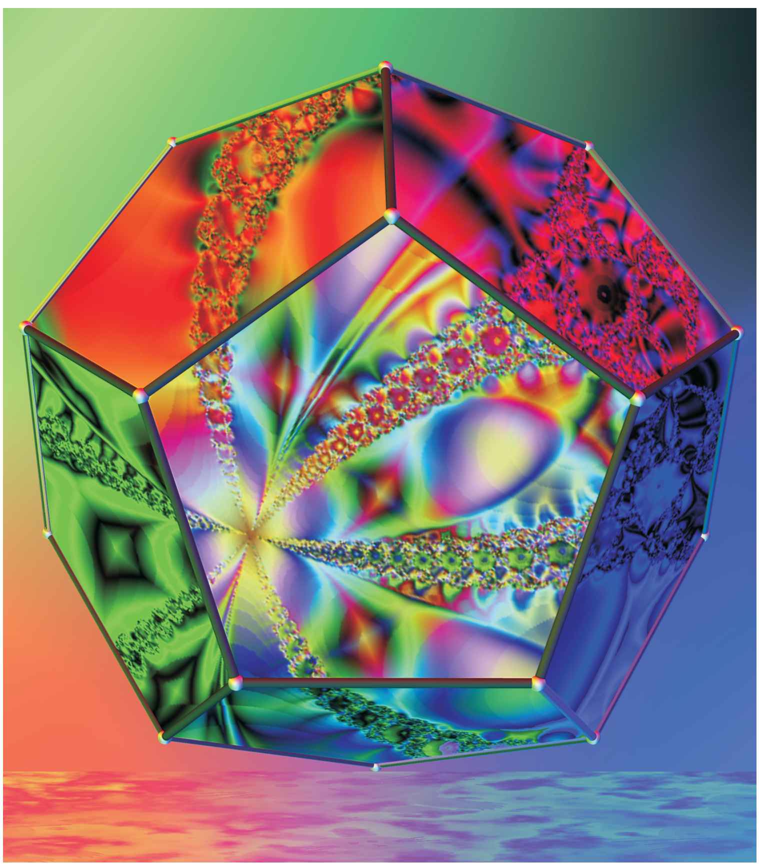
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2011
Letnik 58
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 58 • ŠT. 5 • STR. 169–208 • SEPTEMBER 2011

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2011, letnik 58, številka 5, strani 169–208

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

POLTRANZITIVNE ALGEBRE IN VEKTORSKI PROSTORI

DAMJANA KOKOL BUKOVŠEK

Ekonomska fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15A30

V članku obravnavamo poltranzitivne množice matrik, ki imajo kako algebraično strukturo. Poltranzitivnost je lastnost, ki je nekoliko šibkejša od tranzitivnosti. Ukvarjamo se predvsem s poltranzitivnimi algebrami in vektorskimi prostori matrik.

SEMITRANSITIVE ALGEBRAS AND VECTOR SPACES

In this paper we deal with semitransitive sets of matrices having some algebraic structure. Semitransitivity is a property weaker than transitivity. We consider semitransitive algebras and vector spaces of matrices.

Uvod

Naj bo $\mathbb{F}$ komutativen obseg in $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ algebra vseh $n \times n$ matrik nad $\mathbb{F}$, ki jo gledamo kot algebro vseh linearnih transformacij na vektorskem prostoru $\mathbb{F}^n$ z vnaprej izbrano bazo. Pravimo, da je družina matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *tranzitivna*, če za poljubna neničelna vektorja $x, y \in \mathbb{F}^n$ obstaja takšna matrika $A \in \mathcal{A}$, da velja $Ax = y$. Nekoliko šibkejša lastnost je poltranzitivnost. Prvič sta pojem uvedla H. Rosenthal in V. Troitsky v članku [8].

Definicija 1. Družina $\mathcal{A}$ je *poltranzitivna*, če za vsaka dva neničelna vektorja $x, y \in \mathbb{F}^n$ obstaja takšna matrika $A \in \mathcal{A}$, da velja $Ax = y$ ali pa velja $Ay = x$.

Pojem poltranzitivnosti je zelo naravna posplošitev pomembnega pojma tranzitivnosti. Tranzitivnost so mnogi avtorji študirali za različne množice $\mathcal{A}$, ki imajo tudi kako algebraično strukturo, na primer grupe, polgrupe, vektorske prostore in algebre. Dobro znan je Burnsidov izrek, ki pravi, da v primeru algebraično zaprtega obsega $\mathbb{F}$ algebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nima nobene prave tranzitivne podalgebre. Če predpostavimo, da je družina $\mathcal{A}$ samo vektorski prostor, potem je takih družin veliko. V članku [1] je dokazan izrek, ki pravi, da je dimenzija poljubnega tranzitivnega vektorskega podprostora v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ vsaj $2n - 1$.

Pojem tranzitivnosti je tesno povezan z (ne)obstojem skupnega invariantnega podprostora. Če je družina matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ tranzitivna, potem ne obstaja pravi netrivialni podprostor prostora $\mathbb{F}^n$, ki bi bil invarianten za vse elemente družine. Če pa je družina matrik $\mathcal{A}$ algebra, velja tudi nasprotno. Algebra matrik, ki nima skupnega pravega netrivialnega invariantnega podprostora, je tranzitivna. Družina matrik $\mathcal{B} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ in algebra matrik $\mathcal{A}$, ki je generirana z družino $\mathcal{B}$, imata iste invariantne podprostore. Če je družina matrik $\mathcal{B}$ tranzitivna, potem tudi algebra matrik $\mathcal{A}$, ki je generirana z družino $\mathcal{B}$, nima nobenega skupnega pravega netrivialnega invariantnega podprostora.

V tem članku se bomo ukvarjali s poltranzitivnimi družinami matrik, za katere bomo še predpostavili, da imajo algebraično strukturo algebre ali vektorskega prostora. Pojem poltranzitivnosti je precej nov, tako da bo njegovo uporabnost pokazala šele prihodnost.

Poltranzitivne algebre

Poglejmo si najprej preprost primer poltranzitivne algebre matrik, ki ni tranzitivna. Označimo z I identično matriko, z J pa Jordanovo kletko velikosti $n \times n$, to je matriko, katere elementi na prvi naddiagonali so enaki 1, vsi drugi elementi pa so enaki 0. Naj bo

$$\mathcal{A} = \left\{a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + \ldots + a_{n-1} J^{n-1};\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}\right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix};\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F} \right\}. \tag{1}$$

Očitno je, da sta linearna kombinacija in produkt dveh matrik iz $\mathcal{A}$ spet matriki iz $\mathcal{A}$, zato je $\mathcal{A}$ algebra. Naj bo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ standardna baza prostora $\mathbb{F}^n$. Z nobeno matriko iz $\mathcal{A}$ ne moremo preslikati prvega baznega vektorja e_1 v drugi bazni vektor e_2, zato $\mathcal{A}$ ni tranzitivna. Prostor $\mathcal{A}e_1$ je namreč enak linearni ogrinjači vektorja e_1.

Izberimo poljubna neničelna vektorja

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

Naj bo x_k zadnja komponenta v vektorju x, ki je različna od 0, y_j pa zadnja komponenta v vektorju y, ki je različna od 0. Denimo, da je indeks $k \geq j$. Definiramo

$$a_0 = y_k/x_k, \ a_1 = (y_{k-1} - a_0 x_{k-1})/x_k, \ ...,$$

$$a_{k-1} = (y_1 - a_0 x_1 - a_1 x_2 - ... - a_{k-2} x_{k-1})/x_k.$$

Hitro se prepričamo, da matrika $A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + ... + a_{k-1} J^{k-1}$ preslika vektor x v y. Če pa je indeks $k < j$, zamenjamo vlogi vektorjev x in y ter najdemo matriko, ki preslika vektor y v vektor x. Videli smo, da je $\mathcal{A}$ res poltranzitivna algebra, ki ni tranzitivna.

Indeks nilpotentnosti matrike T je tako naravno število k, da velja $T^k = 0$, vendar $T^{k-1} \neq 0$. Za nilpotentno matriko $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ je največji možni indeks nilpotentnosti njena velikost n. V zgornjem zgledu poltranzitivna algebra $\mathcal{A}$ vsebuje nilpotentno matriko J indeksa nilpotentnosti n. To je res vedno, kadar je obseg $\mathbb{F}$ algebraično zaprt. Velja namreč naslednji izrek:

Izrek 1. *Če je $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg in $\mathcal{A}$ poltranzitivna algebra matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, potem $\mathcal{A}$ vsebuje nilpotent indeksa n.*

Bralec lahko najde dokaz tega izreka v članku [4]. Predpostavka o algebraični zaprtosti obsega je tu bistvena, kot pokaže naslednji zgled. Algebra

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

nad obsegom realnih števil je izomorfna obsegu kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Matriki $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ namreč ustreza kompleksno število $z = a + ib$, vsoti oziroma produktu matrik pa ustreza vsota oziroma produkt kompleksnih števil, kot pokaže kratek račun. Naj bosta $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ in $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ dva neničelna vektorja v $\mathbb{R}^2$. Hitro se prepričamo, da matrika, ki ustreza kompleksnemu številu $(y_1+iy_2)/(x_1+ix_2)$, preslika vektor x v y, zato je algebra $\mathcal{B}$ tranzitivna. Po drugi strani pa ne vsebuje nobenega nilpotenta indeksa 2, ker obseg kompleksnih števil nima neničelnih nilpotentov.

