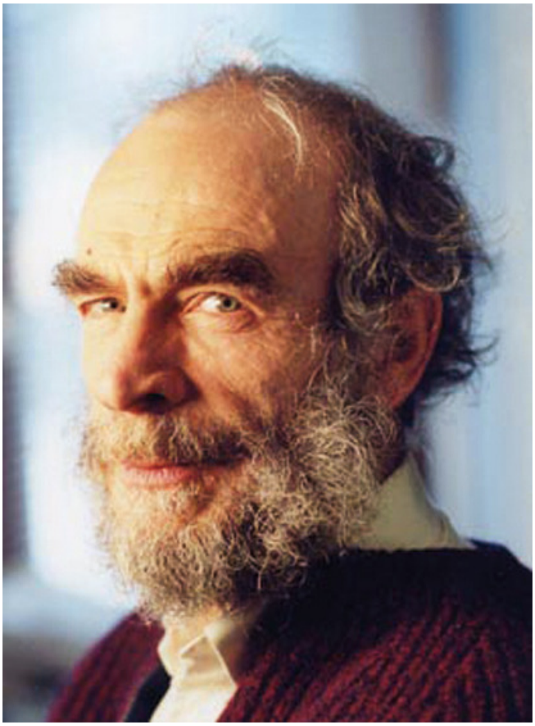
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2010
Letnik 57
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 57 • ŠT. 2 • STR. 41–80 • MAREC 2010

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2010, letnik 57, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

ABELOVA NAGRADA 2009 MIKHAELU GROMOVU

FRANC FORSTNERIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 32E10, 32E30, 32H02

Članek vsebuje nekaj osnovnih dejstev o življenju in delu slavnega norveškega matematika Nielsa Henrika Abela, o nagradi za matematiko, ki nosi njegovo ime, in o revolucionarnih dosežkih Mikhaela Gromova, prejemnika Abelove nagrade za leto 2009, na področju geometrije. V zadnjem delu je podrobneje predstavljen homotopski princip Oka-Grauert-Gromov v kompleksni analizi in geometriji.

THE 2009 ABEL PRIZE TO MIKHAEL GROMOV

The article brings some basic facts on the life and work of the famous Norwegian mathematician Niels Henrik Abel, on the establishment of the Abel Prize, and on the revolutionary contributions of the 2009 Abel Prize winner, Mikhael Gromov, to geometry. The last part contains an exposition of the Oka-Grauert-Gromov principle in complex analysis and geometry.

1. Uvod

Ob vprašanju, katera mednarodna nagrada na področju matematike je najpomembnejša in najprestižnejša, med matematiki ni popolnega soglasja: je to Fieldsova medalja ali Abelova nagrada? Vsekakor sta omenjeni nagradi na prvih dveh mestih, imata pa različen pomen.

Fieldsova medalja se podeljuje vsako četrto leto na mednarodnem matematičnem kongresu štirim prejemnikom do starosti 40 let, ki so dosegli najbolj originalne prebojne dosežke in s tem rešili kak zelo pomemben in dolgo časa odprt matematični problem. Simbolni pomen Fieldsove medalje je vsekakor dosti večji, kot bi lahko pripisali njeni sorazmerno skromni denarni vsoti.

Abelovo nagrado pa lahko prejme matematik, ki je pomembno zaznamoval določeno področje matematike skozi daljše obdobje in ki je prispeval vrsto ključnih dosežkov k njenemu razvoju. Nagrado podeljuje Norveška akademija znanosti enkrat na leto od leta 2003 dalje. Po statusu in ugledu je Abelova nagrada postala enakovredna Nobelovi nagradi na področju fizike, kemije in medicine.

Abelovo nagrado za leto 2009 je prejel *Mikhael Leonidovich Gromov* za svoje revolucionarne prispevke h geometriji. Nagrado je Gromov prejel iz rok norveškega kralja Haralda na prireditvi v Oslu 19. maja 2009.

V zapisu je na kratko predstavljeno življenje in delo genialnega norveškega matematika Nielsa Henrika Abela ter ozadje, ki je vodilo do ustanovitve Abelove nagrade. Zatem sledi oris nekaterih temeljnih prispevkov Mikhaela Gromova k različnim področjem matematike. V zadnjem delu je predstavljen princip Oka-Grauert-Gromov ter nekaj novejših prispevkov sodelavcev raziskovalne skupine *Analiza in geometrija* k temu področju.

2. Življenje in delo Nielsa Henrika Abela

Niels Henrik Abel (1802–1829) je prispeval revolucionarna odkritja na mnogih področjih matematike in po njem se danes imenuje vrsta matematičnih pojmov in objektov.

Kot študent na Univerzi v Kristianiji (današnjem Oslu, Norveška) je Abel skušal rešiti splošno enačbo pete stopnje

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,.$$

Mislil je že, da mu je uspelo, a je svojo napako pravočasno odkril. V članku v samostojni brošuri, objavljeni leta 1824, je dokazal, da se ta enačba ne da rešiti z radikali, to je z eksplicitno formulo, v kateri bi nastopali algebraični izrazi (vsote, produkti, koreni, ...) v koeficientih a_0, a_1, ..., a_5. Preprost primer enačbe pete stopnje, ki ni rešljiva z radikali, je $x^5 - x + 1 = 0$. S tem je Abel rešil problem, ki je izzival matematike od časov Bombellija in Vieta, in tako preprečil nadaljnje neuspešne ali napačne poizkuse reševanja. Podrobnejši dokaz je objavil leta 1826 v prvem zvezku *Crellove revije.* Abelov rezultat velja tudi za enačbe višje stopnje, enačbe do vključno četrte stopnje pa so vselej rešljive z radikali.

Abelov rezultat o nerešljivosti polinomskih enačb od pete stopnje dalje z radikali je nadaljeval drugi genialni matematik tedanjega časa, *Évariste Galois* (1811–1832) [14], ki je ob tem razvil začetke *Galoisove teorije.* Ta pomembna algebraična teorija povezuje grupe z razširitvami obsegov; grupe pri tem nastopajo kot grupe avtomorfizmov obsegov. V jeziku Galoisove teorije je polinomska enačba rešljiva z radikali natanko tedaj, ko je prirejena Galoisova grupa rešljiva (solvable). Pri splošni enačbi n-te stopnje je prirejena Galoisova grupa izomorfna grupi S_n vseh permutacij množice z n

elementi; za $n \geq 5$ grupa S_n ni rešljiva, medtem ko so grupe S_2, S_3 in S_4 rešljive.

Leta 1825 je Abel prejel štipendijo norveške vlade, ki mu je omogočila dvoletno gostovanje pri tedaj pomembnih matematikih v Berlinu, v Italiji in v Parizu. V tem času je raziskoval teorijo funkcij, še posebej eliptične in hipereliptične funkcije, ter nov razred funkcij, ki nosi njegovo ime. Napisal je več člankov o konvergenci vrst, o Abelovih integralih in o eliptičnih funkcijah.

Leta 1828 je Abel postal inštruktor na univerzi in vojaški šoli v Kristianiji (Oslu). *August Leopold Crelle* (1780–1855) mu je leta 1829 priskrbel profesorsko mesto na Univerzi v Berlinu in mu je 8. aprila 1829 pisal o tem. Bilo je prepozno, saj je Abel umrl za posledicami tuberkuloze dva dni pred tem v starosti 27 let.

Abelova dela so pomemben prispevek k matematiki zlasti na področju algebre, teorije grup, integralnega računa in teorije eliptičnih funkcij. Večino svojih znanstvenih del je objavil v reviji *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki jo je ustanovil Leopold Crelle leta 1826 in jo urejal do svoje smrti leta 1855. Že v prvem zvezku revije je bilo objavljenih kar pet Abelovih člankov. V drugem zvezku iz leta 1827 je izšel prvi del njegovih *Rechérches sur les fonctions elliptiques*, ki pomenijo začetek teorije dvojno periodičnih funkcij. Abelova matematična dela je zbral in uredil *Bernt Michael Holmboe* (1795–1850) in norveška vlada je omogočila objavo leta 1839. Leta 1881 je izšla razširjena izdaja, ki sta jo uredila *Peter Ludwig Mejdell Sylow* (1832–1918) in *Marius Sophus Lie* (1842–1899).

Abelovo delo je bilo v prvi vrsti teoretično, brez posebnega prizadevanja po praktični uporabi dosežkov. Kljub temu je bilo izjemno odmevno in je vodilo k razvoju številnih teorij, od katerih so mnoge kasneje doživele tudi praktično uporabo. Mnogo matematičnih objektov je dobilo pridevnik abelovski. Govorimo o Abelovi integralski enačbi, ki vodi do Abelovih funkcij. Komutativne grupe imenujemo *Abelove grupe*. Pomemben razred transcendentnih funkcij se imenuje po njem.

Čeprav ima matematika izjemen praktični in vzgojni pomen in je nepogrešljiva podstat vrsti drugih znanosti, vsebuje tudi bistvene elemente estetike – čistost oblike, preprostost v objemu kompleksnosti, eleganco in celo lepoto. V zgodovini sta bila praktični pomen in uporaba matematičnih izsledkov najpogosteje le nenačrtovan stranski produkt. Še posebej na primerih, kot sta Abel in Galois, nas zgodovina uči, da vrhunski matematiki potrebujejo predvsem ustvarjalno svobodo in stimulativno okolje za delo.

Abelova zgodba je značilna še v enem pogledu, ki pogosto preseneča znanstvenike na drugih področjih – kako mladi so lahko matematiki, ko pridejo do svojih najpomembnejših odkritij. Abel je naredil izjemne stvari do svojega sedemindvajsetega leta. Omenili smo tudi Évarista Galoisa, ki je pri osemnajstih letih položil temelje izjemno pomembne Galoisove teorije. Po drugi strani pa mnogi matematiki ostanejo znanstveno aktivni še celo potem, ko že prejemajo zasluženo pokojnino. V tem smislu veliki matematiki bolj spominjajo na velike skladatelje kot pa na znanstvenike na drugih področjih.

Več o življenju in delu Abela lahko bralec najde v Wikipediji [1] in številnih drugih virih.

3. O Abelovi nagradi

Ob stoletnici Abelovega rojstva leta 1902 si je znani norveški matematik Sophus Lie (po njem se imenujejo *Liejeve grupe*) prizadeval ustanoviti nagrado z Abelovim imenom. V svoja prizadevanja je vključil mednarodno matematično skupnost; norveški kralj Oskar II je ponudil pomoč. Znanstveno društvo v Kristianiji, predhodnik Norveške akademije znanosti v Oslu, je pripravilo potrebne dokumente za podeljevanje nagrade enkrat na vsakih pet let. Organiziran je bil festival v Kristianiji (Oslu) in v Abelovem rojstnem kraju Frøland, Abel pa je dobil spomenik v bližini kraljeve palače v Oslu.

Na žalost pa je prekinitev državne zveze Norveške s Švedsko leta 1905 ter posledična politična nestabilnost prekrižala te načrte.

Napori za ustanovitev nagrade so bili obnovljeni šele sto let kasneje, ob 200-letnici Abelovega rojstva v letu 2002, tokrat uspešno. Nagrado podeljuje Norveška akademija znanosti, nagrajenca pa izbere izmed nominiranih kandidatov petčlanska komisija v mednarodni sestavi.

Prva Abelova nagrada v znesku 6 milijonov norveških kron (približno 750 000 evrov) je bila podeljena 3. junija 2003, prejemnik je bil *Jean-Pierre Serre*. Naslednji nagrajenci so bili *sir Michael Francis Atiyah* in *Isadore M. Singer* (2004), *Peter D. Lax* (2005), *Lennart Carleson* (2006), *Srinivasa S. R. Varadhan* (2007), *John Griggs Thompson* in *Jacques Tits* (2008) ter *Mikhael Leonidovich Gromov* (2009). Več o Abelovi nagradi v [23].

4. O delu Mikhaela Gromova na področju geometrije

Geometrija je eno najstarejših in najbolj temeljnih področij matematike in znanosti nasploh. Njen izvor sega tisočletja nazaj v zgodovino, v čase Arhimeda, Evklida, Pitagore in drugih velikih začetnikov. Tedaj je znanje vzniklo iz potrebe najti odgovore na praktična vprašanja, kot je recimo oceniti velikost kakega zemljišča, iz potreb pri navigaciji na morju, pa tudi iz bolj ezoteričnih želja, kot je izračunati oddaljenost Lune od Zemlje.

Geometrija se ukvarja s študijem pojmov, kot so velikost, oblika, razdalja, medsebojna lega objektov, pa tudi z dosti bolj kompleksnimi lastnostmi ploskev in njihovih višje razsežnih analogov (mnogoterosti), kot je npr. ukrivljenost. *Einsteinova teorija relativnosti* sloni na *Lorentzevi geometriji.* Področje geometrije, ki se imenuje *umeritvena teorija* (angl. *gauge theory*), ima ključno vlogo v modernih teorijah matematične fizike, kot so *Donaldsonova* in *Seiberg-Wittenova teorija.*

V zadnjih petdesetih letih je geometrija doživela revolucionaren razvoj in spremembe. Mikhael Gromov je pri tem kreiral in vodil nekatere najpomembnejše smeri razvoja ter je razvijal originalne ideje, ki so podale nove perspektive v geometriji in posledično tudi v drugih področjih matematike. Imel je bistveno vlogo pri izgradnji moderne *Riemannove geometrije*, sodobnem področju matematike s koreninami v klasični Riemannovi geometriji (glej [20]). Je tudi eden od utemeljiteljev *globalne simplektične geometrije.* Njegovo najbolj znano in verjetno najslavnejše delo je vodilo v definicijo *Gromov–Wittenovih invariant* [19]. To je sedaj eno od izjemno aktivnih področij matematike, tesno povezavanih s področjem moderne teoretične fizike, ki se imenuje *kvantna teorija polja.*

Eno od orodij, ki jih je Gromov na ustvarjalen način uporabil pri razvoju simplektične geometrije, je *analiza kompleksnih krivulj v skoraj kompleksnih mnogoterostih.* To so mnogoterosti M sode dimenzije $2n$, katerih tangentni prostori T_pM so opremljeni z operatorjem J, katerega kvadrat je enak minus identiteti: $J^2 = -id$. Modelna ali standardna skoraj kompleksna struktura J_{st} na kompleksnem evklidskem prostoru $\mathbb{C}^n$ deluje kot množenje vektorja z imaginarno enoto $i = \sqrt{-1}$. S pomočjo tega operatorja J se Cauchy-Riemannov sistem enačb za holomorfne funkcije $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ zapiše v obliki

$$df_p(Jv) = i\, df_p(v)\,, \quad p \in \mathbb{C}^n, \quad v \in T_p\mathbb{C}^n \approx \mathbb{C}^n.$$

Pri tem je $df_p(v)$ vrednost diferenciala funkcije f v točki p v smeri tangentnega vektorja $v \in T_p\mathbb{C}^n$. Ni težko videti, da lahko koordinate v okolici neke točke p izberemo tako, da J sovpada s standardno strukturo J_{st} na tangentnem prostoru $T_p\mathbb{C}^n$, v splošnem pa tega pogoja ni mogoče izpolniti v vsaki točki neke odprte množice. Še več, na splošni skoraj kompleksni mnogoterosti je Cauchy-Riemannova enačba predoločena in nima nobenih netrivialnih rešitev, torej taka mnogoterost nima nekonstantnih lokalnih holomorfnih funkcij. Skoraj kompleksna struktura J se imenuje *integrabilna*, če lahko najdemo lokalne koordinate v okolici vsake točke $p \in M$, v katerih J ustreza standardni strukturi J_{st} na $\mathbb{C}^n$. Potrebni in zadostni pogoj za integrabilnost strukture nam podaja Newlander-Nirenbergov izrek [31].

