navedba enega konkretnega portfelja) 2 točki.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

4. Standardni terminski posel na črnomoško pšenico na čikaški blagovni borzi se nanaša na 50 ton pšenice. Četrletni strošek skladiščenja ene tone pšenice znaša 35 \$ in je plačljiv vnaprej na začetku vsakega obdobja skladiščenja. Privzemi, da se letna efektivna obrestna mera s časom ne spreminja in znaša 1 % za vsa dopetja.

Rezultate v dolarjih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) 31. oktobra znaša trenutna cena ene tone črnomoške pšenice 275,12 \$. Kolikšna je tedaj termimska cena ene tone te pšenice, ki je navedena v standardnem terminskem poslu z ročnostjo 30. aprila prihodnje leto? [8 točk]

Rešitev

Termimska cena ene tone pšenice je

$$K = F_0 = (S_0 + I(0, T))(1 + R)^T,$$

kjer poznamo

- trenutno ceno ene tone pšenice $S_0 = 275,12$ \$,
- obrestno mero $R = 0,01$ in
- ročnost posla $T = \frac{1}{2}$.

Z $I(0, T)$ je označena trenutna vrednost vseh stroškov skladiščenja.

Strošek skladiščenja obravnavamo kot dividendo z negativnim predznakom.

Skladiščnine v višini $d = 35$ USD plačamo v trenutkih $t_1 = 0$ in $t_2 = \frac{1}{4}$.

Sedanja vrednost teh stroškov je

$$I(0, \frac{1}{2}) = d + d(1 + R)^{-t_2} = 35 + 35 \cdot 1,01^{-1/4} = 69,91 \text{ \$}.$$

Termimska cena je

$$K = (275,12 + 69,91) \cdot 1,01^{1/2} = 346,75 \text{ \$}.$$

Alternativni pristop. Zaradi konstantne obrestne mere R lahko izraz za termimsko ceno zapišemo v obliki

$$K = (S_0 + d)(1 + R)^T + d(1 + R)^{T-t_2}$$

in izračunamo K .

Točkovanje

Formula za izračun termimske cene 2 točki.

Pravilna interpretacija S_0 , R in T ; 2 točki, če je eden od njih napačen, ostala dva pa pravilna, damo 1 točko.

Izraz za trenutno vrednost stroškov 1 točka.

Trenutna vrednost stroškov 1 točka.

Termimska cena 1+1 točka, v primeru alternativnega pristopa pa 1*+3 točke.*

Če tekmovalec stroške skladiščenja odšteje namesto prišteje, damo skupaj največ 6 točk.

- b) Veliko živilsko predelovalno podjetje si konec oktobra želi zagotoviti ceno pšenice, ki jo bo potrebovalo v predelavi v začetku maja prihodnje leto. Pričakujejo, da bodo takrat potrebovali 150 ton pšenice. Koliko standardnih terminskih poslov z ročnostjo 30. aprila morajo skleniti 31. oktobra? Koliko bodo za njih plačali? [2 točki]

Rešitev

Ker so en terminski posel nanaša na 50 ton pšenice, morajo skleniti (kupiti) tri standardne terminske posle.

Ob sklenitvi (nakupu) standardnega terminskega posla ni denarnih tokov.

Točkovanje

Število poslov 1 točka.

Denarni tok 1 točka.

- c) Čez tri mesece, to je 31. januarja, znaša trenutna cena ene tone črnomske pšenice 280,23 \$. Na borzi lahko sklenemo (nov) standardni trimesečni terminski posel na črnomske pšenice, možno pa je tudi kupiti (stare) terminske posle iz točke a).

Koliko tedaj znaša terminska cena ene tone pšenice, ki je navedena v novem terminskem poslu z ročnostjo 30. aprila? Kolikšen je tedaj denarni tok ob sklenitvi enega starega terminskega posla iz točke a)? [10 točk]

Rešitev

Trenutna cena ene tone pšenice 31. januarja je $S_{\frac{1}{4}} = 280,23$ \$.

Terminska cena za eno tono pšenice v novem trimesečnem terminskem poslu je

$$F_{1/4} = \left(S_{1/4} + I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right) \cdot (1 + R)^{1/2-1/4}.$$

Sedanja vrednost stroškov skladiščenja je $I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 35$ \$.

Terminska cena je

$$F_{1/4} = (280,23 + 35) \cdot 1,01^{1/4} = 316,02 \text{ $}.$$

Izročitvena cena pri starem terminskem poslu je $F_0 = 346,75$ \$ za eno tono pšenice.

Ker stari terminski posel določa višjo izročitveno ceno in se nanaša na 50 ton pšenice, je njegova vrednost za imetnika negativna in znaša

$$V_{1/4} = 50(F_{1/4} - F_0)(1 + R)^{-(1/2-1/4)} = 50 \cdot (316,02 - 346,75) \cdot 1,01^{-1/4} = -1532,68 \text{ $}.$$

Kdor kupi stari terminski posel (ob ročnosti bo zato kupil pšenico), ob nakupu prejme 1532,68 \$.

Ekvivalentno: Kdor proda stari terminski posel (ob ročnosti bo zato prodal pšenico), ob prodaji plača 1532,68 \$.

Točkovanje

Nova terminska cena $F_{1/4}$; 2*+2 točki.

Primerjava terminskih cen in pravilen sklep o smeri denarnega toka 2 točki.

Višina denarnega toka 2+2* točki.

Možna so manjša odstopanja zaradi zaokroževanja, ki jih upoštevamo.

Če tekmovalec stroške skladiščenja odšteje namesto prišteje, damo skupno največ 7 točk.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.