Vsaka poltranzitivna algebra matrik vsebuje minimalno poltranzitivno algebro (to je tako, ki ne vsebuje nobene manjše, ki bi bila še vedno poltranzitivna), saj je končnodimenzionalna. Družini matrik $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ sta si *simultano podobni*, če obstaja taka obrnljiva matrika $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, da je $\mathcal{B} = \{SAS^{-1}; A \in \mathcal{A}\}$. Simultana podobnost pomeni, da zamenjamo bazo, v kateri gledamo matrike, torej v resnici isto družino matrik „pogledamo z druge strani“.

Posledica 2. *Naj bo $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg. Vsaka minimalna poltranzitivna algebra matrik je simultano podobna algebri $\mathcal{A}$, ki je opisana v* (1)*. Zato je vsaka minimalna poltranzitivna algebra matrik komutativna.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B}$ poltranzitivna algebra matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad algebraično zaprtim obsegom $\mathbb{F}$. Po izreku 1 algebra $\mathcal{B}$ vsebuje matriko T, za katero velja $T^n = 0$, vendar $T^{n-1} \neq 0$. Matrika T je podobna Jordanovi kletki J, torej je $T = SJS^{-1}$ za neko obrnljivo matriko S. (Matriko S dobimo tako, da za njen zadnji stolpec vzamemo vektor x, ki ne leži v jedru matrike T^{n-1}, za j-ti stolpec pa vzamemo vektor $T^{n-j}x$ za vsak $j = 1, 2, ..., n-1$.) Naj bo $\mathcal{C}$ podalgebra v $\mathcal{B}$, ki je generirana s T. Vsaka matrika iz $\mathcal{C}$ je tako oblike $a_0I + a_1T + a_2T^2 + ... + a_{n-1}T^{n-1} = a_0I + a_1SJS^{-1} + a_2(SJS^{-1})^2 + ... + a_{n-1}(SJS^{-1})^{n-1} = S(a_0I + a_1J + a_2J^2 + ... + a_{n-1}J^{n-1})S^{-1}$. Torej je algebra $\mathcal{C}$ simultano podobna algebri $\mathcal{A}$, definirani v (1). Po drugi strani pa, če je $\mathcal{B}$ minimalna poltranzitivna algebra matrik, je zaradi minimalnosti enaka svoji podalgebri $\mathcal{C}$. ∎

Družina matrik $\mathcal{A}$ je *trikotljiva*, če obstaja taka obrnljiva matrika S, da je za vsako matriko $A \in \mathcal{A}$ matrika SAS^{-1} zgornjetrikotna. Z drugimi besedami, družina je trikotljiva, če je simultano podobna poddružini zgornjetrikotnih matrik. O trikotljivosti je Obzornik že pisal v članku [6]. Družina matrik $\mathcal{A}$ je *razcepna*, če obstaja taka obrnljiva matrika S in tako naravno število $k < n$, da ima za vsako matriko $A \in \mathcal{A}$ matrika SAS^{-1}

obliko

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad \text{kjer je } B \in \mathbb{M}_k(\mathbb{F}) \text{ in } D \in \mathbb{M}_{n-k}(\mathbb{F}).$$

Drugače povedano, družina je razcepna, če je simultano podobna poddružini bločno zgornjetrikotnih matrik. Družina matrik $\mathcal{A}$ je *nerazcepna*, če ni razcepna. Družina matrik je razcepna natanko tedaj, kadar imajo vse matrike iz družine skupen pravi netrivialen invarianten podprostor. Če so matrike napisane v taki bazi, da imajo bločno zgornjetrikotno obliko, je ta skupen invarianten prostor napet na prvih k standardnih baznih vektorjev. Pojma trikotljivosti in razcepnosti sta zelo pomembna pri študiju družin matrik. Včasih se namreč lastnosti družine ali njenih članov prenašajo na diagonalne bloke ali pa z diagonalnih blokov na celotne matrike. Take lastnosti lahko potem pri razcepnih družinah obravnavamo induktivno.

V posledici 2 smo videli, da je minimalna poltranzitivna družina matrik nad algebraično zaprtim obsegom vedno trikotljiva. O nekaterih posplošitvah poltranzitivnih algeber lahko preberemo v člankih [3] in [5].

Poltranzitivni vektorski prostori

Naj bo $\mathcal{A}$ vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Vektor $x \in \mathbb{F}^n$ je *ciklični* vektor za družino $\mathcal{A}$, če je prostor $\mathcal{A}x = \{Ax; A \in \mathcal{A}\}$ enak $\mathbb{F}^n$. Iz definicije je očitno, da je za vsak tranzitiven vektorski prostor matrik vsak neničeln vektor cikličen. Naslednji izrek pove, da ima tudi vsak poltranzitiven vektorski prostor matrik ciklični vektor.

Izrek 3. *Naj bo $\mathcal{A}$ poltranzitiven vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad poljubnim obsegom $\mathbb{F}$. Potem obstaja vektor $x \in \mathbb{F}^n$, ki je cikličen za $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Ločimo dva primera:

(i) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ je končen obseg s q elementi. Denimo, da ne obstaja cikličen vektor za $\mathcal{A}$. Potem je za vsak $x \in \mathbb{F}^n$ dimenzija prostora $\mathcal{A}x$ največ $n-1$. Ker je družina $\mathcal{A}$ poltranzitivna, za vsak par neničelnih vektorjev $x, y \in \mathbb{F}^n$ velja, da je $y \in \mathcal{A}x$, ali pa je $x \in \mathcal{A}y$. Urejen par (x, y) torej leži v množici $\{x\} \times (\mathcal{A}x - \{0\}) \cup (\mathcal{A}y - \{0\}) \times \{y\}$. Tako imamo

$$(\mathbb{F}^n - \{0\}) \times (\mathbb{F}^n - \{0\}) \subset \bigcup_{0 \neq u \in \mathbb{F}^n} (\{u\} \times (\mathcal{A}u - \{0\}) \cup (\mathcal{A}u - \{0\}) \times \{u\}) .$$

Zato je

$$(q^n-1)^2 = |(\mathbb{F}^n - \{0\}) \times (\mathbb{F}^n - \{0\})| \leq 2 \sum_{0 \neq u \in \mathbb{F}^n} |\{u\} \times (\mathcal{A}u - \{0\})| =$$

$$= 2 \sum_{0 \neq u \in \mathbb{F}^n} |(\mathcal{A}u - \{0\})| \leq 2(q^n-1)(q^{n-1}-1).$$

Od tod sledi, da je $2q^{n-1} \geq q^n + 1$, kar je protislovje.

(ii) Naj bo zdaj $\mathbb{F}$ neskončen obseg. Naj bo $x_1, x_2, ..., x_n$ baza za $\mathbb{F}^n$. Če je vsaj eden od vektorjev x_i cikličen, potem izrek velja. Sicer je $\mathcal{A}x_i$ pravi podprostor v $\mathbb{F}^n$ za vsak i. Ker je obseg neskončen, prostora $\mathbb{F}^n$ ne moremo zapisati kot končno unijo pravih podprostorov. Zato obstaja vektor $u \in \mathbb{F}^n$, ki ne leži v nobenem od podprostorov $\mathcal{A}x_i$. Zaradi poltranzitivnosti sedaj vsak od vektorjev x_i leži v prostoru $\mathcal{A}u$, iz česar sledi, da je $\mathcal{A}u = \mathbb{F}^n$. Torej je vektor u cikličen za $\mathcal{A}$, ker je $\mathcal{A}$ vektorski prostor. ■

Če je $\mathcal{A}$ vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ in $x \in \mathbb{F}^n$ cikličen vektor za $\mathcal{A}$, je dimenzija prostora $\mathcal{A}x$ enaka n, zato mora biti dimenzija prostora $\mathcal{A}$ vsaj n. Iz pravkar dokazanega izreka takoj sledi tale posledica:

Posledica 4. *Dimenzija poljubnega poltranzitivnega vektorskega prostora matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad poljubnim obsegom je vsaj n.*

Izrek 5. *Naj bo $\mathcal{A}$ poltranzitiven vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad poljubnim obsegom $\mathbb{F}$. Če $\mathbb{F}$ vsebuje vsaj n elementov, potem $\mathcal{A}$ vsebuje obrnljivo matriko.*

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na velikost matrik n. Za $n = 1$ je trditev trivialna. Naj bo $n > 1$ in naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ poltranzitiven vektorski prostor. Po indukcijski predpostavki vsak poltranzitiven vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{F})$ vsebuje obrnljivo matriko. Za vsako matriko $A \in \mathcal{A}$ si ogledamo njen levi zgornji $(n-1) \times (n-1)$ blok. Matriko torej napišemo v obliki