Po drugi strani pa v vsaki skoraj kompleksni mnogoterosti (M, J) obstajajo *skoraj kompleksne krivulje*, npr. preslikave $f\colon \mathbb{D} \to M$ z enotnega diska $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ ali drugih Riemannovih ploskev, ki zadoščajo Cauchy-Riemannovi enačbi

$$df_p(iv) = J(df_p(v)), \quad p \in \mathbb{D}, \quad v \in T_p\mathbb{D}.$$

Gromov je iznašel kreativno uporabo takih krivulj pri izgradnji globalne simplektične geometrije in simplektične topologije [18]. *Simplektična mnogoterost* je realna mnogoterost M sode dimenzije $2n$ skupaj s simplektično formo ω; to je diferencialna 2-forma, ki je sklenjena ($d\omega = 0$) in neizrojena ($\omega^n \neq 0$). Model je evklidski prostor $\mathbb{R}^{2n}$ s koordinatami $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ in s formo $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$. Lokalno je vsaka simplektična forma ekvivalentna tej modelni formi.

Vzemimo sedaj trojico (M, ω, J), kjer je ω simplektična forma in J skoraj kompleksna struktura na M, tako da je $\omega(v, Jv) > 0$ za vsak neničeln tangenten vektor $v \in TM$. *Gromov-Wittenove invariante* simplektične mnogoterosti (M, ω) so racionalna števila, ki na določen način preštejejo psevdoholomorfne krivulje danega roda v (M, J), ki sekajo neki končen nabor podmnogoterosti v M. Te invariante, ki sta jih razvila Mikhael Gromov in Edward Witten, predstavimo kot homološke ali kohomološke razrede z racionalnimi koeficienti. Njihov glavni pomen je, da nam pomagajo razločevati simplektične mnogoterosti, ki se jih pred tem ni dalo ločiti. Poleg tega imajo bistveno vlogo pri razvoju teorije strun. Povezane so z vrsto drugih geometrijskih invariant, kot npr. Donaldsonove in Seiberg-Wittenove invariante. Za kompaktne simplektične 4-mnogoterosti je Clifford Taubes pokazal ekvivalenco med svojo različico Gromov-Wittenovih invariant in Seiberg-Wittenovimi invariantami. Več o tem lahko bralec najde v [19, 30].

Skoraj kompleksne krivulje so našle pomembno uporabo tudi v definiciji *Flœrove homologije* [35].

Delo Gromova na področju teorije grup s polinomialno rastjo je prineslo nove ideje, ki so za vedno spremenile naše razumevanje diskretnih neskončnih grup. Gromov je prepoznal geometrijske zakonitosti diskretnih grup in rešil vrsto dolgo odprtih problemov. Njegovi geometrijski argumenti so naredili komplicirane kombinatorične argumente veliko bolj naravne in učinkovite. Več o tem v originalnem skoraj 200 strani dolgem članku Gromova [21].

V zadnjem času se Gromov ukvarja tudi z novimi izzivi, ki jih matematiki prinaša biologija, še posebej molekularna biologija in genetske raziskave (glej monografijo [2]). V pogovoru, ki sem ga imel z njim dan po podelitvi nagrade na slovesni večerji v prostorih Norveške akademije znanosti, je med drugim priznal, da je genomika zelo hud izziv in da matematiki očitno še nismo iznašli prave vrste matematike za reševanje teh problemov.

5. Homotopski princip Oka-Grauert-Gromov

Gromov je bil vse od začetkov svoje matematične kariere eden od glavnih akterjev pri razvoju pojma *homotopski princip* ali, na kratko, *h-princip*. Veljavnost h-principa v nekem analitičnem ali geometričnem problemu pomeni, da obstaja analitična rešitev, v kolikor ni topoloških ovir. O tem je napisal monografijo, objavljeno v ugledni Springerjevi zbirki *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* [20].

Do pred dobrimi dvajsetimi leti je bil h-princip v kompleksni analizi omejen na klasični *Oka-Grauertov princip* o klasifikaciji holomorfnih vektorskih svežnjev in njim pridruženih glavnih svežnjev na Steinovih mnogoterostih (glej [32, 15, 16, 17, 24, 29]). *Steinove mnogoterosti* so tiste kompleksne mnogoterosti, ki jih lahko predstavimo kot kompleksne podmnogoterosti v kakem evklidskem prostoru $\mathbb{C}^n$; to je, kot množice $X \subset \mathbb{C}^n$, definirane s končno mnogo holomorfnimi enačbami oblike

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{\infty} c_{j_1,\ldots,j_n}\, z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_n^{j_n} = 0\,.$$

Vrsta mora konvergirati za vse $z \in \mathbb{C}^n$. Steinove mnogoterosti so torej analitičen analog afino algebraičnim mnogoterostim, ki so rešitve sistemov polinomskih enačb, s končnimi vsotami namesto vrst.

Glavni rezultat Oka-Grauertove teorije je, da se topološka klasifikacija holomorfnih vektorskih svežnjev in, splošneje, glavnih svežnjev na vsaki Steinovi mnogoterosti X ujema z njihovo holomorfno klasifikacijo. Bistvo dokaza je v tem, da lahko vsako zvezno preslikavo $X \to M$ v poljubno kompleksno homogeno mnogoterost M homotopsko deformiramo do neke holomorfne preslikave. Če uporabimo ta rezultat za preslikave $X \to G_k(\mathbb{C}^n)$ v Grassmanovo mnogoterost vseh kompleksnih k-razsežnih podprostorov v $\mathbb{C}^n$ in pri tem opazujemo povleke univerzalnega vektorskega svežnja $U_{k,n} \to G_k(\mathbb{C}^n)$ na X, takoj sledi, da ima vsak topološki kompleksni vektorski sveženj nad X strukturo holomorfnega vektorskega svežnja. Podobno ugotovimo, da izomorfizmi med dvema vektorskima svežnjema ustrezajo prerezom nekega pridruženega glavnega svežnja; ker je vsak zvezen prerez homotopen nekemu holomorfnemu prerezu, sledi, da je vsak topološki izomorfizem homotopen nekemu holomorfnemu izomorfizmu.

Ključno posplošitev z izjemno zanimivimi posledicami je Gromov orisal v članku [22] v letu 1989. Tako se je rodila *teorija Oka-Grauert-Gromov* o tem, kdaj lahko vsako zvezno preslikavo poljubne Steinove mnogoterosti X v dano kompleksno mnogoterost Y zvezno deformiramo v neko holomorfno preslikavo. Pri deformaciji želimo ohraniti preslikavo holomorfno in poljubno blizu začetni preslikavi na ustreznih podmnožicah v X, kjer je le-ta že holomorfna. Poleg tega želimo hkrati obravnavati vse preslikave iz neke družine preslikav $f_p\colon X \to Y$, ki so zvezno odvisne od parametra p v primernem prostoru parametrov. Če ima Y to lastnost, se imenuje *mnogoterost Oka*.

Analogno vprašanje nas zanima za družine mnogoterosti Y_x, ki so vlakna $\pi^{-1}(x)$ neke holomorfne submerzije $\pi\colon Y \to X$ kompleksne mnogoterosti Y na Steinovo mnogoterost X. Problem je najti *holomorfne prereze* $f\colon X \to Y$, to je preslikave, ki zadoščajo pogoju $f(x) \in Y_x$ za vsak $x \in X$. Glavno vprašanje je, kdaj lahko vsak zvezen prerez deformiramo v neki holomorfen prerez. Gromov je našel preprost zadostni pogoj na vlakna Y_x, ki zahteva obstoj dovolj velike množice holomorfnih preslikav $\mathbb{C}^k \to Y_x$; take mnogoterosti danes imenujemo *eliptične* v smislu Gromova.

Enega najpomembnejših primerov te vrste dobimo, če vzamemo neki holomorfen vektorski sveženj $E \to X$, nato pa iz totalnega prostora E odstranimo neko analitično množico $A \subset E$, torej je $Y = E \setminus A$. Če je kompleksna dimenzija vsakega vlakna $A_x \subset E_x \cong \mathbb{C}^k$ največ $k-2$ in če je A dovolj pohlevna v neskončnosti, potem lahko vsak zvezen prerez $f\colon X \to E \setminus A$, ki se izogne množici A, deformiramo v holomorfen prerez, tako da se celotna homotopija izogne A.

Kot je pri Gromovu v navadi, je dokaze svojih rezultatov le orisal v glavnih potezah; običajno je potrebno še precej napornega dela drugih matematikov, da se njegovi dosežki postavijo na trdne temelje in da jih razume širši krog matematikov. V danem primeru sem v letu 1997, ko sem se začel zanimati za te probleme, povprašal nekaj ključnih kolegov v svetu, ali so bile podrobnosti že narejene in ali so rezultati Gromova razumljeni. Odgovor je bil negativen, a rezultati so bili medtem že uporabljeni v nadaljnjih delih in postalo je tem bolj pomembno, da bi se stvari razčistile. V nekaj letih sva to naredila z Jasno Prezelj in rezultate objavila v seriji člankov [10, 11, 12]. Ključni prispevek pri razumevanju splošnega rezultata o prerezih submerzij je dala J. Prezelj v svoji doktorski disertaciji (Univerza v Ljubljani, 2000). Pred nedavnim je Prezljeva posplošila rezultat Gromova na širši razred 1-konveksnih mnogoterosti, ki so prave holomorfne modifikacije Steinovih prostorov [34].

V svojem članku [22] je Gromov med drugim zastavil vprašanje, ali je mogoče karakterizirati lastnost Oka dane kompleksne mnogoterosti Y s kako preprosto Rungejevo aproksimacijsko lastnostjo za holomorfne preslikave $\mathbb{C}^n \to Y$. Ta problem sem rešil v člankih [7, 9], kjer sem pokazal, da je kompleksna mnogoterost Y mnogoterost Oka natanko tedaj, ko lahko vsako holomorfno preslikavo $U \to Y$, definirano na neki odprti okolici $U \subset \mathbb{C}^n$ dane kompaktne konveksne množice K v $\mathbb{C}^n$, aproksimiramo enakomerno na K s holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C}^n \to Y$. Ta karakterizacija bistveno olajša preverjanje lastnosti Oka v konkretnih primerih. Ena od preprostih, a zelo uporabnih posledic je naslednja: Denimo, da sta E in B kompleksni mnogoterosti in je $\pi\colon E \to B$ holomorfen sveženj, katerega vlakno je mnogoterost Oka. Potem je E mnogoterost Oka natanko tedaj, ko je B mnogoterost Oka.

Druga karakterizacija mnogoterosti Oka je povezana s klasičnim razširitvenim izrekom Henrija Cartana (1904–2008), ki posploši Weierstrassov interpolacijski izrek za holomorfne funkcije ene spremenljivke. Cartanov izrek pove, da se vsaka holomorfna funkcija $f\colon A \to \mathbb{C}$ z zaprte analitične podmnožice A v neki Steinovi mnogoterosti X razširi do holomorfne funkcije $F\colon X \to \mathbb{C}$. Sedaj postavimo enako vprašanje s tem, da obseg kompleksnih števil $\mathbb{C}$ nadomestimo z neko kompleksno mnogoterostjo Y. Zaradi topoloških ovir dane preslikave $f\colon A \to Y$ s podmnožice $A \subset X$ v splošnem ni mogoče razširiti niti do zvezne preslikave $X \to Y$. Relevantno vprašanje se glasi:

Ali je mogoče vsako zvezno razširitev $F\colon X \to Y$ dane holomorfne preslikave $f\colon A \to Y$ deformirati v holomorfno preslikavo $F_1\colon X \to Y$, tako da deformacija miruje na A?

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ X \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Odgovor je pozitiven natanko tedaj, ko je Y mnogoterost Oka.

Med Riemannovimi ploskvami (to so enorazsežne kompleksne mnogoterosti) so mnogoterosti Oka ravno tiste, ki niso hiperbolične; poleg kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ so to še Riemannova sfera $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$, punktirana ravnina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ter kompleksni torusi (to so holomorfni kvocienti ravnine $\mathbb{C}$ po neki dvojno generirani grupi translacij). Po izreku Riemann-Koebe so vse preostale Riemannove ploskve holomorfni kvocienti diska $\mathbb{D}$ in so zato hiperbolične, kar pomeni, da je vsaka holomorfna preslikava ravnine $\mathbb{C}$ v tako ploskev konstantna. Med višje razsežnimi kompleksnimi mnogoterostmi sestavljajo mnogoterosti Oka bistveno bogatejšo družino (glej [7, 8]).

V [3] sva z Barbaro Drinovec Drnovšek posplošila omenjene rezultate na holomorfne preslikave $D \to Y$ z omejenih strogo psevdokonveksnih domen D v Steinovih mnogoterostih, ki so zvezne ali gladke do roba domene. V drugi smeri sva skupaj z Markom Slaparjem pokazala, da homotopski princip velja za preslikave $X \to Y$ Steinovih mnogoterosti X v poljubno kompleksno mnogoterost Y, če je dovoljeno na X homotopno spremeniti kompleksno strukturo J v neko drugo Steinovo strukturo J' [13]. V primeru Steinovih ploskev ($\dim_{\mathbb{C}} X = 2$) je treba v splošnem zamenjati tudi gladko strukturo na X in pri tem pridemo do zanimivih povezav s 4-dimenzionalno topologijo.

V zadnjem obdobju je Finnur Lárusson obravnaval teorijo Oka-Grauert-Gromov s sredstvi abstraktne homotopske teorije (glej [26, 27, 28]). V ta namen je zgradil modelno kategorijo, v kateri so Steinove mnogoterosti *kofibrantne* (začetni objekti), mnogoterosti Oka pa *fibrantne* (končni objekti). Teorija se naravno razširi na holomorfne preslikave (morfizme). Holomorfna preslikava $\pi\colon E \to B$ med dvema kompleksnima mnogoterostma se imenuje *preslikava Oka*, če je topološka fibracija (kar pomeni, da ima lastnost dviga homotopije) in če velja homotopski princip za dvig holomorfnih preslikav s Steinovih mnogoterosti. Slednje pomeni, da je za vsako holomorfno preslikavo $f\colon X \to B$ z neke Steinove mnogoterosti X vsak njen zvezen dvig $F\colon X \to E$ homotopen nekemu holomorfnemu dvigu.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Preslikave Oka so ravno fibracije v Lárussonovi modelni kategoriji.