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & a_1 \\ a_2^T & \alpha \end{bmatrix},$$

kjer je $A_1 \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{F})$ podmatrika matrike A, $a_1, a_2 \in \mathbb{F}^{n-1}$ sta vektorja, α pa je skalar. Podmatriko A_1 imenujemo *kompresija* matrike A na prvih

$n-1$ baznih vektorjev. Iz vseh kompresij matrik iz družine $\mathcal{A}$ sestavmo novo množico

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ A_1 \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{F});\ \begin{bmatrix} A_1 & a_1 \\ a_2^T & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{A} \right\}.$$

Očitno je množica $\mathcal{A}_1$ spet vektorski prostor in je poltranzitivna v dimenziji $n-1$. Naj bosta namreč $x, y \in \mathbb{F}^{n-1}$ poljubna neničelna vektorja. Vsakemu od njiju dodamo na koncu ničlo, da dobimo vektorja $x', y' \in \mathbb{F}^n$. Zaradi poltranzitivnosti vektorskega prostora $\mathcal{A}$ obstaja matrika $A \in \mathcal{A}$, ki preslika x' v y' ali obratno. Njena kompresija $A_1 \in \mathcal{A}_1$ potem preslika x v y ali obratno.

Po indukcijski predpostavki množica $\mathcal{A}_1$ vsebuje obrnljivo matriko. Naj bo $B \in \mathcal{A}$ taka matrika, da je njena kompresija B_1 obrnljiva. Če je tudi matrika B obrnljiva, je dokaz končan. Denimo torej, da ni. Izberimo neničeln vektor x v jedru matrike B. Od zdaj naprej gledamo matrike v bazi, ki jo sestavlja prvih $n-1$ standardnih baznih vektorjev in vektor x. S tem ne spremenimo kompresij na prvih $n-1$ baznih vektorjev. Imamo

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ b_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je prostor $\mathcal{A}$ poltranzitiven, obstaja matrika $C \in \mathcal{A}$, za katero velja $Cx = x$, torej je

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ c_2^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika $B_1^{-1}C_1$ ima največ $n-1$ različnih lastnih vrednosti. Ker ima obseg $\mathbb{F}$ vsaj n elementov, obstaja element $\lambda \in \mathbb{F}$, ki ni lastna vrednost matrike $B_1^{-1}C_1$. Zato je matrika

$$C - \lambda B = \begin{bmatrix} C_1 - \lambda B_1 & 0 \\ c_2^T - \lambda b_2^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

obrnljiva. Dokaz je končan. ∎

Predpostavka o moči obsega $\mathbb{F}$ v prejšnjem izreku je potrebna. Če je namreč $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q\}$ obseg s q elementi in je

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,q+1} \\ 0 & b+\alpha_1 a & c_{2,3} & \cdots & c_{2,q+1} \\ 0 & 0 & b+\alpha_2 a & \ddots & c_{3,q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b+\alpha_q a \end{bmatrix} ; \quad a, b, c_{i,j} \in \mathbb{F} \right\} \subset \mathbb{M}_{q+1}(\mathbb{F}),$$

se lahko podobno kot za algebro iz (1) prepričamo, da je $\mathcal{A}$ poltranzitiven vektorski prostor. Poleg tega ne vsebuje nobene obrnljive matrike. Če je namreč $a = 0$, je ničeln prvi element na diagonali, če pa je $a \neq 0$, je ničeln diagonalni element $b + \alpha_i a$, pri katerem je $\alpha_i = -b/a$. Vsaka od matrik iz $\mathcal{A}$ ima tako ničelno determinanto.

Poltranzitivnih vektorskih prostorov je veliko več kot poltranzitivnih algeber. Naj bo $\mathcal{A}$ algebra, definirana v (1), in $C = [c_{i,j}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ poljubna matrika z neničelnimi elementi. Potem je

$$\mathcal{B} = \{B = [b_{i,j}]; b_{i,j} = c_{i,j} a_{i,j}, A = [a_{i,j}] \in \mathcal{A}\}$$

minimalen poltranzitiven vektorski prostor matrik, ki ni simultano podoben $\mathcal{A}$, če je le $c_{i,i} \neq c_{j,j}$ za kaka indeksa i in j. Jasno je namreč, da je B vektorski prostor matrik dimenzije n, za katerega se lahko prepričamo, da je poltranzitiven. Po posledici 4 je zato tudi minimalen.

Minimalni poltranzitivni vektorski prostori matrik v nasprotju s poltranzitivnimi algebrami niso vedno trikotljivi. Še razcepni niso vedno.

Izrek 6. *Za vsak $n \geq 3$ obstaja poltranzitiven vektorski prostor matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, ki nima netrivialnega invariantnega podprostora.*

Dokaz. Zgled bomo konstruirali v primeru $n = 3$, za $n \geq 4$ ga konstruiramo podobno. Naj bo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 & a \end{bmatrix} ; \quad a, b, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F} \right\}.$$

Dokažimo, da je prostor $\mathcal{B}$ poltranzitiven. Z $\{e_1, e_2, e_3\}$ označimo standardno bazo prostora $\mathbb{F}^3$. Vzemimo poljubna neničelna vektorja $x = \alpha_1 e_1 +$

$\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ in $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$. Naj bo α_i prvi neničelni koeficient v vektorju x in β_j prvi neničelni koeficient v vektorju y. Če je $i \leq j$, bomo dokazali, da je $y \in \mathcal{B}x$, sicer pa zamenjamo vlogi vektorjev x in y.

Najprej vzemimo, da je $i = 1$. Dokazati moramo, da je vektor $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, za katerega je $\alpha_1 \neq 0$, cikličen. Zares, če vzamemo $a = 1$ in ostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3 \in \mathcal{B}x$, če vzamemo $b = 1$ in preostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2 \in \mathcal{B}x$, če pa vzamemo $x_2 = 1$ in preostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_1 e_3 \in \mathcal{B}x$. Torej je res $\mathcal{B}x = \mathbb{F}^3$.

Naj bo zdaj $i = 2$. Imamo $x = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ in $\alpha_2 \neq 0$. Dokazati moramo, da vektorja e_2 in e_3 ležita v $\mathcal{B}x$. Res, če vzamemo $x_1 = 1$ in preostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_2 e_2 \in \mathcal{B}x$, če pa vzamemo $x_3 = 1$ in preostale elemente enake 0, pa dobimo, da je $\alpha_2 e_3 \in \mathcal{B}x$. Če pa je $i = 3$, je $x = \alpha_3 e_3$ in $\alpha_3 \neq 0$. Če vzamemo $a = 1$ in preostale elemente enake 0, vidimo, da je $\alpha_3 e_3 \in \mathcal{B}x$. Torej je prostor $\mathcal{B}$ res poltranzitiven.

Naj bo $\mathcal{A}$ minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathcal{B}$. Dokazali bomo, da matrike iz $\mathcal{A}$ nimajo skupnega pravega netrivialnega invariantnega podprostora. Pa denimo nasprotno. Naj bo $\mathcal{U}$ pravi netrivialni podprostor $\mathbb{F}^3$, za katerega je $\mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. Izberimo si neničeln vektor $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathcal{U}$. Dokažimo, da obstaja v $\mathcal{U}$ tudi tak neničeln vektor, ki ima prvo komponento enako 0, torej $y = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \in \mathcal{U}$. To je očitno, če je $\alpha_1 = 0$, ker lahko vzamemo kar $y = x$. Naj bo torej $\alpha_1 \neq 0$. Spomnimo se, da je prostor $\mathcal{A}$ poltranzitiven. Zato mora za par vektorjev x in e_2 veljati $x \in \mathcal{A}e_2$ ali pa $e_2 \in \mathcal{A}x$. Za vse matrike $A \in \mathcal{A}$ je $Ae_2 \neq x$, zato mora obstajati matrika $A \in \mathcal{A}$, za katero je $Ax = e_2$. Torej je $e_2 \in \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ in smo našli neničeln vektor $y = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \in \mathcal{U}$.

Podobno zdaj dokažemo, da je $e_3 \in \mathcal{U}$. Če je $\beta_2 = 0$, je to očitno. Naj bo torej $\beta_2 \neq 0$. Za par vektorjev y in e_3 mora veljati $y \in \mathcal{A}e_3$ ali pa $e_3 \in \mathcal{A}y$. Za vse matrike $A \in \mathcal{A}$ je $Ae_3 \neq y$, zato mora obstajati matrika $A \in \mathcal{A}$, za katero je $Ay = e_3$. Torej je $e_3 \in \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$.