Med uporabami principa Oka-Grauert-Gromov omenimo finejšo analizo vektorskih svežnjev in, splošneje, koherentnih analitičnih snopov na Steinovih mnogoterostih, konstrukcije holomorfnih vložitev in imerzij Steinovih mnogoterosti v evklidske prostore minimalne dimenzije [4, 33], homotopski princip za holomorfne imerzije [20] in submerzije [6] Steinovih mnogoterosti, pa vse do najnovejših uporab pri faktorizaciji nilhomotopnih holomorfnih matričnih funkcij $X \to SL_n(\mathbb{C})$ z vrednostmi v grupi $SL_n(\mathbb{C})$ [25].

Bralec, ki bi ga utegnila zanimati teorija Oka-Grauert-Gromov ter njene ramifikacije v kompleksni geometriji, lahko nadaljuje s poljudnim člankom [5]. Obsežnejša monografija na to temo je v pripravi.

LITERATURA

[1] *Niels Henrik Abel*, http://sl.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel .

[2] A. Carbone in M. Gromov: *Mathematical slices of molecular biology. With an introduction in French by Éric Westhof*, Gaz. Math. No. **88** (2001).

[3] B. Drinovec Drnovšek in F. Forstnerič: *Approximation of holomorphic mappings on strongly pseudoconvex domains*, Forum Math. **20** (2008), str. 817–840.

[4] Y. Eliashberg in M. L. Gromov: *Embeddings of Stein manifolds*, Ann. Math. **136** (1992), str. 123–135.

[5] F. Forstnerič: *Princip Oka-Grauert-Gromov in uporaba v kompleksni geometriji*, http://www.fmf.uni-lj.si/~forstneric/.

[6] F. Forstnerič: *Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds*, Acta Math. **191** (2003), str. 143–189.

[7] F. Forstnerič: *Runge approximation on convex sets implies Oka's property*, Ann. Math. (2) **163** (2006), str. 689–707.

[8] F. Forstnerič: *Holomorphic flexibility properties of complex manifolds*, Amer. J. Math. **128** (2006), str. 239–270.

[9] F. Forstnerič: *Oka Manifolds*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Math., **347** (2009), str. 1017–1020.

[10] F. Forstnerič in J. Prezelj: *Oka's principle for holomorphic fiber bundles with sprays*, Math. Ann. **317** (2000), str. 117–154.

[11] F. Forstnerič in J. Prezelj: *Oka's principle for holomorphic submersions with sprays*, Math. Ann. **322** (2002), str. 633–666.

[12] F. Forstnerič in J. Prezelj: *Extending holomorphic sections from complex subvarieties*, Math. Z. **236** (2001), str. 43–68.

[13] F. Forstnerič in M. Slapar: *Stein structures and holomorphic mappings*, Math. Z. **256** (2007), str. 615–646.

[14] *Évariste Galois*, http://sl.wikipedia.org/wiki/Évariste_Galois .

[15] H. Grauert: *On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), str. 460–472.

[16] H. Grauert: *Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen*, Math. Ann. **133** (1957), str. 450–472.

[17] H. Grauert: *Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen*, Math. Ann. **135** (1958), str. 263–273.

[18] M. Gromov : *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), str. 307–347.

[19] M. Gromov: *Soft and hard symplectic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley 1986), str. 81–98, Amer. Math. Soc., Providence 1987.

[20] M. Gromov: *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 9, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[21] M. Gromov: *Hyperbolic groups*, v *Essays in group theory*, str. 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer-Verlag, New York 1987.

[22] M. Gromov: *Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 4, str. 851–897.

[23] *Gromov receives 2009 Abel Prize*, Notices Amer. Math. Soc. **56** (2009) 6, str. 730–731.

[24] G. M. Henkin in J. Leiterer: *The Oka-Grauert principle without induction over the base dimension*, Math. Ann. **311** (1998) 1, str. 71–93.

[25] B. Ivarsson in F. Kutzschebauch: *A solution of Gromov's Vaserstein problem*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **346** (2008) 23–24, str. 1239–1243.

[26] F. Lárusson: *Excision for simplicial sheaves on the Stein site and Gromov's Oka principle*, Internat. J. Math. **14** (2003), str. 191–209.

[27] F. Lárusson: *Model structures and the Oka principle*, J. Pure Appl. Algebra **192** (2004), str. 203–223.

[28] F. Lárusson: *Mapping cylinders and the Oka principle*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), str. 1145–1159.

[29] J. Leiterer: *Holomorphic vector bundles and the Oka-Grauert principle*, Itogi Nauki i Tekhniki, Current problems in mathematics, Fundamental directions **10**, str. 75–121, 283, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moskva, 1986.

[30] D. McDuff in D. Salamon: *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications 52, American Mathematical Society, Providence, 2004.

[31] A. Newlander in L. Nirenberg: *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), str. 391–404.

[32] K. Oka: *Sur les fonctions des plusieurs variables. III: Deuxième problème de Cousin*, J. Sc. Hiroshima Univ. **9** (1939), str. 7–19.

[33] J. Prezelj: *Interpolation of embeddings of Stein manifolds on discrete sets*, Math. Ann. **326** (2003), str. 275–296.

[34] J. Prezelj: *A relative Oka-Grauert principle for holomorphic submersions over* 1-*convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010) 8, str. 4213–4228.

[35] Z. Szabó: *Lecture notes on Heegaard Floer homology. Low dimensional topology*, IAS/Park City Math. Ser. 15. (2009), str. 197–228.

O PROFESORJU JOSIPU PLEMLJU

ANTON SUHADOLC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A70

V sestavku omenjam nekaj dogodkov iz življenja profesorja Josipa Plemlja, ki so matematični javnosti verjetno nepoznani.

ABOUT PROFESSOR JOSIP PLEMELJ

In the article some facts about the life of professor Josip Plemelj are mentioned that are probably unknown to the mathematical public.

O življenju in delu profesorja Plemlja je profesor Ivan Vidav leta 1973 napisal knjižico ob stoletnici rojstva. Tu je avtor zbral najvažnejše podatke o Plemljevem življenju, navedel njegove izredne znanstvene dosežke in jih tudi na kratko opisal. Pred leti sem opravil pregled Plemljeve zapuščine in jo pripravil za prevzem v Arhiv Slovenije, kjer je dostopna vsakemu in gotovo na varnem mestu. Med zapuščino je med drugim tudi mnogo kartic in pisem, ki jih je profesor prejel od leta 1906 do svoje smrti leta 1967. Pisem je skoraj 1600, vendar to gotovo niso vsa pisma, ki jih je v tem času prejel, celo sam vem za pismo, ki ga v tej zbirki ni. V zapuščini je tudi nekaj deset osnutkov pisem, ki jih je profesor namenil drugim. Ko pa sem študiral življenje in delo drugega rektorja ljubljanske univerze, profesorja matematike Riharda Zupančiča, sem spoznal še nekaj ne nepomembnih dogodkov iz življenja profesorja Plemlja.

V tem sestavku bom govoril o treh dogodkih iz Plemljevega življenja, ki v knjižici [1] niso omenjeni. O povezavi med profesorjema Plemljem in Zupančičem kaže najprej dopisnica iz leta 1910, ki jo je napisal profesor Zupančič, podpisani pa so na njej nekateri drugi matematiki, Plemljevi kolegi. Že ta dopisnica kaže na to, da sta se profesorja Plemelj in Zupančič, ki je bil 5 let mlajši od Plemlja, dobro poznala že takrat.

Profesor Plemelj je leta 1907 odšel na univerzo v Černovice, ki so danes v Ukrajini, kot redni profesor matematike. Tu je deloval do leta 1914, ko ga je bližina fronte pregnala in je odšel z družino domov na Bled. Ta leta in še nekaj let prej so bila prav gotovo najbolj plodna v njegovi matematični karieri. V knjigi o Plemlju [1] je profesor Vidav omenil, da je bil Plemelj velik nasprotnik avstrijske monarhije. Oblasti so ga imele na sumu, da simpatizira z Rusijo. Zato ni čudno, da je bil Plemelj na Bledu v nekem smislu konfiniran: iz dokumenta *Osebni in zglasilni ukaz* iz leta 1916 vidimo, da se je moral pri odhodu in vrnitvi na Bled oglasiti pri ustreznih oblasteh. Vpoklicu v vojake se je dolgo izogibal, po vsej verjetnosti zaradi bolehnosti, imel je težave z želodcem. Ohranjeno je zdravniško potrdilo, na katerem piše, da mora zaradi ran na želodcu uživati le kruh iz *prvovrstne* moke. Ko je Avstriji v vojni že bolj slaba predla, so ga konec leta 1916 vpoklicali v Lvov v četo rezervnih stražarjev. Po dveh mesecih je bil premeščen v Gross Heilendorf (Moravska). Iz tega časa je ohranjen dopis, ki ga je rektor univerze v Černovicah naslovil na cesarsko-kraljevo ministrstvo, v katerem se pritožuje, da s Plemljem trdo ravnajo, drugače kot z drugimi mobiliziranimi profesorji, ne dovolijo mu spati zunaj kasarne, drugi pa da imajo popolno svobodo gibanja. Nato pripoveduje, kako priznan znanstvenik je profesor Plemelj in kakšna škoda bi bila za Avstrijo, če bi se Plemlju zaradi slabega zdravja kaj nesrečnega primerilo. Pismo je delovalo: ohranjeni dopis vojaških oblasti priča, da so Plemlju dovolili prenočevanje v gostilni Beseda in da sme biti v gostilni do 11. ure zvečer.

Profesor Zupančič je bil od leta 1915 kot vojak v inženirski enoti na Dunaju, kjer se je ukvarjal z balistiko in numerično analizo. Ko je izvedel, kje je Plemelj, je skušal doseči, da bi ga premestili v inženirsko enoto na Dunaju. Ta Zupančičev trud osvetljuje 11 pisem, kartic in brzojavov, ki jih je Zupančič pošiljal Plemlju. Med drugim piše, da je govoril z rektorjem Pommeranzem, z majorjem Portenschlagom, generalmajorjem Putzekom in ekselenco feldmaršalom Tomšetom iz Savskega Dola. Trajalo je kar nekaj mesecev, do aprila 1917, da je bila premestitev na Dunaj dosežena, kar je Plemelj že nestrpno pričakoval. Težave so izvirale iz dejstva, da je bil Plemelj, kot smo že omenili, pri oblasteh slabo zapisan. To spoznamo tudi iz Plemljeve lastnoročno napisane izjave z 20. avgusta 1917, v kateri daje častno besedo, da niti kdaj prej ni pripadal nobeni tajni organizaciji, niti v takšno ne bo nikoli vstopil. Plemelj je na Dunaju stanoval pri Zupančiču in njegovi sopotnici (s katero se je poročil v Ljubljani šele leta 1926, po pravoslavnem obredu) na Rittergasse 6 na Dunaju. Iz nekega vojaškega dokumenta razberemo, da je bil Zupančič Plemlju predpostavljen. Plemelj je bival kot vojak na Dunaju do junija 1918, ko se je vrnil k svoji družini na Bled. Po vsem povedanem se moremo upravičeno vprašati, ali ni Zupančič morda Plemlju rešil življenja ali mu vsaj prihranil obilico trpljenja, ki bi mu bil kot bolnik izpostavljen v aktivnih četah.

Iz popisa pisem, ki jih je Plemelj prejel, vidimo, da je na drugem mestu po poslanih (in ohranjenih) pismih profesor fizike Michael von Radakovic[1], (Gradec 1866–Gradec 1934). Ohranjenih je 96 pisem in še enajst pisem, ki so jih Plemlju poslali soproga in sinova po smrti profesorja Radakovica leta 1934. (Sin Theodor je bil profesor matematike na graški univerzi, a je mlad umrl, sin Konstantin pa je bil na isti univerzi profesor filozofije.) Radakovic je bil nekaj let starejši od Plemlja, bila pa sta sedem let kolega na univerzi v Černovicah. Radakovic je bil gotovo eden od Plemlju najbližjih prijateljev. Po prvi svetovni vojni je postal vodja fizike na univerzi v Gradcu. V letih 1924/25 je bil tudi dekan naravoslovne fakultete. Iz pisem Plemlju in iz osnutka pisma, ki ga je Plemelj poslal Radakovicu, sklepamo, da je v letu 1927 ali 1928 Plemelj dobil od univerze v Gradcu vabilo, naj sprejme mesto rednega profesorja matematike v Gradcu. Plemelj je ponudbo v pismu 19. maja 1928 s težkim srcem zavrnil. Navajal je, da je v depresiji, da je soproga bolna z neugotovljeno diagnozo, da že 14 let ni pri pravem (znanstvenem) delu. Odločil da se je pomagati tukajšnjim institucijam pri vzgoji mladega roda in da se je s situacijo sprijaznil. Tudi ni več gotov, ali bi mogel izpolniti pričakovanja graške univerze. Končno piše Radakovicu, da je bilo pisanje tega pisma najtežje v njegovem življenju.

Res, od leta 1914 naprej je bilo znanstveno delo Plemlju zaradi vojne onemogočeno, po vojni pa se je odločil, da bo deloval na ljubljanski univerzi, kjer je bil leta 1918 izvoljen za prvega rektorja univerze. Razmere za delo, za nabavo literature in za stike s kolegi v tujini so bile v kraljevini Jugoslaviji v začetku izredno neugodne. Kot posledica vsega tega je profesor Plemelj objavil le nekaj manjših znanstvenih prispevkov.

Po vsej verjetnosti je z Radakovicem povezan še en dogodek. V letih 1929–1931 je Plemelj univerzi predlagal, da za profesorja fizike nastavi dr. Stjepana Mohorovičića, ki bi nadomestil dr. Valentina Kušarja. Ta večji del časa ni predaval zaradi težav z očmi. V komisijo za pisanje strokovnega mnenja sta bila imenovana profesorja Plemelj in Zupančič. Zupančič je mimo Plemlja pridobil neformalna strokovna mnenja o kandidatu od profesorjev Karla Wolfa, Philippa Franka, Adalberta Rubinowicza, Thirringa in verjetno Wirtingerja. Vsa mnenja so bila negativna, tako o pomenu kandidatovih strokovnih del (v glavnem je dokazoval, da Einstein nima prav) kot v pogledu osebnostnih lastnosti. Čeprav so bili omenjeni pisci mnenj

[1] V nekaterih dokumentih je priimek zapisan kot Radaković.

Plemljevi prijatelji ali znanci, je Plemelj iz komisije izstopil, ker so bila mnenja pridobljena mimo njega. Seveda je potem tudi Zupančič podal ostavko na članstvo v komisiji. Vsiljuje se mi domneva, da je morda izgovor Plemlju prišel prav, da mu ni bilo treba Radakovicu pojasnjevati eventualne odklonitve kandidata. Zdi se, da sta se kot posledica tega dogodka profesorja Plemelj in Zupančič začela razhajati. Dokončno sta se njuni poti ločili v času tik pred drugo svetovno vojno, zaradi razlik v političnih pogledih. Uradne zadeve sta še vedno urejala korektno, ves čas pa je iz Zupančičevih pisem in dopisov opaziti njegovo občudovanje Plemlja kot matematika.

Tudi sicer profesor Plemelj ni imel sreče s pridobivanjem učiteljev fizike. Kmalu po ustanovitvi univerze v Ljubljani je skoraj eno leto nagovarjal fizika Adalberta Rubinowicza, svojega bivšega učenca v Černovicah, naj pride v Ljubljano za profesorja teoretične fizike. Končno je Rubinowitz prišel, a zaradi slabih razmer v tedanji Jugoslaviji je po treh semestrih Ljubljano zapustil.

Plemljeve odločitve, da po koncu prve svetovne vojne odide v Ljubljano in pomaga pri ustanovitvi univerze, njenem delovanju in vzgoji mladih matematikov, morda ne cenimo dovolj; zanj je bila to velika žrtev, opustitev možnosti za sijajno kariero. Naj to ugotovitev ilustriram z dvema primeroma.

Eden od Plemljevih kolegov in prijateljev iz Černovic je bil tudi profesor matematike A. von Boehm. Ohranjenih je 53 njegovih pisem Plemlju iz let 1908–1927, ko je verjetno preminil. V Černovicah sta bila tudi soseda in družini sta imeli tesne stike. Tu navajam nekaj odlomkov iz pisem iz leta 1922 in 1925. Podobna pisma, iz katerih veje občudovanje matematika Plemlja, so mu pisali tudi nekateri drugi kolegi.

Kar naprej se ukvarjam z računanjem. Pri tem mi Ti lebdiš pred očmi in pri meni si napredoval v svetnika. „Sveti Plemelj“ mi večkrat uide, če mi računi nagajajo. Pogosto mislim na Černovice. Tudi v Tvojem imenu obžalujem, da se je vse spremenilo. Če bi ostalo tako, kot je bilo, bi bil Ti danes profesor na Dunaju, v Leipzigu, Goettingenu ali Berlinu, na kraju, kjer bi Tvoje znanje in sposobnost blestela v dobro človeštva nasploh in znanosti še posebno. Kje pa si sedaj? V Ljubljani! Saj bi crknil od smeha, če to ne bi bilo tako žalostno. Možak kot Ti bi moral biti na pravem mestu, ne pa postavljen na hladno, kjer se boš skisal. Upam, da boš še kaj znanstveno delal, škoda bi bilo, če ne bi, saj si matematik kot Euler, Gauss in Bessel;

Tvoji sodobniki v primerjavi s Teboj zbledijo.[2]

Iz pisma iz leta 1925 povzemam:

Bojim se, da se kisaš v Ljubljani, saj ni nič več slišati o Tebi, res škoda. Ti spadaš kam drugam. Tudi Ti si vojna žrtev.

Plemljevi odgovori na ti dve in druga pisma niso poznani. Na vsebino teh odgovorov moremo sklepati iz pisma, ki ga je pisal profesorju Hermannu Weylu. Ta mu 21. januarja 1952 piše, da bo pomagal fiziku Janezu Kuščerju pridobiti štipendijo za študij na Institute for Advanced Study (Princeton, ZDA). Plemljevo prošnjo da bo dostavil na ustrezna mesta. Med drugim piše:

Zelo sem vesel, da sem po dolgih letih spet slišal o Vas. Od tedaj, od naše skupne matematične mladosti, ko ste objavili čudovito razpravo o Riemannovem problemu o monodromiji in nagrajeni spis o potencialni teoriji, sem Vaš veliki občudovalec. Upam, da ste v dobrem zdravju.

Iz koncepta Plemljevega pisma, namenjenega Weylu, navajam odlomek:

Pogled v najino oddaljeno matematično mladost me navdaja z velikim veseljem, pa tudi z otožnostjo. Lastnost starih ljudi gledati v preteklost – prihodnost jim ničesar ne obeta – je pri meni toliko bolj poudarjena, ko mi je prisila časa odtegnila možnost udejstvovati se v skladu z mojo naravo. Oviran promet po 1. svetovni vojni, strokovna osamljenost in na novi ustanovi potreba po organizacijskih poslih, ki jih ne obvladam, ter mnoge druge ovire so povzročile, da nisem od tedaj bil skoraj nič drugega kot učitelj. Vedno me gane, ko se oglasijo stari kolegi, ki so svojo kariero slavno zaključili.

Res žalostno, da ne rečem obupano pismo. Trdno pa sem prepričan, da je v Plemljevo osebno neprijazno usodo posijal žarek zadovoljstva s profesorjem Ivanom Vidavom. Mislim, da ga je on prepričal, da njegova žrtev le ni bila zaman, saj je vzgojil vrednega naslednika.

LITERATURA

[1] Ivan Vidav, *Josip Plemelj ob stoletnici rojstva*, DZS, Ljubljana 1973.

[2] Anton Suhadolc, *Profesor Rihard Zupančič*, Samozaložba, Ljubljana 2000.

[2]Ta citat kot tudi vse druge je iz nemščine prevedel avtor.

OB DVESTOLETNICI ARAGOJEVEGA POSKUSA

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 07.50.Hp, 01.65.+g

François Arago je leta 1810 poskusil izmeriti, kako se hitrost svetlobe spremeni zaradi gibanja Zemlje. To je bil prvi v vrsti podobnih neuspešnih poskusov. Ob dvestoletnici se zdi vredno opisati Aragojev poskus in osvetliti Aragojevo izhodišče. Da bi pojasnil izid poskusa, je Augustin Fresnel uvedel zamisel, da del etra sledi gibanju telesa. Dodanih je nekaj podatkov o Aragojevem življenju in delu.

AT THE BICENTENARY OF ARAGO'S EXPERIMENT

François Arago in 1810 tried to measure the change of the light velocity due to the motion of the Earth. This was the first in a series of similar unsuccessful experiments. At the bicentenary it appears worthwhile to describe Arago's experiment and to elucidate Arago's starting point. To explain the outcome of the experiment Augustin Fresnel introduced the idea of aether drag. Some facts of Arago's life and work are added.

Isaac Newton naj bi z *Optiko* leta 1704 in s svojim ugledom povzročil, da je v 18. stoletju prevladala delčna slika svetlobe. V njej so curek svetlobe opisali z množico zelo hitrih delcev. Upoštevati pa kaže, da vsi sodobniki te slike niso sprejeli in tudi tisti, ki so jo sprejeli, niso vsi mislili na točkaste delce. V optiki, ki je v razvoju precej zaostajala za mehaniko, so uvajali in preizkušali le delne zamisli. Večinoma so sledili Newtonu v prepričanju, da prozorna snov privlači svetlobne delce in se zato ti v njej gibljejo hitreje kot v praznem prostoru.

Tako so pojasnili, da se curek delcev pri prehodu iz zraka v prozorno snov lomi proti vpadni pravokotnici. Privzeli so, da se ob lomu poveča na mejo pravokotna komponenta hitrosti, komponenta, vzporedna z mejo, pa se ohrani. Iz enačbe $c_{1\|} = c_{2\|}$ ter enačb $c_1^2 = c_{1\|}^2 + c_{1\perp}^2$ in $c_2^2 = c_{2\|}^2 + c_{2\perp}^2 = c_{1\|}^2 + c_{2\perp}^2$ sledi:

$$c_{2\perp}^2 = c_{1\perp}^2 + c_2^2 - c_1^2\,. \tag{1}$$

Iz prve enačbe je izhajal tudi lomni zakon $c_1 \sin\alpha = c_2 \sin\beta$ z vpadnim kotom α in lomnim kotom β v obliki, ki jo je izpeljal René Descartes leta 1637.

Leta 1810 se je Arago lotil opazovanja zvezd. Tedaj je še stavil na delčno sliko. Po opazovanju zvezdne aberacije so poznali hitrost svetlobe. James Bradley je ugotovil, da zvezde v bližini pola ekliptike v letu dni na nebu opišejo krožec s kotnim polmerom približno 20″. Leta 1729 je to pojasnil z razmerjem med hitrostjo Zemlje pri gibanju okoli Sonca $v = 30$ km/s in nanjo pravokotno hitrostjo svetlobe c. Iz enačbe $v/c = 20'' = 10^{-4}$ je sledilo $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Arago je pričakoval, da se vsi delci svetlobe z zvezd na Zemlji ne gibljejo z enako hitrostjo. Zemlja se kaki zvezdi zdaj približuje, čez šest mesecev pa se zaradi gibanja okoli Sonca od nje oddaljuje. (Hitrost zaradi vrtenja Zemlje meri na ekvatorju 0,45 km/s, drugod je manjša.) Ker naj bi bil lomni kot odvisen od hitrosti svetlobe glede na prozorno snov, ki miruje na Zemlji, je meril spomladi in merjenje ponovil jeseni[1] [1]. Pri spomladanskih poskusih 19. in 27. marca 1810 je uporabil akromatično prizmo z lomečim kotom 24°. Sestavil jo je iz prizem iz kronskega in flintskega stekla, ki ju je zlepil s prozornim lepilom in vpel v vrtljivo ogrodje. Z zidnim teleskopom, vrtljivim v ravnini pariškega poldnevnika, je izmeril zenitni kot številnih svetlih zvezd, ko so šle prek tega poldnevnika. Kot je meril neposredno in po prehodu svetlobe skozi prizmo, ki jo je lahko zasukal pred objektiv ali umaknil.

19. marca 1810			**27. marca 1810**		
čas	zvezda	izmerjeni odklon	čas	zvezda	izmerjeni odklon
18:10	Rigel	10° 04′ 24,2″	18:18	Betelgeza	10° 04′ 33,28″
20:28	Kastor	10° 04′ 24,6″	19:55	Kastor	10° 04′ 27,93″
20:35	Prokion	10° 04′ 24,9″	20:02	Prokion	10° 04′ 32,31″
23:02	Regul	10° 04′ 25,2″	02:39	Arktur	10° 04′ 28,05″
05:22	Antares	10° 04′ 22,5″	04:49	Antares	10° 04′ 28,19″

Pri jesenskem merjenju 8. oktobra 1810 je uporabil boljšo in večjo prizmo, ki jo je pritrdil pred objektiv tako, da je pokrivala polovico vidnega polja. Prva mejna ploskev prizme je bila pravokotna na os teleskopa. Teleskop je bil vrtljivo nameščen v delilnem krogu v poldnevniški ravnini. Najprej ga je usmeril tako, da je pri opazovanju v prvem vidnem polju slika zvezde nastala na osi. Potem je teleskop zasukal, da je prišla na os slika zvezde pri opazovanju v drugem vidnem polju. Sicer pa je bil Arago dokaj skop s podatki.

Razlika izmerjenih zenitnih kotov s prizmo in brez nje mu je dala odklon zaradi loma v prizmi. Dobljene izmerke je zbral v treh preglednicah s po 12, 15 in 8 podatki. Tukaj navedemo le po pet značilnih. Dodali smo še podatke za lokalni čas, v katerem so zvezde prešle pariški poldnevnik [2]. Zanimivo je, da je v prvi preglednici navedel odklon na desetino kotne sekunde natančno, v drugi celo na stotino kotne sekunde natančno, v tretji pa le na

[1]Zanimivo je, da je predavanje iz decembra 1810 moralo 43 let čakati na objavo v *Zbranih delih akademije.*

8. oktobra 1810		
čas	zvezda	izmerjeni odklon
19:26	Atair 4	$22^\circ\,25'\,09''$
04:08	Aldebaran	$22^\circ\,25'\,00''$
04:48	Rigel	$22^\circ\,24'\,59''$
05:28	α Oriona	$22^\circ\,25'\,02''$
06:19	Sirij	$22^\circ\,25'\,08''$

kotno sekundo natančno. Najbrž je pri jesenskem merjenju s ponavljanjem ugotovil, da je napaka pri merjenju večja od desetine kotne sekunde. Razlike med odkloni so se zmanjšale, ko se je od merjenja do merjenja izboljšala natančnost. Pričakoval je, da bo odklon odvisen od smeri relativne hitrosti prizme glede na zvezdo in da bodo razlike dosegle velikostno stopnjo $20''$. Po merjenjih pa ni mogel zaslediti nič podobnega. Zato je sklepal, da ni take odvisnosti in je majhne razlike med odkloni pripisal napakam pri merjenju.

Zapisal je: *„Ta rezultat [...] se zdi v očitnem nasprotju z Newtonovo teorijo loma, ker resnična neenakost v hitrosti žarkov ne povzroči resnične neenakosti v odklonih [...]. Zdi se celo, da je lahko smiselna le, če privzamemo, da sveteča telesa sevajo žarke z vsemi vrstami hitrosti, če hkrati privzamemo, da so ti žarki vidni samo, če ležijo njihove hitrosti znotraj danih meja. Ker je po tem privzetku resnična vidnost žarkov odvisna od njihovih relativnih hitrosti in ker prav te hitrosti določajo izdatnost loma [odklon], se vidni žarki vedno enako lomijo.“* [1] Nepričakovani izid merjenj je torej pojasnil z nenavadnim privzetkom. Zvezda seva delce z zvezno porazdeljenimi hitrostmi glede na zvezdo, oko pa zazna samo delce s hitrostjo glede na oko na ozkem pasu. Pri lomu na prizmi se sicer spremeni hitrost delcev, kakor zahteva račun v okviru delčne slike. Vendar oko tudi po prehodu svetlobe skozi prizmo zazna samo delce na danem ozkem pasu hitrosti, ti pa se lomijo enako.