Dokažimo še, da tudi vektorja e_1 in e_2 ležita v $\mathcal{U}$. Zaradi poltranzitivnosti mora veljati, da je $e_2 \in \mathcal{A}e_1$ ali pa $e_1 \in \mathcal{A}e_2$. Za vse matrike $A \in \mathcal{A}$ je $Ae_2 \neq e_1$, zato mora obstajati matrika $B \in \mathcal{A}$, za katero je $Be_1 = e_2$. Matrika B ima tako prvi stolpec enak $[0\ 1\ 0]^T$, torej je $a = 0$ in $b = 1$. Zato velja tudi $Be_3 = e_1$. Tako je $e_1 \in \mathcal{A}e_3 \subset \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ in nadalje $e_2 = Be_1 \in \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. Prostor $\mathcal{U}$ tako vsebuje vse tri bazne vektorje e_1, e_2 in e_3 in je zato enak $\mathbb{F}^3$, kar je protislovje. Dokaz je končan. ∎

Videli smo torej, da za vsak $n \geq 3$ obstaja nerazcepen poltranzitiven vektorski prostor matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. V algebraično zaprtem obsegu in pri $n = 2$ so stvari preprostejše.

Naj bo $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg. Vsak poltranzitiven podprostor $\mathcal{A}$ v $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$, ki ni tranzitiven, je trikotljiv. Vsak minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ je simultano podoben prostoru

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & ca \end{bmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

za neki fiksen skalar $c \neq 0$. Dokaze teh trditev izpustimo, bralec jih lahko najde v članku [9]. Predpostavka, da je $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg, je bistvena, kot smo videli že pri poltranzitivnih algebrah. V tem primeru je torej vsak minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ trikotljiv in dvodimenzionalen. Nič od tega pa ni res za $n \geq 3$. V izreku 6 smo videli, da ni nujno trikotljiv. Naslednji izrek pa pokaže, da minimalen trikotljiv poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nima nujno dimenzije n.

Izrek 7. *Prostor*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & a \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

je minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_3(\mathbb{F})$ *dimenzije* 4.

Dokaz. Vzemimo bazo prostora $\mathcal{A}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ neničeln vektor v $\mathbb{F}^3$. Če je $\gamma \neq 0$, je x cikličen vektor, saj je $Cx = \gamma e_1$, $Ax - \alpha e_1 = \gamma e_2$ in $Dx - \beta e_2 = \gamma e_3$. Če je $\gamma = 0$ in je $\beta \neq 0$, imamo $Bx = \beta e_1$ in $Dx = \beta e_2$. Če pa je $\gamma = \beta = 0$, je $\alpha \neq 0$ in $Ax = \alpha e_1$. Tako smo dokazali poltranzitivnost. Dokažimo še, da je $\mathcal{A}$ minimalen poltranzitiven prostor. Denimo, da obstaja podprostor $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$, ki je tudi poltranzitiven. Zaradi poltranzitivnosti obstajajo matrike v $\mathcal{B}$, ki preslikajo vektor e_3 zaporedoma v vektorje e_1, e_2 in e_3. Torej so naslednje linearno neodvisne matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vse vsebovane v $\mathcal{B}$ za neke skalarje $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{F}$. Ker je dimenzija $\mathcal{B}$ enaka 3, te matrike napenjajo ves $\mathcal{B}$. Vzemimo $x = -e_2 + b_1 e_3$, če je $b_1 \neq 0$, in $x = b_2 e_1 - e_2$ sicer. Opazimo, da nobena matrika iz $\mathcal{B}$ ne preslika x v e_1, niti e_1 v x. To protislovje dokazuje minimalnost prostora $\mathcal{A}$. ■

V prejšnjem razdelku smo videli, da poltranzitivna algebra matrik vedno vsebuje nilpotent največjega možnega indeksa. Za vektorske prostore to ne velja. Vektorski prostor v pravkar dokazanem izreku namreč ne vsebuje nobenega nilpotenta indeksa 3. Res, če je

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & a \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

nilpotentna matrika, je $a = d = 0$ in je že $A^2 = 0$, torej ima A indeks nilpotentnosti največ 2. Vendar pa nad algebraično zaprtim obsegom poltranzitiven vektorski prostor vedno vsebuje kakšen neničeln nilpotent. Dokaz te trditve najdemo v članku [9].

Nad algebraično zaprtim obsegom je vsak poltranzitiven vektorski prostor v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ dimenzije n trikotljiv. Opisati se da vse n-dimenzionalne poltranzitivne vektorske prostore v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad algebraično zaprtim obsegom za $n \leq 4$. Dokaze teh in še drugih trditev o poltranzitivnih vektorskih prostorih matrik lahko bralec najde v člankih [2], [8] in [9].

LITERATURA

[1] E. A. Azoff, *On finite rank operators and preannihilators*, Memoirs of the AMS **64** (1986), št. 357.

[2] J. Bernik, R. Drnovšek, D. Kokol Bukovšek, T. Košir in M. Omladič, *Reducibility and triangularizability of semitransitive spaces of operators*, Houston J. Math. **34** (2008), 235–247.

[3] J. Bernik, R. Drnovšek, D. Kokol Bukovšek, T. Košir, M. Omladič in H. Radjavi, *On semitransitive jordan algebras of matrices*, J. Algebra Appl. **10** (2011), 319–333.

[4] J. Bernik, L. Grunenfelder, M. Mastnak, H. Radjavi in V. G. Troitsky, *On semitransitive collections of operators*, Semigroup Forum **70** (2005), 436–450.

[5] J. Bernik in M. Mastnak, *Lie algebras acting semitransitively*, preprint.

[6] R. Drnovšek, *Trikotljivost družin operatorjev na končnorazsežnih prostorih*, Obz. mat. fiz. **49** (2002), 129–139.

[7] H. Radjavi in V. G. Troitsky, *Semitransitive subspaces of operators*, Linear and Multilinear Algebra **57** (2009), 1–12.

[8] H. Rosenthal in V. G. Troitsky, *Strictly semi-transitive operator algebras*, Journal of Operator Theory **53** (2005), 315–329.

[9] Semitransitivity Working Group at LAW'05, Bled, *Semitransitive subspaces of matrices*, Electronic Journal of Linear Algebra **15** (2006), 225–238.

NOBELOVO NAGRADO ZA KEMIJO 2011 JE PREJEL DANNY SHECHTMAN ZA ODKRITJE KVAZIKRISTALOV

JANEZ DOLINŠEK

Institut Jožef Stefan,
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani in
Center odličnosti EN FIST

PACS: 61.44.Br

Kvazikristali so snovi, v katerih obstaja nov red dolgega dosega brez translacijske simetrije. Njihove simetrije vsebujejo kristalografsko „prepovedane" elemente, kot so 5-, 8- 10- in 12-števna rotacijska os. Kvazikristali so zlitine kovinskih elementov (Al-Pd-Mn, Al-Cu-Fe, Al-Ni-Co, Tb-Mg-Zn, itd.), kvaziperiodične simetrije pa najdemo tudi v samo-organizirani mehki snovi. Visokokvalitetni kvazikristali imajo veliko električno upornost in majhno toplotno prevodnost, nekateri so trši od jekel, kemijsko nereaktivni (ne korodirajo) in imajo majhen količnik trenja. V njih je možno uskladiščiti velike količine vodika. Za odkritje kvazikristalov je izraelski znanstvenik Danny Shechtman prejel Nobelovo nagrado 2011 za kemijo. Shechtmanovo odkritje kvazikristalov ima zanimivo in poučno zgodovino, ki kaže, kako težko je prodreti s popolnoma novimi spoznanji v mednarodno strokovno javnost.

NOBEL PRIZE 2011 FOR CHEMISTRY WAS AWARDED TO DANNY SHECHTMAN FOR THE DISCOVERY OF QUASICRYSTALS

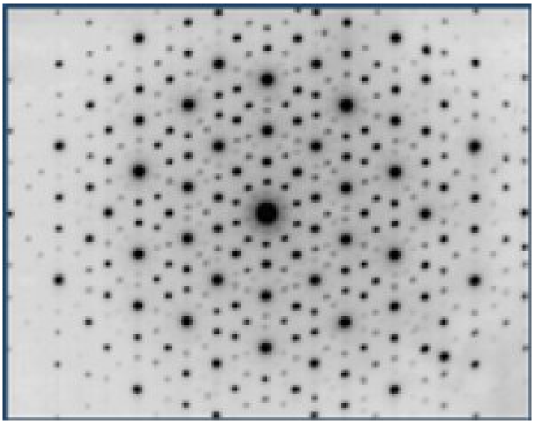
Quasicrystals are materials having a new type of perfect long-range order without translational periodicity. Their symmetries (icosahedral, dodecagonal, decagonal, octagonal, and pentagonal) involve symmetry elements such as 5-, 8-, 10- and 12-fold rotation axes, which are incompatible with the periodicity of a Bravais lattice. A consequence of nonperiodicity is that quasicrystals – alloys of metallic elements (Al-Pd-Mn, Al-Cu-Fe, Al-Ni-Co, Tb-Mg-Zn, etc.) – exhibit more semimetallic to insulating-like properties. Their favourable physical and mechanical properties – high hardness, resistance to corrosion and wear, low friction coefficient, low electrical and thermal conductivity, superplasticity at elevated temperatures, ability to store large amounts of hydrogen – make quasicrystals interesting new materials for the technological application. Quasiperiodic symmetries are observed also in self-organized soft matter. The Nobel prize 2011 for chemistry was awarded to Israeli scientist Danny Shechtman for the discovery of quasicrystals. This discovery has interesting history, showing the difficulties of accepting a new breakthrough discovery in the scientific society.