Vzemimo dve sestavini svetlobe z različnima hitrostma c_1 in c'_1. Ker obe sestavini prihajata iz dane smeri, velja $c_{1\perp}/c_{1\|} = c'_{1\perp}/c'_{1\|}$. Iz enačb (1) za obe sestavini izhaja:

$$c^2_{2\perp}/c^2_{2\|} = (c^2_{1\perp} + c^2_2 - c^2_1)/c^2_{1\|} = c^2_{1\perp}/c^2_{1\|} + (c^2_2 - c^2_1)/c^2_{1\|}\,,$$
$$c'^2_{2\perp}/c'^2_{2\|} = (c'^2_{1\perp} + c'^2_2 - c'^2_1)/c'^2_{1\|} = c^2_{1\perp}/c^2_{1\|} + (c'^2_2 - c'^2_1)/c'^2_{1\|}\,.$$

Ker je $c_{1\|} \neq c'_{1\|}$, je tudi $c_{2\perp}/c_{2\|} \neq c'_{2\perp}/c'_{2\|}$ celo, če bi veljalo $c^2_2 - c^2_1 = c'^2_2 - c'^2_1$. Lomna kota sestavin z različnima hitrostma iz dane smeri se v splošnem med seboj razlikujeta. Če pa hitrosti c_1 in c_2 ležita na dovolj ozkem pasu, ki ga sprejemajo oči, in je $c_1 \approx c'_1$ ter $c_2 \approx c'_2$, je ta razlika zelo majhna. Privzetek je oprl tudi na spoznanje, da ne vidimo infrardeče svetlobe, ki jo je odkril

William Herschel leta 1800, in ultravijolične, ki jo je odkril Johann Ritter leto pozneje.

❖

V prvih letih 19. stoletja je Thomas Young začel širiti misel, da je svetloba valovanje. S tem je oživil sliko Christiaana Huygensa iz leta 1678, ki pa je bolj kot na valovanje mislil na potovanje motenj. Huygens je izpeljal lomni zakon v današnji obliki $c_2 \sin\alpha = c_1 \sin\beta$. To obliko je izpeljal Pierre Fermat že leta 1662 z načelom najkrajšega časa.

Zaradi težav delčne slike se je Arago postopno ogrel za Youngovo valovno sliko. Na poti do tega je leta 1811 pojasnil Newtonove kolobarje z interferenco in naslednje leto odkril krožno polarizacijo. Leta 1815 je podprl zapis, v katerem je Augustin Fresnel svetlobo obravnaval kot valovanje. Naslednje leto je dokončno opustil delčno sliko in se razšel z Jean-Baptistom Biotom, ki je vztrajal pri njej. Tega leta je skupaj s Fresnelom ugotovil, da curka svetlobe, ki sta polarizirana v pravokotnih smereh, ne dasta značilne interferenčne slike, čeprav izvirata iz istega svetila.

Svetlobo so obravnavali kot mehanično nihanje delov *etra*. Najprej so mislili, da je svetloba longitudinalno valovanje [3]. Eter naj bi nosil svetlobo, kot zrak nosi zvok. Da bi pojasnil polarizacijo, je Young domneval, da valovanje sestavlja tudi majhna primes transverzalnega valovanja. Arago je Youngovo domnevo sprejel in z njo seznanil Fresnela. Ta je privzel, da je svetloba samo transverzalno valovanje in zamisli dal matematično obliko. Transverzalno valovanje lahko potuje le po trdni snovi. Misel, da je svetloba transverzalno valovanje in da pri gibanju po trdnem etru ni mogoče zaznati upora, se je Youngu zdela preveč nenavadna, tako da je prenehal raziskovati svetlobo. Podobno se je godilo tudi Aragoju. Čeprav je spočetka vneto podpiral Fresnela, *„sta moža izhajala iz različnih okolij, prinesla v sodelovanje zelo različne pojme o tem, kaj je svetloba in kako jo je treba raziskovati. [...] Njuno delo je v enotno fronto združilo ta različna prijema, a povzročilo njun razhod leta 1821. Čeprav so se sadovi njune zveze pokazali za izredno trdne, je soglasje med njima vselej bilo le delno.“* [4]

Za Fresnela je bil izid Aragojevega poskusa izziv, ki ga je želel pojasniti v valovni sliki. V objavljenem pismu Aragoju je vpeljal zamisel o gibanju etra v gibajočih se telesih. Hkrati se je prepričal, da se z njo v prvem redu količnika v/c svetloba z zvezde pri prehodu skozi prizmo ne odkloni drugače, neodvisno od relativne hitrosti prizme glede na zvezdo [5]. Eter z gostoto ρ_0 prežema prazen prostor in vso snov. V gibajočem se telesu del etra z gostoto ρ_0 še naprej miruje. Gostota etra pa se poveča na ρ in prirastek z gostoto $\rho - \rho_0$ se giblje s hitrostjo telesa v. Hitrost težišča etra v gibajoči se snovi je $[\rho_0 \cdot 0 + (\rho - \rho_0)v]/(\rho_0 + \rho - \rho_0) = (1 - \rho_0/\rho)v = (1 - c_1^2/c^2)v$. Pri tem je c_1 hitrost svetlobe v mirujoči snovi in c hitrost v praznem prostoru. Po Fresnelu smo upoštevali izkušnjo, da je v mehaniki hitrost valovanja obratno sorazmerna s kvadratnim korenom iz gostote. Fresnel je sklepal, da svetloba potuje v gibajoči se snovi s hitrostjo $c_1 + (1 - c_1^2/c^2)v = c/n + (1 - 1/n^2)v = c/n + k_F v$. Nazadnje smo vpeljali lomni količnik snovi $n_1 = c/c_1$ in Fresnelov koeficient $k_F = 1 - 1/n^2$. Ne kaže zamolčati, da je Fresnelov privzetek težavi, da ni čutiti upora pri gibanju po trdnem etru, dodal še novo. Za vsako valovno dolžino mora obstajati poseben eter, ker je v prozorni snovi zaradi disperzije hitrost svetlobe odvisna od valovne dolžine.

Hyppolite Fizeau je z interferometrom, v katerem sta delna curka svetlobe potovala v smeri toka vode in v nasprotni smeri, leta 1851 podprl Fresnelov račun. Leta 1886 sta to z izpopolnjenim interferometrom in natančneje storila tudi Albert Abraham Michelson in Edward Williams Morley. Za vodo z lomnim količnikom $\frac{4}{3}$ račun za Fresnelov koeficient da 0,438, Fizeau je nameril 0,46, Michelson in Morley pa 0,434.

Fiziki so si vse 19. stoletje zaman prizadevali, da bi izmerili hitrost Zemlje v etru. Najznamenitejši poskus te vrste je naredil Michelson sam leta 1881 in skupaj z Morleyem leta 1887. Šele Albert Einstein je v posebni teoriji relativnosti leta 1905 pokazal, da je predstava o etru nepotrebna in elektromagnetno valovanje potuje po praznem prostoru s hitrostjo, ki ni odvisna od hitrosti izvira.

Če upoštevamo ta razvoj, Aragojev poskus *„ni uspel, osnovan je bil na zgrešenih teoretičnih izhodiščih o potovanju svetlobe, Fresnel ga je zgrešeno pojasnil, a to pojasnilo je pripeljalo do (pravega) pogleda, da ima svetloba valovne lastnosti. Zgrešeno pojasnilo pa je fiziko napeljalo na stoletno iskanje napačne sledi, ki se je končalo z rojstvom Einsteinove relativnosti.“* [6] Pretirano je v Aragojevem poskusu, narejenem v okviru delčne slike, videti zasnovo teorije relativnosti. Ni pa mogoče zanikati njegove zveze s številnimi poznejšimi neuspešnimi poskusi, da bi izmerili hitrost Zemlje v etru. Vsekakor je Aragojev poskus neposredno pripeljal do Fresnelove enačbe za hitrost svetlobe v gibajoči se prozorni snovi. Fresnel je s svojo zamislijo o etru obdelal še nekaj drugih pojavov in izpeljal enačbe, ki delno veljajo še danes [3]. Vseeno je to zamisel popolnoma izpodrinila teorija elektromagnetnega polja. Ob tem se vsili misel, da se utegne podobno goditi tudi teorijam, ki jim danes zaupamo.

❖

Leta 1786 rojeni Dominique François Jean Arago je po študiju na École polytechnique leta 1806 z Biotom v Španiji začel meriti dolžino poldnevnika.

Po dogodivščinah, vrednih pustolovskega romana, se je čez tri leta vrnil v Pariz. Ukvarjal se je z elektriko, magnetizmom in svetlobo. Z Biotom je raziskal lom svetlobe v ozračju. Pojasnil je tudi migotanje zvezd. Tedaj je še stavil na delčno teorijo svetlobe.

Leta 1820 je izvedel za Ørstedove poskuse in akademiji takoj poročal o njih. Med prvimi je naredil elektromagnet. Z Alexandrom Humboldtom je meril zemeljsko magnetno polje na različnih krajih. Opazil je, da se je magnetnica začela vrteti okoli navpične osi, če je pod njo ali nad njo vrtel nemagnetno kovinsko ploščo. Magnetnica se je tudi hitreje zaustavila, če jo je spravil v nihanje v kovinski škatli ali blizu kovinske plošče. Pojave je desetletje pozneje pojasnil Michael Faraday, ko je odkril indukcijo. Arago je opazoval mrke Jupitrovih lun in na način Oleja Rømerja izmeril hitrost svetlobe. Svojega študenta Urbaina le Verriera, ta ga je pozneje nasledil kot vodja pariškega astronomskega observatorija, je spodbudil, da je raziskal motnje v gibanju planeta Urana, kar je pripeljalo do odkritja Neptuna.

Arago je načrtoval poskus, ki bi jasno odločil, ali je hitrost svetlobe v zraku večja ali manjša kot v vodi, ali velja valovna ali delčna slika. Poskusa sam ni mogel več narediti, zanj pa je pridobil mlajša sodelavca Fizeauja in Leona Foucaulta, ki sta se pozneje razšla. Fizeau je prvi izmeril hitrost svetlobe v zraku med pariškima gričema. Foucault pa je v laboratoriju prvi z merjenjem ugotovil, da je hitrost svetlobe v zraku večja kakor v vodi. Vendar je valovna slika prevladala že pred poskusom. Arago je bil član akademije znanosti. Večkrat so ga izvolili za poslanca. Leta 1848 je postal minister za vojsko in mornarico. Dvakrat je vodil pariški občinski svet. Umrl je leta 1853.

LITERATURA

[1] François Arago, *Memoire sur la vitesse de la lumière*, lu à la première Classe de l'Institut le 10 décembre 1810, Comptes rendus de l'Academie des sciences **36** (1853), str. 38–49.

[2] Rafael Ferraro in Daniel M. Sforza, *Arago (1810): the first experimental result against the ether*, Eur. J. Phys. **26** (2005), str. 195–204.

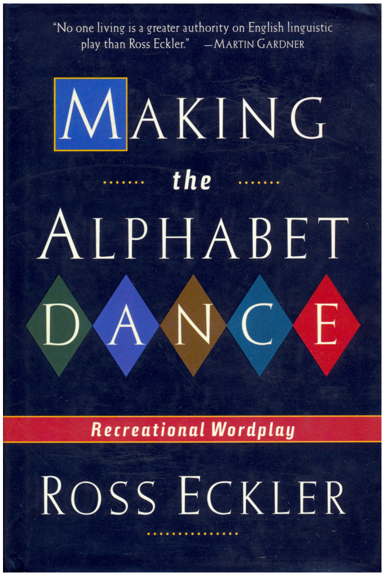
[3] J. Strnad, *Eter in hitrost svetlobe*, Fizika v šoli **11** (2005), str. 1–4; *O Fresnelovem etru*, Obzornik mat. fiz. **54** (2007), str. 125–132.

[4] Theresa Levitt, *Editing out caloric: Fresnel, Arago and the meaning of light*, The British Journal for the History of Science **33** (2000), str. 49–56.

[5] A. J. Fresnel, *Letter from Augustin Fresnel to François Arago concerning the influence of terrestrial movement on several optic phenomena*, prevedeno iz Anales de chimie et de physique **9** (1818) 57.

[6] *What a drag: Arago's experiment (1810)*, http://skullsinthestars.com/2008/07/05/what-a-drag-aragos-experiment-1810/.

Ross Eckler: MAKING THE ALPHABET DANCE – RECREATIONAL WORDPLAY, St. Martin's Press, New York 1996, 304 strani.



Ljudje zbirajo marsikaj: znamke, značke, kovance, metulje, ..., nekateri pa tudi zanimive besede in stavke, pa tudi daljša besedila. Avtorja v knjigi *Gremo se abecedni ples* v glavnem ne zanima pomen posameznih besed, ampak se posveča črkam, ki jih sestavljajo. To ni nič novega, saj so že nekateri antični učenjaki opazili v besedah veliko zanimivosti. V dva tisoč letih pa se je število besed zelo povečalo, saj je treba tistim najbolj običajnim dodati še ogromno novih, ki jih je prinesel čas, pri čemer ne smemo pozabiti vseh tistih, ki se uporabljajo v znanostih, tehniki, politiki itd. Vsem, ki vsaj malo rešujejo križanke in druge besedne igre, so dobro znani *anagrami* in *palindromi*. Obstaja pa še cela vrsta drugih besednih iger. Ena takih je *lipogram*, v katerem je določena množica črk prepovedana. Stavek „*Čebele lete čez greben.*" je primer lipograma. Stavek ima en sam samoglasnik: „e". Stavek je *pangram*, če je sestavljen iz vseh črk abecede. Zanimive so tudi besede, ki vsebujejo vse samoglasnike, in to natanko enkrat. Laže je najti *tavtonime*, besede, katerih deli se ponavljajo, na primer „mama" in „baba". *Izogram* je beseda, v kateri se črke ne ponavljajo, na primer „kopriva" in „Slovenija". Iščemo lahko tudi besede, v katerih nastopa določena strnjena skupina črk. Nekaj besed, ki imajo skupino „**lov**": „u**lov**iti", „p**lov**ilo", „s**lov**enski", „k**lov**n".

Zanimiva besedna igra je tudi *piramida*, ki jo sestavlja zaporedje besed, v katerem ima vsaka naslednja beseda eno črko manj in vse imajo pomen. Znana je Prešernova zastavica: „kasino", „asino", „sino", „ino", „no", „o". V njej postopoma odstranjujemo prvo črko. Pri splošni piramidi pa črke lahko tudi premečemo, na primer: „istrijanec", „starinice", „cisterna", „stearin", „retina", „teran", „tren", „ter", „et", „e". V angleščini obstaja beseda s kar 17 črkami, to je „anticeremonialist", iz katere naredimo piramido. Zanimivi so tudi *akrostihi*, od katerih je nam najbolj znan tisti v Magistralu Prešernovega Sonetnega venca.

Vsaki besedi lahko priredimo tudi graf, katerega točke so različne črke, ki besedo sestavljajo. Točki tega grafa sta povezani, če sta ustrezni črki v besedi sosednji. Besedi „matematika“ in „paralelepiped“ imata takšna grafa, v katerih so tudi večkratne povezave:

```
                                             R
M  =  A  —  K                                ||
|     ||    |                          L  —  A
E  —  T  —  I                          |||   |
                                 D  —  E  =  P  =  I
```

Zanimivo je študirati planarnost in druge lastnosti takih grafov ter katere besede imajo izomorfne grafe, katere polne in katere dvodelne grafe.

Zelo stari so tudi *besedni kvadrati*, to je vodoravno v kvadrat razporejene enako dolge besede, tako da sestavljajo črke, brane navpično od zgoraj navzdol, tudi besede z nekim pomenom. Če so to iste besede kot vodoravne, govorimo o *magičnem besednem kvadratu*. Navedimo primer, ki ga je našel domači ugankar Pavle Gregorc, in primer iz knjige:

```
S K R Č K A        C I R C L E
K R O K A R        I C A R U S
R O M A N I        R A R E S T
Č K A L J A        C R E A T E
K A N J O N        L U S T R E
A R I A N A        E S T E E M
```

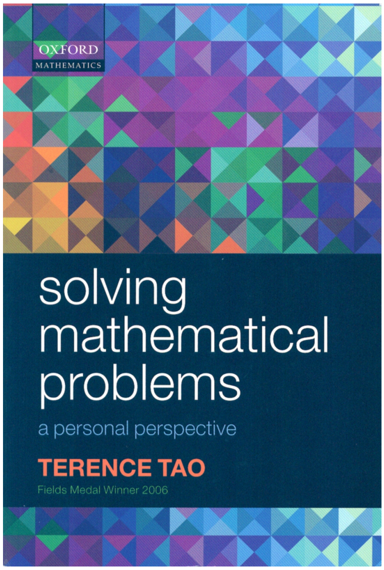
Obstajajo pa tudi besedni pravokotniki in še mnogo drugih besednih iger, ki jih avtor v knjigi razlaga zelo podrobno. Omenimo le še *samopreštevne stavke*, na primer: *„Naš stavek ima pet besed.“* Morda se bo pa le našel bralec, ki bo poskušal prilagoditi v knjigi obravnavane besedne igre našim razmeram in jeziku.

Avtor A. Ross Eckler, rojen leta 1927 v Bostonu, ima doktorat iz matematike na Princetonski Univerzi. Dolga leta je delal kot statistik v Bellovih laboratorijih. Ljubiteljsko pa se ukvarja z marsičem, med drugim tudi z besednimi igrami, ki jih je postavil na zavidljivo visoko znanstvenoraziskovalno raven. Svoje raziskave je tudi objavljal, z ženo pa sta ustanovila revijo *Word*

Way. Eckler uporablja za osnovo v glavnem Websterov angleški slovar. Nobenega razloga pa ni, da ne bi iskali po Ecklerjevem zgledu zanimivih besed tudi po slovenskih slovarjih.

Marko Razpet

Terence Tao: SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS – A PERSONAL PERSPECTIVE, Oxford University Press, 2006, 128 strani.



Malo ljudi je nadarjenih za matematiko in le redki med njimi so talentirani. Resničnih genijev pa je na svetu le nekaj. A celo v tej peščici so nekateri izjemni, kot da bi bili z drugega planeta. Nedvomno je Terence Tao taka izjema. Z desetimi leti je osvojil bronasto medaljo na mednarodni matematični olimpijadi. V naslednjih dveh letih je nato zaporedoma osvojil še srebrno in zlato medaljo. V vsej zgodovini teh tekmovanj ni bilo tako mladega prejemnika zlate medalje! Pri dvajsetih je doktoriral na Univerzi v Princetonu, se potem preselil v Kalifornijo in pri štiriindvajsetih letih postal redni profesor na znameniti univerzi UCLA v Los Angelesu ter pri tem ponovno podrl starostni rekord; na tej univerzi niso še nikoli imeli tako mladega rednega profesorja. Za svoja matematična odkritja je dobil številne nagrade. Omenimo samo Fieldsovo medaljo, ki jo je prejel leta 2006. Več podatkov o tem izjemnem matematiku najdemo na `http://en.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao` in `http://www.math.ucla.edu/~tao/`. Priporočam tudi obisk spletne strani YouTube, kjer boste nedvomno uživali v ogledu njegovega predavanja *Structure and Randomness in the Prime Numbers*.

Pri petnajstih letih, leta 1990, je napisal knjigo Solving mathematical problems: a personal perspective; leta 2006 je izšel ponatis pri založbi Oxford University Press. V knjigi je zbral nekaj nalog iz matematičnih tekmovanj. Vse naloge so elementarne, a različnih težavnostnih stopenj. Avtor predstavi rešitve nalog s komentarji in občasno doda še kakšno sorodno nalogo brez rešitve. Težavnejše naloge označi z eno ali dvema zvezdicama.

Knjiga je lansko leto prišla v matematično knjižnico. Zaradi zvezdniškega imena avtorja sem jo na hitro prelistal. Natančno se spomnim, da se mi je slučajno odprla na strani 43, kjer najdemo Problem 3.3. Ta je med lažjimi in rešitev sem na hitro preletel že v knjižnici. Bil sem očaran.

In hkrati zaprepaden. Precej bralcev Obzornika uči bodisi v zadnjih razredih osnovne šole, bodisi v gimnazijah, zato dobro vedo, kaj lahko pričakujejo od petnajstletnikov in tudi, kaj lahko pričakujejo od izjemno nadarjenih petnajstletnikov. Potem ko prebereš to knjižico, postane vsaka še tako „učena“ razlaga o razliki med nadarjenimi ljudmi in geniji odveč.

Pri študiju matematike srečamo številne globoke ideje. Vprašamo se lahko, kako so se porajale v glavah vrhunskih matematikov. Tega večinoma ne moremo ugotoviti, saj so nam posredovane v izpiljeni obliki, ki zakriva njihov postopni razvoj. Slediti delu živečih genialnih matematikov je težko, saj človek potrebuje ogromno znanja že za razumevanje njihovega dela zgolj na formalnem nivoju. Le redki imajo dovolj talenta in znanja za resen uvid v sodobno vrhunsko matematiko. Tu pa se, zaradi elementarne narave problemov, zajetih v knjigi, ponuja širokemu krogu matematikov enkratna priložnost „opazovati“ resničnega genija pri delu. Terenca Taa pogosto imenujejo matematični Mozart. K temu bi dodal, da je za matematika ne prebrati te knjige podobno, kot če bi ljubitelj glasbe živel v letih 1781–1791 na Dunaju in zamudil vse Mozartove koncerte in opere.

Knjiga ponuja obilo estetskega užitka ob lepih idejah, ki so potrebne za rešitve podanih problemov. Zahtevnejši bralec se bo seveda problemov sprva lotil sam. Nič hudega, če ne bo prišel daleč! Po vloženem naporu bo navdušenje nad presenetljivimi potmi do rešitev še toliko večje. Učiteljem na srednjih šolah bo knjiga izjemno dobrodošel pripomoček za pripravo zanimivih krožkov za najbolj nadarjene dijake. Njim je vsekakor treba priporočiti pričujočo knjigo v branje!

Najlepše pri tej knjigi je podajanje rešitev. Avtor nas ne seznani zgolj z najbolj elegantno rešitvijo. Ravno nasprotno, potrudi se podrobno razložiti svojo miselno pot do rešitve skupaj z možnimi poizkusi, ki ne vodijo nikamor ali pa ne peljejo k lepi rešitvi. Kot sam pravi, ima rad matematiko preprosto zato, ker je zabavna. In seveda je jasno, da je zabavna le tedaj, ko je elegantna. Za primer naj omenim kar prvi problem v knjigi, to je Problem 2.1 na strani 11. Treba je dokazati trditev, da je med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili vsaj eno deljivo z vsoto svojih števk. Dokaz trditve je dolg le 7 vrstic. V knjigi pa so temu problemu posvečene tri strani in skoraj vsak stavek na teh treh straneh prinaša presenečenje.

Ko berem gornje vrstice, se ne morem izogniti vprašanju, koliko me je pri navdušenju zavedlo dejstvo, da je avtor eden največjih zvezdnikov sodobne matematike. Saj vsi vemo, da se spodobi (še enkrat ista primera) biti očaran ob vsaki Mozartovi skladbi, pri kakšnem manj znanem skladatelju pa le upamo priznati, da nam je kaj njegovega všeč, kaj drugega pač ne. Toplo vam priporočam, da knjigo preberete, in kaj kmalu vam bo jasno, da bi bila knjiga obsojena na uspeh, tudi če bi jo napisal Janez Novak (seveda, če bi bil česa takega sposoben).

Za konec bom v nekoliko skrajšani obliki povzel problema, ki sem ju omenil zgoraj. Ta dva sodita med lažje v knjigi, a tudi pri težjih je potreben nivo matematičnega znanja podoben, le premisleki so zahtevnejši. Začnimo z:

Problem 2.1. *Pokaži, da je med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili vsaj eno deljivo z vsoto svojih števk.*

Avtor najprej ugotovi, da je to končen problem: obstaja natanko 900 trimestnih števil in zato lahko trditev preverimo z računanjem. Taka rešitev ne zdrži osnovnih estetskih kriterijev.

Zapišimo pogoj, da je trimestno število deljivo z vsoto svojih števk, s formulo:

$$(a+b+c) \mid 100a+10b+c\,. \tag{1}$$

Ni videti, da bi ta izraz lahko poenostavili ali na kakšen smiseln način prevedli v drugo obliko. Seveda se vprašamo, zakaj ravno 18 zaporednih trimestnih števil? Zakaj ne 13? Je tu kak skrit pomen?

Sledi nekaj eksperimentiranja s konkretnimi rešitvami enačbe (1) v želji, da bi opazili kaj uporabnega. Potem pa sledi preblisk! Kje srečamo vsoto števk? Seveda, pri preverjanju deljivosti s številom 9. Števili $a+b+c$ in $100a+10b+c$ imata isti ostanek pri deljenju z 9, saj je

$$100a+10b+c = 9(11a+b)+(a+b+c).$$

Povrhu je 9 v tesni zvezi z $18 = 2 \cdot 9$. In potem se avtorju porodi ideja, da bi namesto trditve:

Med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili najdemo vsaj eno, ki reši (1), poizkušali dokazati močnejšo trditev:

Med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili najdemo vsaj en večkratnik števila 9, ki reši (1).

Izkaže se, da je ta trditev pravilna. Bolj naravno (glej formulacijo problema) bi bilo namesto večkratnikov števila 9 v drugi trditvi vzeti kar večkratnike števila 18. Tudi ta trditev se izkaže za pravilno. Še več, tako formulirana domneva porodi idejo za kratko in elegantno rešitev zastavljenega problema.

Zapišimo jo. Med 18 zaporednimi trimestnimi števili obstaja natanko en večkratnik števila 18. Označimo ga z $abc_{10} = 100a+10b+c$. Iz $18 \mid abc_{10}$ sledi $9 \mid abc_{10}$ in zato $9 \mid (a+b+c)$ po pravilu za preverjanje deljivosti s številom 9. Ker so a, b in c števke, je $1 \leq a+b+c \leq 27$. Torej imamo natanko tri možnosti: $a+b+c$ je bodisi 9, bodisi 18, bodisi 27. Zadnja možnost nastopi samo v primeru $abc_{10} = 999$, ki pa ni večkratnik števila 18. In zato je $a+b+c$ bodisi 9 bodisi 18. V obeh primerih $(a+b+c) \mid 18$, in ker $18 \mid abc_{10}$, imamo želeno enačbo

$$(a+b+c) \mid abc_{10}\,.$$

Avtor potem doda še nekaj komentarjev. Zapišimo najpomembnejšega. Obstaja takih 17 zaporednih trimestnih števil, da nobeno med njimi ni deljivo z vsoto svojih števk: od 559 do 575. In avtor mirno pove, da je za iskanje zaporedja uporabil računalnik in ne kakšnih zvitih matematičnih idej.

Sedaj pa še:

Problem 3.3. *Naj bodo a, b, c taka realna števila, da je a, b, c, $a+b+c \neq 0$ in*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\,. \tag{2}$$

Dokaži, da potem velja

$$\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{(a+b+c)^5}\,. \tag{3}$$

Na prvi pogled je problem videti enostaven. V končno mnogo korakih naj bi enačbo (2) preoblikovali v (3). Prvi poizkus bi bil izračunati peti potenci obeh strani enačbe (2). Dobimo enačbo, ki je podobna enačbi (3), le da v njej nastopa še cela množica „čudnih“ sumandov. In ni videti, da bi kakšna računska manipulacija vodila h končni rešitvi. Toliko o direktnem pristopu!

Dijake je treba večkrat opozarjati, naj v računih ne uporabljajo enakosti (2), ker je **skoraj vedno** napačna. In tu je prvi ključ do rešitve! Zdi se, da enakost (2) zelo omeji možne vrednosti števil a, b, c. Kako? Da bi to ugotovili, zapišimo (2) na kak drug ekvivalenten način. Skupni imenovalec je dober začetek. Dobimo

$$\frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{1}{a+b+c}\,.$$

Potem pa še navzkrižno množimo:

$$ab^2 + a^2b + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc = abc\,. \tag{4}$$

Kako iz te enačbe dobiti čim več informacij o številih a, b, c? Ali jo znamo rešiti? Avtor najprej pomisli na uporabo kakšnih neenakosti, npr. Cauchy-Schwarzeve ali neenakosti z aritmetičnimi in geometrijskimi sredinami. Taka pot bi bila morda prava, če bi imeli omejitev, da so a, b, c pozitivni. Pa niso, saj če bi bili, bi bil $1/(a+b+c)$ manjši od vsakega od sumandov na levi strani enačbe (2) in še toliko bolj od njihove vsote.

Potem avtor naniza še nekaj možnih pristopov. Naj omenim enega. Na (4) lahko gledamo kot na kvadratno enačbo z neznanko a s parametroma b in c. A ta enačba ni videti lahko rešljiva, razen če bi uporabili formulo za ničli kvadratne funkcije, v kateri pa nastopajo kvadratni koreni. S to idejo je sicer mogoče priti do rešitve. Kako, bo pozornemu bralcu jasno, ko bo natančno premislil pot do rešitve, ki je opisana spodaj.