Uvod

Nobelovo nagrado za kemijo 2011 je prejel izraelski znanstvenik Danny Shechtman (slika 1) z Izraelskega instituta za tehnologijo Technion v Haifi za

Slika 1. Danny Shechtman leta 2007 na konferenci „Quasicrystals – The Silver Jubilee" ob 25. obletnici odkritja kvazikristalov v Jeruzalemu.

odkritje kvazikristalov, trdnih snovi z novim strukturnim redom dolgega dosega brez translacijske simetrije. Razlika med klasičnimi kristali in kvazikristali je v strukturi njihovih kristalnih mrež [1]. V kristalih lahko definiramo skupek majhnega števila atomov na določenih medsebojnih legah, ki tvorijo osnovno celico kristalne mreže. Kristal zgradimo tako, da zlagamo osnovne celice v prostor drugo za drugo, podobno kot gradimo zid iz enakih opek. Tako zgrajena kristalna mreža je periodična v prostoru. Pravimo, da v njej obstaja strukturni red dolgega dosega, saj je lega vsakega atoma v prostoru natančno določena z lego osnovne celice. Teorija Bravaisovih mrež nam pove, da lahko prazen prostor enolično zapolnimo le z osnovnimi celicami, ki imajo določeno simetrijo glede na vrtenje. Pri zasuku osnovne celice okrog dane osi se mora razporeditev atomov ponoviti prej kot pri polnem zasuku. Periodične kristalne mreže lahko zgradimo le iz osnovnih celic, ki so simetrične glede na enega od štirih zasukov – za kot 180, 120, 90 ali 60 stopinj. V ravninski mreži imajo take osnovne celice obliko pravokotnika, trikotnika, kvadrata in šesterokotnika. Pravimo tudi, da imajo omenjene osnovne celice simetrijo dvo-, tri-, štiri- ali šestštevne rotacijske osi. Te simetrije v kristalografiji imenujemo „dovoljene". V principu je možno definirati tudi osnovne celice z drugačnimi simetrijami. Tak primer je peterokotnik, ki pri vrtenju skozi središče preide sam vase že pri zasuku za petino polnega zasuka. Peterokotnik ima simetrijo petštevne osi. S sestavljanjem peterokotnikov pa ravnine ne moremo pokriti v celoti, saj



Slika 2. Uklonska slika ikozaedričnega kvazikristala.

med peterokotniki ostajajo prazne vrzeli. Podobno velja, da ravnine ne moremo zapolniti enolično z osnovnimi celicami s simetrijo, višjo od šesterokotnika (torej s sedmerokotniki, osmerokotniki, itd.), saj se take osnovne celice prekrivajo. Petštevno simetrijo in simetrije, večje od šestštevne, zato imenujemo kristalografsko „prepovedane“ simetrije.

V več stoletjih raziskav fizike in kemije trdnih snovi je med znanstveniki veljalo prepričanje, da vse kristalne strukture vsebujejo le dovoljene simetrije, medtem ko struktur s prepovedanimi simetrijami v naravi ni. Veliko osuplost je povzročilo odkritje Dannyja Shechtmana leta 1984, ko je objavil strukturo kovinske zlitine aluminij-mangan [2]. Rentgenska uklonska slika je kazala na to, da ima zlitina popolno simetrijo telesa ikozaedra (slika 2).

Simetrija ikozaedra vsebuje poleg dovoljenih simetrijskih elementov dvo- in trištevnih osi ter simetrije zrcaljenja glede na središčno točko telesa (inverzija) tudi prepovedano simetrijo petštevne osi. Kasneje so odkrili še strukture z drugimi prepovedanimi simetrijami: s pentagonalno (vsebuje petštevno os), oktagonalno (osemštevna os), dekagonalno (desetštevna os) ter dodekagonalno (dvanajststševna os). Vse te strukture so popolnoma urejene tako, da je lega vsakega atoma v mreži natanko določena. Strukture imajo torej popoln red dolgega dosega. Zaradi vsebnosti prepovedanih simetrij pa take strukture niso prostorsko periodične in ne moremo definirati osnovne celice. Te neperiodične strukture s popolnim redom dolgega dosega so poimenovali kvaziperiodične, kristale s takimi strukturami pa kvazikristale.

Razliko med periodično in kvaziperiodično strukturo lahko predstavimo na enostavnem modelu hipotetičnega enodimenzionalnega kristala v obliki linearne verige, ki je sestavljena iz dolgih (L) in kratkih (S) segmentov [1]. Periodičen kristal dobimo tako, da najprej definiramo osnovno zaporedje obeh segmentov, na primer v obliki LS, nato pa dodajamo osnovno zaporedje v prostor drugo za drugo. Dobimo periodično verigo LSLSLSLSLS . . . , kjer segment LS predstavlja osnovno celico. Periodičen kristal smo tako dobili z uporabo pravila dodajanja. Kvaziperiodičen kristal pa dobimo, če namesto pravila dodajanja uporabimo pravilo zamenjave: v zaporednih korakih zamenjujemo segment L z zaporedjem LS, segment S pa s segmentom L. Veriga sedaj nastaja v inflacijskih korakih takole:

začetno zaporedje:	LS
prva zamenjava:	LSL
druga zamenjava:	LSLLS
tretja zamenjava	LSLLSLSL
itd.	

Rezultat je popolnoma urejena veriga, kjer je lega vsakega od segmentov L in S v verigi natančno določena, vendar pa taka veriga ne kaže nikakršne translacijske periodičnosti; v njej ne najdemo vzorca, ki bi se po neki periodi spet ponovil. Kvaziperiodično strukturo smo tako dobili z uporabo matematičnega pravila zamenjave, zato v verigi obstaja popoln red dolgega dosega, ki pa ni periodičen.

Kristalografsko se periodične in kvaziperiodične strukture velikokrat opisujejo v recipročnem prostoru valovnih vektorjev $\vec{G}$, ki je konjugiran direktnemu prostoru Bravaisove mreže. Prostorska porazdelitev atomov $\rho(\vec{r})$ v realnem prostoru se razvije v Fourierovo vrsto gostotnih valov z vektorji recipročne mreže $\vec{G}$

$$\rho(\vec{r}) = (1/V) \sum_{\vec{G}} \rho_{\vec{G}} \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}) \,. \tag{1}$$

Tukaj V predstavlja volumen kristala, $\rho_{\vec{G}}$ pa so Fourierove komponente atomske gostote. V periodičnih kristalih recipročni vektorji $\vec{G}$ predstavljajo diskretno množico, kjer lahko vsak vektor $\vec{G}$ zapišemo kot celoštevilčno linearno kombinacijo treh baričnih vektorjev $\vec{a}_i$:

$$\vec{G} = h\vec{a}_1 + k\vec{a}_2 + l\vec{a}_3 \,. \tag{2}$$

Trojica celih števil h, k, l predstavlja Millerjeve indekse. V kvazikristalih število linearno neodvisnih baznih vektorjev v recipročnem prostoru presega dimenzijo realnega prostora. Pri ikozaedričnih kvazikristalih vsebuje recipročni prostor šest baričnih vektorjev $\vec{a}_i$ in enačbo (2) je potrebno zamenjati z enačbo

$$\vec{G} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3 + n_4\vec{a}_4 + n_5\vec{a}_5 + n_6\vec{a}_6 \,. \tag{3}$$

Tako se ikozaedrična struktura opisuje v šestdimenzionalnem recipročnem prostoru, valovni vektorji $\vec{G}$ pa tvorijo množico, ki singularno gosto zapolni recipročni prostor. Struktura dekagonalnih kvazikristalov pa se opisuje v petdimenzionalnem hiperprostoru.