Želimo rešiti enačbo

$$p(a,b,c) = 0\,,$$

kjer je p polinom

$$p(a,b,c) = ab^2 + a^2b + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc\,.$$

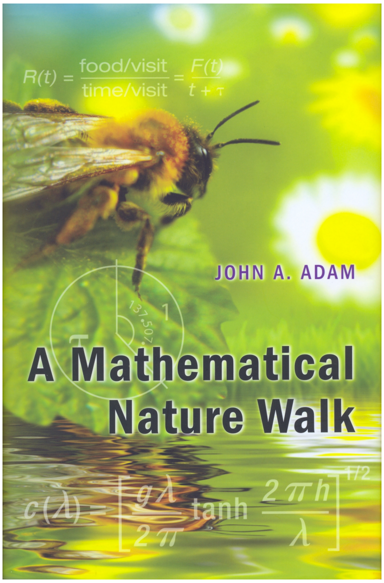
Kako poiskati ničle polinoma? S faktorizacijo? Najprej opazimo, da se polinom ne spremeni, če zamenjamo vloge spremenljivk a, b, c. Pravimo, da je simetričen. Je homogen. In je tretje stopnje (srednješolsko znanje matematike pove, da ima vsak polinom tretje stopnje v eni spremenljivki realno ničlo in je zato deljiv z linearnim polinomom). Ali ima potem polinom p linearen homogen faktor? Če je odgovor pritrdilen, ali je potem kateri od preprostih polinomov $a+b$, $a-b$, a, $a+b+c$, $a+b-c$, $\ldots$ faktor v razcepu polinoma $p(a,b,c)$? Lahko poizkusimo tudi s čim ne tako enostavnim, npr. z $a+2b$. A to ni videti tako lepo in v vsakem primeru lahko tovrstne možnosti preizkusimo, če preprostejše ne bodo delovale. Začnimo torej kar z $a+b$. Če si mislimo, da je $p(a,b,c)$ polinom v spremenljivki a s parametroma b in c, hitro ugotovimo, da je $a=-b$ ničla. Potem pa mora biti $p(a,b,c)$ deljiv z $a+b$. Ampak zaradi simetričnosti bi moral biti deljiv tudi z $a+c$ in $b+c$. In res, preprost račun pokaže, da je

$$p(a,b,c) = (a+b)(a+c)(b+c)\,.$$

Strnimo. Po predpostavki števila a, b, c zadoščajo enačbi (2). In potem vemo, da mora biti $p(a,b,c)=0$. Iz zgornje enačbe sledi, da je bodisi $a=-b$, bodisi $a=-c$, bodisi $b=-c$. V vseh treh primerih velja (3)!

Peter Šemrl

John A. Adam: A MATHEMATICAL NATURE WALK, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 2009, 250 strani.



Poljudnoznanstvena knjiga *Matematična naravoslovna pot* bralcu razlaga, kako nam lahko matematika pomaga opisati in pojasniti številne naravne pojave, s katerimi se srečujemo na vsakem koraku, če se le malo sprehodimo in razgledamo po naravi. Žal pa jih le redki sploh opazijo, še manj pa je tistih, ki jih poskušajo tudi razumeti. Najbrž se v sodobnem načinu življenja le malokdo vpraša, zakaj so taki, kot so. Avtor knjige odgovarja ravno na tovrstna vprašanja in nam poskuša usmeriti pozornost na opazovanje, opisovanje in analizo naravnih pojavov. Pri tem uporablja preproste matematične modele, ki jih potem večinoma obravnava z elementarno matematiko, le tu in tam pa poseže po infinitezimalnem računu ali preprosti diferencialni enačbi.

Knjiga je napisana v premišljeni pogovorni obliki in nas vodi skozi 96 vprašanj, povezanih z vsakdanjimi naravnimi pojavi, ki se dogajajo okoli nas. Ilustrirana je s številnimi skicami ter črno-belimi in barvnimi fotografijami. Vprašanja so smiselno razdeljena v 12 logičnih sklopov.

Naštejmo samo nekaj vprašanj, s katerimi se knjiga ukvarja. Ali se da matematično opisati obliko jajca? Ali King Kong, ki ga poznamo iz filmov, sploh lahko zares obstaja? Koliko daleč stran je nevihta? Kako visoko lahko zraste drevo? Zakaj imajo nekatera drevesa rakaste tvorbe? Kako dolgo bo še obstajalo naše Sonce? Zakaj se lahko vname prevelika kopa sena? Zakaj se kapljice na pajkovi mreži pravilno razporedijo? Kako oceniti maso buče brez tehtanja? Kako nastane mavrica? Avtor se posveti tudi nebu, rečnim zavojem, svetlobi, sencam, valovom, lepoti snežink in rastlin, pri katerih se seveda ne more izogniti Fibonaccijevemu zaporedju in zlatemu razmerju, ter še mnogim drugim zanimivim pojavom v naravi.

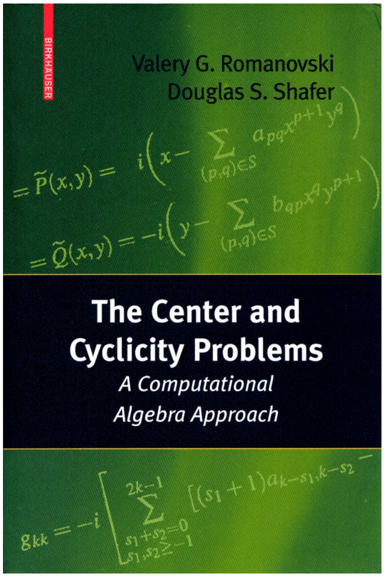
V dodatku so na kratko opisane matematične vsebine, nujno potrebne za razumevanje nekaterih delov knjige, odgovori na nekatera vprašanja, Newtonov zakon ohlajanja in seznam matematičnih vzorcev v naravi. Čisto na koncu pa je naveden še obširen seznam literature, ki mu sledita stvarno kazalo in osnovni podatki o avtorju knjige. Razkrijmo samo naslednje: John A. Adam je profesor matematike na Old Dominion University v Norfolku v Virginiji. Napisal je, sam ali v soavtorstvu, že več knjig s sorodno vsebino, na primer *Mathematics in Nature (Matematika v naravi).*

Kdor je le malo naravoslovno in matematično navdahnjen, bo pritrdil, da je knjiga pravi biser poljudnoznanstvenega pisanja in vsekakor zanimiva tudi za učitelje naravoslovnih predmetov in matematike, ker vsebuje dejanske primere iz narave neposredno okoli nas, ne pa ustaljenih, pogosto za lase privlečenih nalog, kakršnih smo navajeni iz raznih učbenikov in ustreznih zbirk. Predavateljem naravoslovnih vsebin in matematike na višjih in visokih šolah pa je lahko odličen pripomoček za popestritev njihovih predavanj.

Marko Razpet

Valery G. Romanovski in Douglas S. Shafer: THE CENTER AND CYCLICITY PROBLEMS – A COMPUTATIONAL ALGEBRA APPROACH, Birkhäuser, Basel 2009, 348 strani.

Dr. Valerij Romanovski je študiral matematiko na Leningrajski državni univerzi v nekdanji Sovjetski zvezi. Pred prihodom v Slovenijo je delal v Kazahstanu, v Severni Osetiji in v Belorusiji. Od leta 2000 dalje je zaposlen na Centru za uporabno matematiko in teoretično fi-



ziko Univerze v Mariboru. Leta 2002 je pridobil državljanstvo Republike Slovenije. Raziskuje predvsem diferencialne enačbe, še posebej polinomske diferencialne enačbe v ravnini, in je eden od vodilnih strokovnjakov na tem področju. Med drugim je bistveno prispeval k napredku pri reševanju slavnega Hilbertovega šestnajstega problema.

Center za uporabno matematiko in teoretično fiziko Univerze v Mariboru (CAMPT) je bil ustanovljen 1990. leta in ga že ves čas vodi prof. dr. Marko Robnik. Čeprav majhen po številu sodelavcev, je CAMTP znanstvenoraziskovalno izredno uspešen, predvsem na področju teoretične fizike in uporabne matematike, še posebej na področju nelinearne dinamike ter kvantnega kaosa, teorije dinamičnih sistemov in diferencialnih enačb. Ima zelo razvejeno mednarodno sodelovanje in redno organizira mednarodne poletne šole „Let's Face Chaos through Nonlinear Dynamics" in druga odmevna mednarodna srečanja. Več o CAMTP lahko najdemo na spletni strani `http://www.camtp.uni-mb.si/`.

Številne naravne pojave ter znanstvene in tehnološke modele lahko opišemo s pomočjo teorije dinamičnih sistemov, ki prav zato postaja eno najpomembnejših in najhitreje rastočih področij uporabne matematike. Dinamične sisteme najbolj pogosto predstavimo kot sisteme diferencialnih enačb. Ker pa so sistemi diferencialnih enačb zelo redko integrabilni, običajno študiramo lastnosti rešitev takšnih sistemov in njihove fazne portrete. V primeru 2-dimenzionalnih sistemov moramo za opis faznega portreta najti singularne točke in ugotoviti njihov tip ter poiskati limitne cikle in separatrisne povezave med singularnimi točkami. Danes sicer obstajajo učinkovite metode za opredelitev tipa singularnih točk, vendar žal še ne poznamo sistematičnih splošnih metod za opredelitev limitnih ciklov in separatrisnih povezav, zato lahko najdemo limitne cikle in takšne povezave samo v posebnih primerih.

Fazni portret sistema diferencialnih enačb se spremeni, če spremenimo parametre sistema, zato je eden izmed osrednjih vidikov teorije dinamičnih sistemov raziskovanje bifurkacij rešitev. Teorija bifurkacij ima velik pomen v različnih uporabnih in tehničnih znanostih, saj lahko z njeno pomočjo določimo stabilne režime sistema. Ena najbolj raziskovanih bifurkacij v dinamičnih sistemih je bifurkacija izoliranih periodičnih rešitev, t. i. limitnih ciklov. V zadnjem času je veliko pozornosti usmerjene v študij problema bifurkacij kritičnih period (tj. problema določitve števila periodičnih rešitev, ki ohranijo periodo pri majhnih motnjah sistema), ki se je izkazal za zelo podobnega problemu bifurkacij limitnih ciklov in ga lahko preučujemo s podobnimi metodami.

Eden najbolj znanih problemov v teoriji navadnih diferencialnih enačb je še vedno nerešeni Hilbertov šestnajsti problem o iskanju števila izoliranih periodičnih rešitev (limitnih ciklov) 2-dimenzionalnih sistemov polinomskih diferencialnih enačb (diferencialni sistemi s polinomi na desni strani). Kljub temu da je problem star že več kot sto let, ni rešen niti za kvadratične sisteme. Problem bifurkacij limitnih ciklov nedegenerirane singularne točke, tako imenovani *lokalni Hilbertov šestnajsti problem* ali *problem cikličnosti*, je bistven del Hilbertovega šestnajstega problema. Eden prvih večjih prispevkov k študiju problema cikličnosti je delo N. N. Bautina (1952), ki je rešil problem cikličnosti za kvadratične sisteme in predlagal splošni postopek za študij problema.

Če so vse orbite v okolici singularne točke 2-dimenzionalnega sistema navadnih diferencialnih enačb ovalne, potem singularno točko imenujemo center (središče), in v tem primeru so vse rešitve v okolici konstantne rešitve periodične. Ena večjih težav, ki se pojavi pri študiju problema cikličnosti, je v tem, da je na prvem koraku treba rešiti Poincaréjev problem centra, tj. najti vse sisteme s centrom znotraj dane parametrične družine ravninskih sistemov navadnih diferencialnih enačb. Ta problem je leta 1908 prvi obravnaval francoski matematik H. Dulac in ga rešil za primer kvadratičnega sistema. O problemu centra in fokusa je bilo napisanih že na stotine člankov. Vendar je rešen za kvadratične sisteme in za kubične sisteme v obliki linearnega centra, motenega s homogenimi kubičnimi nelinearnostmi (za t. i. Kuklesov sistem), in še za nekaj reprezentativnih družin polinomskih sistemov. K temu sta v številnih originalnih člankih veliko prispevala prav avtorja te monografije.

Delo obravnava problema centra in cikličnosti za polinomske sisteme navadnih diferencialnih enačb. Ključna značilnost sedanjega načina študija problema cikličnosti je v tem, da v primeru elementarne singularne točke problem cikličnosti reduciramo na algebraični problem iskanja baze ideala polinomov, porojenega s fokusnimi količinami sistema (t. i. Bautinov ideal).

Ena osnovnih težav v študiju problema centra izhaja iz izračuna raznoterosti ideala, porojenega s fokusnimi količinami (koeficienti Poincaréjeve preslikave). To je dejansko algebraični problem: najti dekompozicijo množice ničel sistema polinomov (dekompozicijo raznoterosti ideala polinomov), zato prvo poglavje knjige obravnava sodobne metode in računalniške algoritme študija polinomskih idealov, ki temeljijo na teoriji Groebnerjevih baz. To poglavje je neodvisno od preostalega dela knjige in bi bilo lahko zanimivo celo za študente matematike prvih letnikov, ker daje uvod v osnovne koncepte teorije polinomskih kolobarjev, njihovih idealov in raznoterosti ter kaže, kako reševati sisteme algebraičnih polinomov.

Drugo poglavje začne analizo diferencialnih enačb in predstavlja uvod v Ljapunovo teorijo stabilnosti in teorijo normalnih form diferencialnih enačb, ki je eno osnovnih orodij analize diferencialnih enačb. Uvod v teorijo normalnih form je praktičen, ne pretirano tehničen in lahko razumljiv.

V tretjem poglavju je predstavljen postopek, kako se lotiti problema centra, ki temelji na teoriji normalnih form, kompleksifikaciji sistema in uporabi algebraičnih metod iz prvega poglavja ter softverskih orodij računalniške algebre. Opisani so osnovni mehanizmi za dokaz obstoja centra in analitičnega integrala v polinomskih sistemih, ki običajno privedejo do rešitve problema. Predstavljen je tudi učinkovit algoritem za računanje fokusnih količin 2-dimenzionalnih diferencialnih sistemov ter Darbouxjeva metoda integrabilnosti takih sistemov. Zadnje podpoglavje je posvečeno tako imenovanemu Liénardovemu sistemu, ki je pomemben za številne aplikacije.

Če imajo vse periodične rešitve v okolici centra isto periodo, tedaj je center izohron. Problem izohronosti je najti pogoje, pri katerih bo center izohron. Izohronost so raziskovali že v 17. stoletju, ko je Christian Huygens opazil, da nihajna ura niha z monotono padajočo periodo in torej oscilira s krajšo periodo, kadar ima manjšo energijo, tj. ko se vzmet ure odvija. Želel je narediti uro, ki bi oscilirala izohrono in tako bila bolj natančna ter bi jo lahko uporabljali pri ladijski navigaciji. Njegova rešitev, cikloidno nihalo, je najbrž prvi nelinearni izohroni primer. Sodobni način reševanja problema izohronosti je predstavljen v četrtem poglavju, kjer je pokazano, da je izohronost diferencialnega sistema ekvivalentna lokalni linearizabilnosti sistema. V poglavju je predstavljen učinkovit način študija problema izohronosti, vključno z algoritmom za izračunavanje potrebnih pogojev za izohronost in linearizabilnost diferencialnega sistema, ter metode konstrukcije transformacij za linearizacijo diferencialnih sistemov.

Peto poglavje je posvečeno polinomskim invariantam sistemov diferencialnih enačb. Te invariante omogočajo predstaviti pomemben pojav v sistemih diferencialnih enačb – časovno reverzibilnost sistema. V poglavju je predstavljen algoritem za izračunavanje množice vseh časovnoreverzibilnih sistemov znotraj neke parametrične družine sistemov diferencialnih enačb. Algoritem je pridobljen na osnovi študija invariant grupe rotacij diferencialnega sistema in algebraičnih metod iz prvega poglavja.

Zadnje poglavje obravnava problem cikličnosti. Ključna značilnost predstavljenega načina obravnave problema cikličnosti je, da v primeru elementarne singularne točke problem cikličnosti reduciramo na algebraični problem iskanja baze ideala polinomov, porojenega s fokusnimi količinami sistema (t. i. Bautinov ideal). Z uporabo algoritmov računske algebre iz prvega poglavja v primeru, ko je ideal radikalen, problem rešimo na eleganten način. V primeru, ko je ideal neradikalen, se problem izkaže za veliko zahtevnejšega, vendar je predstavljen tudi postopek, ki deluje v nekaterih primerih neradikalnih idealov. V zadnjem času je veliko pozornosti usmerjene v študij problema bifurkacij kritičnih period. Ta problem se je izkazal za zelo podobnega problemu bifurkacij limitnih ciklov, preučujemo ga lahko s podobnimi metodami in je obravnavan v zadnjem podpoglavju.

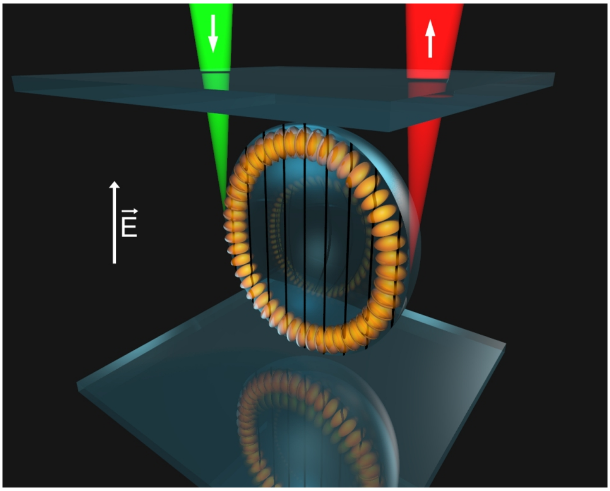
Knjiga je dobro strukturirana in dobro napisana. Ponuja temeljno znanje za specialiste s področja diferencialnih enačb, ki se zanimajo za uporabo algebraičnih metod pri študiju lastnosti dinamičnih sistemov, ter za specialiste s področja računalniške algebre, ki se zanimajo za netrivialno uporabo algebraičnih metod. Prvi bodo ugotovili, da so metode in softverska orodja računalniške algebre učinkovite in visoko zmogljive za študij njihovih problemov, drugi pa bodo spoznali vrsto problemov iz teorije diferencialnih enačb, ki so zahtevni in spodbudni, zanje so te algebraične metode lahko uporabne in učinkovite. Primeri in naloge, ki so zbrani na koncu vsakega poglavja, bodo pomagali bralcu razumeti osnovne ideje. Menim, da bo ta monografija imela pomemben vpliv na raziskave in aplikacije algebraičnih metod ter računalniških orodij za študij problemov centra in cikličnosti, pa tudi za študij splošnih nelinearnih diferencialnih enačb.

Dušan Repovš

PREJEMNIKI DRŽAVNIH NAGRAD V LETU 2009

Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo v letu 2009

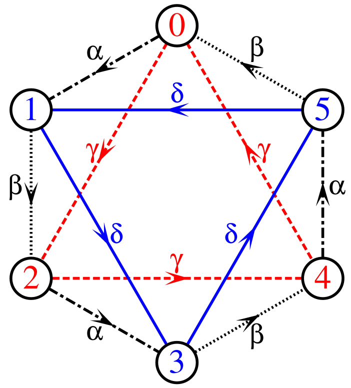
V Cankarjevem domu v Ljubljani so 23. novembra 2009 slavnostno podelili najvišje državne nagrade za znanstvenoraziskovalne in razvojne dejavnosti za leto 2009. Tokrat so bile podeljene štiri Zoisove nagrade in pet Zoisovih priznanj. Med letošnjimi nagrajenci sta bila tudi dva slovenska fizika. Prof. dr. **Igor Muševič**, redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in znanstveni svetnik na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani, je prejel Zoisovo nagrado za vrhunske dosežke na področju fizike mehke kondenzirane snovi. Doc. dr. **Matjaž Perc**, docent na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, pa je prejel Zoisovo priznanje za pomembne dosežke na področju teoretične fizike. Povzemimo uradni utemeljitvi Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.



Shema kroženja svetlobe v mikroresonatorju, s kakršnimi se ukvarja prof. Muševič.

Prof. dr. **Igor Muševič** je fizikalne lastnosti nematskih koloidov začel raziskovati v letu 2003. Prvi znanstveni preboj je dosegel, ko je pokazal, da je mogoče z lasersko pinceto manipulirati koloidne delce, katerih lomni količnik je nižji od lomnega količnika obdajajočega nematskega tekočega kristala. V letu 2006 je objavil prelomni članek s tega področja v ugledni reviji Science in prvič pokazal, da se nematski koloidi lahko samourejajo v dveh dimenzijah in sestavljajo izredno stabilne dvodimenzionalne koloidne kristale. Odkritje je vzbudilo izjemno zanimanje v širšem znanstvenem okolju. Samoorganizirani nematski koloidni kristali so zaradi enostavnosti priprave in stabilnosti lahko uporabni pri izdelavi „fotonskih vodnikov“, ki vodijo samo določene valovne dolžine svetlobe in katerih optične lastnosti lahko spreminjamo z zunanjim električnim poljem. Sledilo je odkritje izjemno zanimivih samoorganizacijskih pojavov v mešanicah velikih in malih koloidnih delcev. Pojav je uporaben za pripravo resonančnih elementov za metamateriale, zato je bil izum tudi prijavljen kot evropski patent.

Profesor Muševič je dognanja na področju fizike mehke kondenzirane snovi objavil v najuglednejših znanstvenih revijah in z njimi vzbudil veliko zanimanje širom po svetu. Njegovi dosežki so velik prispevek slovenske znanosti v zakladnico svetovnega znanja in so pripomogli k mednarodni uveljavitvi slovenske znanosti, še posebej fizike.



Shema prehranjevalne verige šestih živalskih vrst. Puščice kažejo od plenilcev proti plenu. Zaradi ciklične strukture prehranjevalne verige se spontano formirajo zavezniške alianse, ki ščitijo pripadnike pred invazijo plenilcev. V odvisnosti od vrednosti parametrov alfa, beta, gama in delta, v prostoru prevlada ena ali druga zavezniška aliansa (avtor M. Perc).

Doc. dr. **Matjaž Perc** proučuje vpliv stohastičnih motenj na časovno in prostorsko dinamiko ekscitabilnih medijev ter evolucijo različnih strategij v okviru evolucijske teorije iger in cikličnih interakcij. Kot prvi je pokazal, da lahko popolnoma nekorelirane prostorsko-časovne stohastične motnje izzovejo urejeno prostorsko dinamiko v ekscitabilnih medijih. Razvil je minimalne teoretične modele za opis konstruktivnih vplivov stohastičnih motenj v okviru ekscitabilnih medijev in evolucijske teorije. Dr. Perc je predstavil tudi možnost stohastično vodene evolucije v okviru cikličnih interakcij. Te interakcije so pogoste v realnem svetu, segajoč od otroške igre „kamenškarje-papir“ do ritualov parjenja kuščarjev rodu Uta v Severni Ameriki. Pomen njegovih študij sega na zelo različna področja, kot so medicina in psihologija ter tudi ekonomija in sociologija. Gre torej za teoretska znanja z izredno široko uporabnostjo. Znanstvena dela dr. Perca so bila v razmeroma kratkem obdobju navedena več kot 400-krat, kar kaže na njihov pomen za svetovno znanost in njihovo uporabnost v prihodnje.

Priznanje ambasador znanosti republike Slovenije v letu 2009

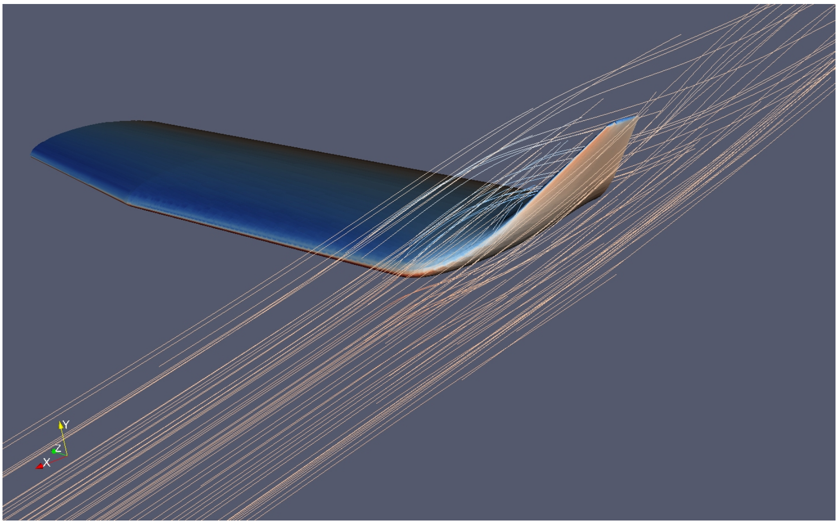
Na prireditvi v Cankarjevem domu 23. novembra 2009 so slavnostno podelili tudi priznanje ambasador znanosti Republike Slovenije. To priznanje je namenjeno slovenskim znanstvenikom, katerih delovanje dosega veliko odmevnost in ugled v tujini. Spet povzemimo uradno utemeljitev Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.

Prof. dr. Bojan Mohar

Priznanje ambasador znanosti za leto 2009 je prejel prof. dr. **Bojan Mohar**, redni profesor matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Po koncu študija matematike v Ljubljani se je večkrat študijsko in raziskovalno izpopolnjeval v ZDA. Od leta 2005 deluje kot „Canada Research Chair“ na univerzi Simona Frazerja v Vancouvru v Kanadi. To ugledno mesto mu je bilo podeljeno za sedem let. Vodi stolico za teorijo grafov in njen laboratorij. Kot cenjen raziskovalec pa sodeluje še v treh raziskovalnih organizacijah v Kanadi. Je recenzent pri več ameriških in evropskih znanstvenih agencijah in znanstvenih revijah, ki obravnavajo diskretno matematiko, teorijo grafov in matematično kemijo. Prejel je tudi priznanje „Discovery Accelerator“ za predlog najboljšega programa s področja teoretičnega računalništva. V zadnjih treh letih je organiziral pet znanstvenih srečanj v Kanadi in Braziliji ter bil med organizatorji šestih mednarodnih slovenskih konferenc iz teorije grafov na Bledu. Profesor Mohar je tudi urednik ali član uredniških odborov pri šestih mednarodnih matematičnih revijah. Velja za enega vodilnih svetovnih znanstvenikov na področju teorije grafov. O izsledkih svojih raziskovanj poroča v glavnih revijah s tega področja. V soavtorstvu je pri ugledni univerzitetni založbi Johns Hopkins University Press izdal knjigo Graphs on Surfaces. Na mnogih mednarodnih konferencah je sodeloval s plenarnimi in vabljenimi predavanji, samo v letu 2008 na dvanajstih. Stik z domovino in domačim oddelkom za matematiko vzdržuje tudi s podiplomskimi študenti in doktorandi, ki jim omogoča, da lahko študirajo na njegovi stolici v Kanadi. Profesor Mohar je ambasador slovenske matematične misli in utrjuje njen sloves v svetu.

Puhova priznanja v letu 2009

Na prireditvi 23. novembra 2009 so podelili tudi dve Puhovi priznanji za leto 2009. Puhovo priznanje je priznanje za pomembne izume, razvojne dosežke in uporabo znanstvenih izsledkov v praksi. Eno izmed Puhovih priznanj za leto 2009 je prejel slovenski fizik doc. dr. **Gregor Veble**, docent



Numerično izračunano obtekanje zraka okrog zavihka krila (avtor G. Veble) za fiziko na Univerzi v Novi Gorici in vodja raziskav v podjetju Pipistrel, d.o.o., Ajdovščina. S svojim delom je pomembno prispeval k razvoju aerodinamskih naprav. Tudi tokrat povzemimo uradno utemeljitev Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.

Dosežki dr. Gregorja Vebleta kažejo na prenos aktualnih znanstvenih dognanj v prakso pri načrtovanju zelo učinkovitih aerodinamskih naprav in s tem njegovo tehniško odličnost. Njegovo razvojno delo v podjetjih Pipistrel, d.o.o., in Seaway, d.o.o., pri modularno zasnovanih aeronavtičnih in vetrnih napravah pomaga odpirati popolnoma nova področja trga. Pristojen je za izdelavo aerodinamične zasnove novega letala, ki vsebuje določitev krilnih profilov, velikosti in oblike krila, aerodinamike trupa ter krmilnih površin. S svojimi raziskavami povečuje konkurenčnost omenjenih podjetij, s tem pa širjenje proizvodnje in povečanje števila visokokvalificiranih razvojnih delovnih mest.

Vsem nagrajencem iskreno čestitamo.

Uredništvo

PREDAVANJE PROFESORJA MANFREDA SPITZERJA O NEVROZNANOSTI IN UČENJU

Na seminarju *Moderni izzivi poučevanja matematike* [1] je 5. februarja na povabilo Damjana Kobala predaval znani nevropsiholog Manfred Spitzer, direktor Univerzitetne psihiatrične klinike v Ulmu v Nemčiji. Predavanje, trajalo je skoraj štiri šolske ure, je na humoren in dostopen način predstavilo dognanja o tem, kako se možgani preoblikujejo ob učenju in kaj vse vpliva na učinkovitost učenja. Posnetek predavanja bo verjetno na voljo za izposojo. Manfred Spitzer je uspešen raziskovalec na področju (izjemno aktivne) nevrološke znanosti, pa tudi avtor in soavtor več knjig za širšo publiko, denimo [2]. Je družbeno izredno angažiran. Na njegovi strani v nemški Wikipediji najdemo več zanimivih intervjujev. Nastopa tudi v bavarskem izobraževalnem in kulturnem televizijskem programu *BR-alpha*. Zavzema se za obdavčitev nasilnih računalniških iger in opozarja na škodljiv vpliv televizije in računalnikov na male otroke.

LITERATURA

[1] *Moderni izzivi poučevanja matematike*, http://uc.fmf.uni-lj.si/mi/.

[2] Manfred Spitzer: *Learning: The Human Brain and the School for Life* (Nekaj misli iz uvoda v knjigo), http://uc.fmf.uni-lj.si/mi/arhivpoletih/gradiva/0910/Nekaj misli iz uvoda v knjigo Learning.pdf.

Peter Legiša

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2010
Letnik 57, številka 2
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici sta Niels Henrik Abel in lanski Abelov nagrajenec Mikhael Gromov (glej članek na strani 41).