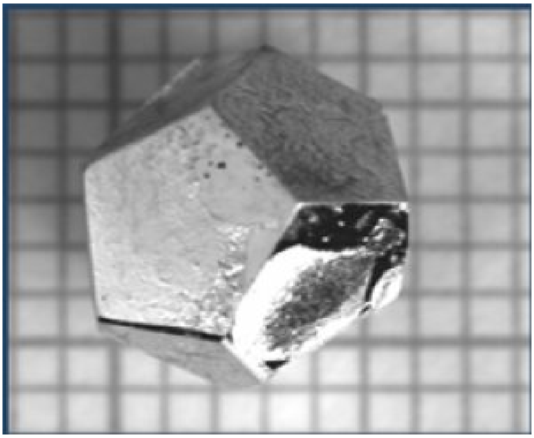
Dejstvo, da vektorji recipročne mreže tvorijo gosto množico, razloži šibke električne in toplotne transportne pojave v kvazikristalih. Elektrone, ki prenašajo električni tok in toploto po kristalu, ter mrežna nihanja, ki prenašajo toploto, lahko v valovni sliki v približku opišemo kot ravne sinusne valove. V periodičnih strukturah se lahko razširjajo ravni valovi s poljubnimi valovnimi vektorji $\vec{k}$, razen s tistimi, ki zadoščajo Braggovemu uklonskemu pogoju

$$2\vec{G}\cdot\vec{k} \pm |\vec{G}|^2 = 0 \,. \tag{4}$$

Stanja $\vec{k}$, ki zadoščajo pogoju (4), so izjemna in predstavljajo stoječe valove, ki ne sodelujejo pri transportnih pojavih (ne prenašajo električnega toka in toplote). V kvazikristalih izjema postane pravilo. Zaradi goste množice vektorjev $\vec{G}$ je Braggov pogoj (4) izpolnjen za skoraj vsak valovni vektor $\vec{k}$, zato obstaja le malo ravnih valov, ki bi sodelovali v transportnih pojavih. Posledici sta majhna električna in toplotna prevodnost kvazikristalov.

Doslej je znanih že več kot sto različnih snovi s kvazikristalno strukturo, največ od tega z ikozaedrično simetrijo. Snovi so bile večinoma vzgojene v laboratorijih [3] (slika 3), v naravi so jih našli pred kratkim v mineralih iz Korjaškega pogorja na Kamčatki.

Kvazikristali so zlitine kovinskih elementov (Al-Pd-Mn, Al-Cu-Fe, Al-Ni-Co, Tb-Mg-Zn, itd.), njihove fizikalno-kemijske lastnosti pa včasih združujejo lastnosti, ki so v klasičnih kovinskih spojinah nezdružljive (npr. kombinacija električni prevodnik in toplotni izolator ter kombinacija trdote,



Slika 3. Ikozaedrični kvazikristal Tb-Mg-Dy z dodekagonalno morfologijo (ki je dualna ikozaedrični).

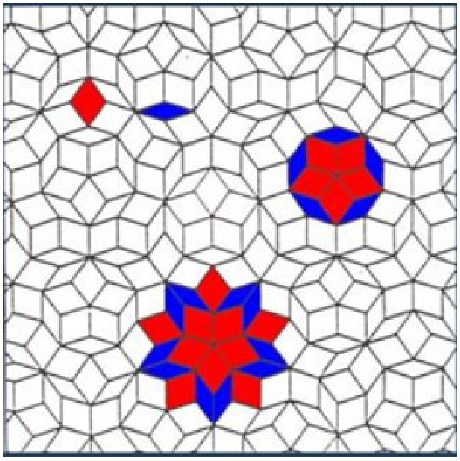
elastičnosti in majhnega količnika trenja). Nekateri visokokvalitetni kvazikristali so trši od jekel in so kemijsko neaktivni (ne korodirajo). V njih je možno skladiščiti velike količine vodika, uporabni pa so tudi kot katalizatorji za pridobivanje vodika iz metanolove pare, v obeh primerih za potrebe pogonov z gorivnimi celicami. Kvazikristale gojimo iz talin, kvalitetni vzorci pa imajo dober strukturni red z majhnim številom defektov v kristalni mreži. Omenjene lastnosti nakazujejo možnost uporabe kvazikristalov za trde prevleke, za plasti s termično zaporo (npr. prevleke strojnih delov, ki se močno grejejo), „tribološke“ materiale (npr. kroglični ležaji in hitro vrteči se deli motorjev), za shranjevanje vodika in za heterogeno katalizo. Zelo atraktivna praktična uporaba kvazikristalov je prevleka kuhinjskih posod in ponev. Zaradi kemijske neaktivnosti posoda ohrani sijaj, zaradi trdote je ne opraskamo pri čiščenju, zaradi slabe toplotne prevodnosti pa se hrana na dnu ne prežge.

Shechtmanovo odkritje kvazikristalov ima zanimivo in poučno zgodovino, ki kaže, kako težko je prodreti s popolnoma novimi spoznanji v mednarodno strokovno javnost. Pravzaprav Shechtman kvazikristalov ni iznašel, temveč jih je „le“ odkril, saj so bili okrog nas vseskozi že prej, le da zanje nismo vedeli. Kot uradni datum odkritja kvazikristalov velja datum objave članka Shechtmana in še treh kolegov v reviji Physical Review Letters 9. oktobra 1984 [2], vendar je dejanski datum odkritja 2. april 1982, ko je Shechtman v svojem laboratoriju za elektronsko mikroskopijo opazil nenavadno uklonsko sliko zlitine mangan-aluminij, ki je kazala desetštevno simetrijo. Tedaj je „vedel, da je to nemogoče“ že zato, ker je nekaj let prej kot študent opravil izpit iz kristalografije na Institutu Technion, kjer je v učbeniku pisalo, da take strukture niso mogoče. Svoj takratni dvom o dobljenem rezultatu je izrazil v delovnem zvezku z opazko v hebrejščini, da „taka žival ne obstaja“. Tedaj se je pokazala vsa čvrstost in odprtost Shechtmanovega duha, ki bi lahko svoj nenavadni rezultat bodisi pripisal eksperimentalni napaki, bodisi poslušal „prijateljske“ nasvete svojih uveljavljenih kolegov in rezultat zavrgel ali pa se uklonil posmehu kolegov ter rezultat za vedno pozabil. Namesto tega je zavzel stališče „ne verjemi samo zato, ker tako piše v knjigah“.

Že nekaj let pred Shechtmanovim odkritjem je potekala živahna akademska igra matematikov, ki so skušali pokriti ravnino z objekti kvaziperiodičnih simetrij (npr. s peterokotniki ali osmerokotniki), in sicer tako, da bi bila ravnina pokrita enolično brez prekrivanja objektov in brez praznin med njimi. Britanskemu matematiku Rogerju Penrosu je uspelo ustvariti pokritje (pravzaprav teoretični dvodimenzionalni kvazikristal), kjer je bil peterokotnik obkrožen s še petimi peterokotniki, vsi skupaj so bili v večjem peterokotniku, vzorec pa se je inflatorno nadaljeval v zmeraj večje peterokotnike. Pri tem pokritju ni uporabil le peterokotnikov, temveč tudi njihove dele. Pokritje je poznano kot Penrosov vzorec (slika 4) in ima petštevno simetrijo.

Drug britanski znanstvenik, kristalograf Alan Mackay, je uporabil Penrosov vzorec in z njim simuliral uklonski eksperiment ter potrdil, da ima uklonska slika tudi petštevno simetrijo. Shechtmanu Mackayeve ugotovitve takrat še niso bile znane. Po svojem odkritju je Shechtman pričel poizvedovati pri drugih strokovnjakih s področja, kaj vedo o strukturah s kristalografsko prepovedanimi simetrijami. Vsa velika imena kristalografije so Shechtmanovo odkritje zavrgla, saj Shechtmanovo ime tedaj še ni imelo veljave. Po svoje je bilo to za Shechtmana ugodno, saj ni nihče skušal ponoviti njegovega eksperimenta. Končno je Ilan Blech, izraelski strokovnjak za rentgenski uklon, prisluhnil novemu odkritju in skupaj sta pričela razvijati strukturne modele, ki bi ustrezali desetštevni uklonski sliki.

V istem času je potekala še povezana matematična aktivnost na Univerzi Pennsylvania, ker je doktorski študent Dov Levine pod mentorstvom Paula Steinhardta izdelal disertacijo in v njej objavil teoretični model kri-



Slika 4. Penrosova mreža s petštevno simetrijo.

stalne strukture, ki je odlično popisala Shechtmanov rezultat. Levin je želel rezultat objaviti, vendar je Steinhardt temu nasprotoval, saj se je bal reakcije kolegov zaradi splošno priznane dogme o neobstoju kristalnih struktur s prepovedanimi simetrijami.

Shechtman je tudi sam odlašal z objavo rezultata v mednarodnem strokovnem tisku. Končno sta z Blechom sklenila odkritje poslati v objavo v revijo Journal of Applied Physics, vendar na način, da sta „drevo skrila v gozd“, tako da bi površni bralec informacijo o prepovedani simetriji prezrl v gori metalurških informacij o študirani zlitini. Urednik je članek zavrnil z obrazložitvijo, da ni dovolj zanimiv za fizike. Shechtman se je tedaj zavedel, da mora izboljšati prezentacijo odkritja. Za pomoč je zaprosil Johna Cahna z ameriškega *National Bureau of Standards*, kjer je Shechtman gostoval pred leti. Cahn je tedaj že vedel za odkritje, vendar prvi dve leti vanj ni verjel. Po dveh letih je spremenil svoje prepričanje in je pričel aktivno sodelovati pri interpretaciji rezultatov. Pridružil se jim je še francoski kristalograf Denis Gratias, ki je razložil matematični opis kristalografije. Vsi skupaj so potem poslali izboljšani rokopis članka v revijo *Physical Review Letters*, ki je članek takoj sprejela in ga objavila 12. novembra 1984 pod naslovom *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry* [2]. Odgovor strokovne javnosti je bil takojšen in silovit. Teoretiki so Shechtmanovo eksperimentalno odkritje takoj povezali s teorijami

Penrosa in Mackaya. Levinov in Steinhardtov članek v isti reviji je sledil skoraj istočasno. Naslov njunega članka je *Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures*, in ta članek je kvazikristalom tudi dal poimenovanje. Kmalu zatem pa je prišel hladen tuš v obliki kritike dvakratnega Nobelovega nagrajenca Linusa Paulinga, enega takrat največjih avtoritet na področju struktur materialov, ki je v karieri tudi sam podrl nekaj znanstvenih dogem. Paulingova zavrnitev Shechtmanovega odkritja z izjavo, da gre za kristalne dvojčke, je bila izjemno boleča, vendar Shechtman svojega odkritja ni preklical. Pauling je preminil leta 1994, ne da bi sprejel Shechtmanovo odkritje. Podobno situacijo je opisal že nemški velikan fizike Max Planck z izjavo da „nova znanstvena dognanja ne triumfirajo s prepričanjem sodobnih nasprotnikov o njihovi veljavnosti, temveč s tem, da po smrti nasprotnikov njihovi nasledniki z lahkoto sprejmejo novo dognanje“.

Danes v svetu ni več kristalografa, ki ne bi sprejel Shechtmanovega odkritja. Na podlagi odkritja kvazikristalov je Mednarodna zveza za čisto in uporabno kemijo IUPAC spremenila definicijo kristalov iz „kristali so translacijsko periodične strukture“ v bolj splošno „kristali imajo diskreten uklonski spekter“ in s tem vsebujejo tudi kvazikristale.

V raziskave fizike kvazikristalov smo se pred petnajstimi leti dejavno vključili tudi slovenski znanstveniki. Na Oddelku za fiziko trdne snovi Instituta Jožef Stefan in Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani raziskujemo strukturne, električne, magnetne in termične lastnosti ikozaedričnih, dekagonalnih in dodekagonalnih kvazikristalov. V tem času smo navezali stike tudi z Dannyem Shechtmanom. Potrditev kvalitete in mednarodne vpetosti naših raziskav ter Shechtmanovega osebnega strokovnega priznanja našega dela je bilo tudi vabilo na praznovanje Shechtmanovega 70. rojstnega dne, ki je bilo januarja 2011 v Haifi, nanj pa je bilo povabljenih 20 vodilnih znanstvenikov s področja kvazikristalov z vsega sveta. Strokovna predavanja v okviru praznovanja so dostopna na portalu YouTube na spletnem naslovu `http://www.youtube.com/watch?v=GSTIsw59BDQ`.

LITERATURA

[1] C. Janot, *Quasicrystals – A Primer*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias in J. W. Cahn, *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 1951–1953.

[3] M. Feuerbacher, C. Thomas in K. Urban, *Single-quasicrystal growth, Quasicrystals*, (ed. H.-R. Trebin), Wiley-VCH GmbH, 2003, 1–26.

ZAKAJ UK NARAVOSLOVJA NE MORE BITI ZGOLJ ZABAVA – GIMNAZIJSKE IZKUŠNJE[1]

VITOMIR BABIČ

Šolski center Lava, Celje

Gimnazije se spreminjajo ...

Za uvod naj s podatki opišem, kakšne spremembe je doživel gimnazijski program v zadnjih 15-20 letih. Če je bilo v Sloveniji še leta 1994, ko se je v srednje šolstvo vpisovalo okrog 30 000 otrok, na voljo vsega skupaj 44 gimnazij, je v letu 2010 takih šol, ki izobražujejo po maturitetnem programu za naravoslovne predmete (izvzete so ekonomske in umetniške gimnazije) skoraj dvakrat več – kar 67 gimnazij[2]. V ta nabor šol se je vpisala generacija z vsega skupaj 18 800 otroci. Ker je število dijakov upadlo za več kot tretjino, je očitno, da gimnazije niti ne morejo napolniti svojih kapacitet, kaj šele, da bi si lahko privoščili ustrezno diferenciacijo, ki jo gre pripisati najtežjemu učnemu programu (po kognitivni zahtevnosti to gimnazijski program najbrž je). Podatki kažejo, da je v letošnjem letu izvedlo omejitev vpisa le 12 (od 67) šol! To pomeni, da se v gimnazije vpisuje brez kakršnekoli omejitve tipično okrog 70% dijakov. Šole, ki imajo zadosten priliv dijakov in tudi omejitev vpisa, so praviloma skoncentrirane v Ljubljani (4 gimnazije z omejitvijo) in Mariboru (3 gimnazije z omejitvijo). V današnjo („podeželsko“ – če je npr. Celje podeželje ...) gimnazijo se torej lahko vpiše praktično kdorkoli, ne glede na njegov osnovnošolski rezultat in, kar je še huje, – ne glede na njegove sposobnosti, aspiracije in pripravljenost za učenje. In se tudi vpisujejo. To vem, ker učim na taki šoli.

Veliko število gimnazij pomeni tudi veliko število splošnih maturantov. Okrog 40% generacije opravi splošno maturo (še okrog 40% opravi poklicno maturo). Prepustnost gimnazij in ostalih srednjih šol je velika, a takšna

[1]Ponatis s soglasjem avtorja in SAZU

[2]Podatki temeljijo na dokumentih, objavljenih na spletnih staneh Ministrstva RS za šolstvo in šport ter Zavoda RS za statistiko.

najbrž mora biti – ne nazadnje morda tudi zaradi potreb terciarnega izobraževanja, kjer so samo v letu 2009 izdali kar 18 100 diplom. Tega podatka ne upam komentirati.

... in učitelji z njimi?

Za večino gimnazij velja, da je nabor dijakov, ki jo obiskujejo, po sposobnostih, motivaciji in pripravljenosti za delo, zelo raznolik. Če grobo ilustriram – nekoč (na šolah z ustrezno selekcijo najbrž tudi danes) so v gimnazijah sedeli odlični osnovnošolci, morda tu in tam kakšen prav dober. Danes neredko v istem prostoru sedijo „odličnjaki“ skupaj z „dobrimi“ osnovnošolci (slabše ocene imajo povečini iz temeljnih predmetov ...). Opravka imamo tudi z razredi, v katerih boste težko našli osnovnošolskega odličnjaka. Celo šole se (tam, kjer jih je več) že nekako razvrščajo glede na vpis „kvalitetnih“ dijakov. Povprečen učitelj v povprečnem gimnazijskem razredu je torej izpostavljen dejstvu, da mora (neredko težko) snov predstaviti tako, da se bo v svoji učni uri posvetil zelo raznolikemu naboru dijakov. Komu naj se posveti? Naj težišče svojega dela usmeri na sposobnejši pol razreda (in ostalim, ki temu lahko kolikor toliko sledijo) in prezre muke oz. apatijo tistih, ki potrebujejo veliko več dodatne razlage in pozornosti, ki jo potrebujejo za osvojitev „minimalnih standardov“? Ali naj poskrbi za veliko prepustnost in skuša s svojimi dijaki preseči prag minimalnega standarda, odlični pa bodo že nekako poskrbeli zase? Odločitev je težka in je povezana s kupom etičnih dilem, pa tudi z eksistenčnimi vprašanji. O eksistenci učitelja dandanašnji močno odloča število zadostnih ocen, ki jih podeli svojim dijakom. Nagrajen je torej „trud“, ki ga učitelj vloži v napredek „slabših“ dijakov. Od tega je konec koncev odvisno število oddelkov na šoli ter s tem povezano število delovnih mest za kolege v zbornici. Če pa je učitelj uspel prenesti svoje delo v odličnost svojih dijakov, ostane to pravzaprav prezrto, izkazuje se celo kot nepomembno. Vprašanje „Komu prilagoditi pouk?“ je tudi velik izziv za sestavljavce učnih načrtov, ki se morajo nastale situacije v gimnazijah zavedati. Prenovljeni UN za fiziko nastalo situacijo upošteva. V večji meri poudarja in uvaja aktivne metode dela, pri katerih je mogoče dijaka stimulirati in povezati z ustvarjalnim delom učenja bolj, kot je to mogoče s klasičnimi metodami poučevanja. V manjšem deležu omogoča tudi prilagajanje sposobnostim in aspiracijam dijakov - še posebej v delu, ki se nanaša na eksperimentalno delo, kar je prav in je potrebno. A žal ni metode, ki bi nadomestila pripravljenost dijaka za umsko delo. Tu in tam se zdi, da odgovorni mislijo, da je s „pravilnim“ načinom poučevanja mogoče doseči uspeh z vsemi dijaki. Menim, da je uspeh seveda odvisen od tega, ali je dijak pripravljen vložiti svoj del umskega napora – truda –, ki je potreben, če želi obvladovati kaj več kot zgolj nizanje dejstev. Naravoslovne teorije so sestavljene in abstraktne misli, zakonitosti narave ni bilo nikoli mogoče doumeti brez truda. Ali je pouk lahko bolj zabaven, kot je morda nekoč bil? Najbrž je lahko. Moderna IKT sredstva lahko na tem področju (predvsem pri pouku naravoslovja) pomagajo. A pouk je zabava le za tistega, ki si znanja res želi! Temu je pouk pravzaprav potešitev njegove potrebe in mu ne predstavlja napora - v procesu je nagrajen z napredkom, ki ga zazna in ga potrebuje. Če si dijak določenih znanj ne želi, mu učenje pač ne more predstavljati kaj drugega kot dolgočasen, a obvezen „dril“, ki ga mora preživeti na poti do želenega cilja – spričevala. (Najbrž smo vsi v življenju – ne ravno v šoli – kdaj doživeli podobno situacijo.) Iz povedanega sledi, da je dandanašnji učitelj postavljen pred (morda nov?) težak izziv – v dijakih mora vzbuditi željo po znanju. Predstaviti jim mora znanje kot vrednoto, kot nekaj lepega in zadovoljujočega, nekaj, kar ima uporabno, etično in tudi estetsko vrednost. Šele potem, ko ga dijaki razumejo na ta način, lahko govorimo o tem, da bo postal pouk „zabaven“.

Pred učitelja so postavljeni drugačni izzivi, kot nekoč. Menim, da prav vsi potrebujemo strokovno izpopolnjevanje, morda še najbolj iz specialne didaktike. Predlagam, da naj se stalno izobraževanje učitelja zapiše kot njegova delovna obveza. Namesto, da bi preživel 20 ur/teden v razredu, naj se njegova delovna obveznost spremeni tako, da bo v razredu 19 ur/teden, za ostali čas (v obsegu 1 ura/teden) pa bi se MORAL udeležiti strokovnega izpopolnjevanja. Morda ne ravno vsako leto – a vsaj enkrat na 5 let. Na ta način bi dosegli, da bi teoretično zamišljena prenova poučevanja veliko hitreje dosegla prakso, pa tudi institucije, ki za strokovni napredek učiteljev skrbijo, bi dobile boljši vpogled v stanje „na terenu“. Zavedam se, da bi imel ukrep določene finančne posledice, a zdi se, da bi učinki predlaganega ukrepa povišano ceno šolstva tudi upravičili.

Motivacija za delo učitelja

Le motiviran učitelj je lahko uspešen učitelj. Motivacija je primarno seveda „notranja“, a tudi „zunanja“, kamor sodi tudi nagrajevanje učiteljev za delo. Ali v obstoječem sistemu prepoznamo „dobrega“ učitelja in ali ga znamo ustrezno nagraditi? Zdi se, da so tu še velike rezerve. V obstoječem Pravilniku o napredovanju učiteljev se le en (1) člen nanaša na delo in uspeh učitelja v razredu, vse ostalo so vzporedne aktivnosti! Tako lahko doživimo, da ima kolega, ki v razredu dobro poučuje, vzdržuje red in disciplino, uživa ugled in spoštovanje sodelavcev, dijakov in staršev, a se ni posvetil zbiranju točk, slabo plačo in „nizek“ naziv. „Ideal“ učitelja pa je lahko nekdo, ki ima v razredu milo rečeno povprečne uspehe, a je preživel večji del časa v zbiranju točk, in je s tem pridobil najvišje (zunanje) časti našega poklica. Najvišji nazivi so najbrž primerni le za na vseh področjih zgledne učitelje, a primarno vlogo bi morali dati primarni dejavnosti učitelja. Se pa strinjam, da je kvaliteto dela učitelja v razredu najbrž težko neposredno meriti.

V zadnjih desetletjih smo ukinili možnost povratnih informacij med srednjo šolo in nadaljnjo študijsko potjo dijakov. Tako praktično ni več mogoče ugotavljati uspešnosti dijakov pri nadaljnji poti v študiju – ta informacija bi lahko pomenila enega od parametrov uspešnosti srednješolskega pouka.

Povratne informacije OŠ-SŠ

Pred štirimi leti je bil ukinjen eksterni izpit ob koncu osnovne šole. Morda je bila to napaka – zdi se, da lahko tak izpit pomaga šolarju pri pravilni izbiri srednje šole. Poleg tega, da bi rezultati eksternega preverjanja znanja nudili verodostojno povratno informacijo kolegom, ki poučujejo šolarje v osnovnih šolah, lahko skozi tak izpit (s premišljenim izborom nalog) bodoče dijake seznanimo z zahtevnostjo srednješolskih programov. Tako bi se morda laže odločali za vpis na sebi primeren program. Saj ni nujno, da bi imel izpit tako odločilno težo, kot jo je imel nekoč. Morda bi zadoščalo že, če bi lahko le sooblikoval zaključno oceno šolarja pri predmetu, iz katerega opravlja izpit. Praksa namreč pokaže, da šolarji izpitu, ki ima zgolj informativno naravo, ne posvetijo pozornosti, ki takemu izpitu gre. Poleg tega so rezultati eksternih izpitov omogočali srednjim šolam lažje merjenje „dodane vrednosti“. Primerjava rezultatov, ki so jih imeli njihovi dijaki na eksternem preverjanju ob zaključku osnovne šole z rezultati teh dijakov na maturi šele pokaže, ali so dijaki skozi štiriletni pouk na določeni šoli (v primerjavi z ostalimi svoje generacije na primerljivih šolah) napredovali ali mora nazadovali. Ni namreč težko iz zlata delati zlato ... Letos je maturo končala prva generacija dijakov, ki na osnovnih šolah ni imela obveznega eksternega izpita. Morda gre za naključje, a rezultati mature so pokazali izrazit upad števila zlatih maturantov v primerjavi z zadnjimi leti. Res je, da na maturitetni uspeh gotovo najbolj vpliva sestava oz. težavnost maturitetnih izpitov, a raziskava na to temo bi bila zelo zanimiva.

Povratne informacije SŠ-Univerza

Ob zaključku gimnazije opravljajo dijaki maturo, ki seveda služi kot povratna (delna) informacija učiteljem. Naravoslovni predmeti so izbirni, za opravljanje izpita iz fizike se odloča $\approx 15-20\%$ dijakov (≈ 1600/leto), ki opravljajo splošno maturo[3]. Pri kemiji in biologiji so številke zelo podobne. Uspeh dijakov na maturi lahko ocenjujemo kot soliden, tudi v primerjavi z rezultati podobnih, tujih izpitov (mednarodna matura). Število dijakov, ki zaključujejo srednje šolanje z vsaj enim naravoslovnim izpitom morda ni videti zelo majhno, a želimo si, da bi jih bilo še več, saj posluša npr. fiziko v prvem letniku terciarnega izobraževanja približno dvakrat več študentov, kot je bilo dijakov, ki so opravljali maturitetni izpit iz fizike.

Opozoriti pa velja na problem naravoslovja na srednjih tehniških šolah. Programi teh šol vsebujejo čedalje manj ur, ki so namenjene naravoslovju (npr. dve leti po dve uri fizike, ki je vendarle splošna osnova tehnike). O nivoju znanja teh kandidatov je težko soditi, a če lahko posplošimo rezultate,

[3]Pisec tega teksta je glavni ocenjevalec za maturo iz fizike.

ki jih dosegajo „poklicni“ maturantje, ki opravljajo izpit iz fizike na nivoju splošne mature (takih je cca. 100/leto), smo lahko zaskrbljeni. Analiza mature kaže, da ti maturantje komaj uspejo opraviti izpit iz fizike. Njihova povprečna ocena je $\approx 1{,}9$; okrog $\approx 50\%$ kandidatov izpita ne izdela. Rezultati pri izpitih iz kemije in biologije so zelo podobni. S takim stanjem seveda ne moremo biti zadovoljni.

Zaključek

Ob koncu svojega prispevka naj povzamem bistvo sporočil, ki sem jih skušal posredovati, v naslednjih ugotovitvah:

1. Pogoji dela v srednjih šolah se spreminjajo, potrebno je prilagajanje razmeram.
2. Šola se spreminja – najbrž v enako smer, kot kažejo tendence v družbi sicer. Je smer prava?
3. Šola stoji in pade z učiteljem. Če želimo dobro šolo, potrebujemo dobre učitelje, ki bodo uživali zaupanje in podporo pristojne oblasti.

VESTI

MARS 2011

Med 21. in 28. avgustom letos smo se ponovno – že šesto leto zapored – podali na MARS (matematično raziskovalno srečanje srednješolcev Slovenije), tokrat v Center šolskih in obšolskih dejavnosti v Bohinju. Odpravo smo vodili dr. Boštjan Kuzman, PeF UL, Maja Alif, Nino Bašić, David Gajser, Filip Kozarski, Nejc Rosenstein, Aleksander Simonič, Dejan Širaj in Gašper Zadnik, FMF UL, ter Anja Komatar, študentka matematike na Cambridgeu. Za dijake smo pripravili osem matematičnih tem, ki se jih lahko lotijo z rahlo poglobitvijo srednješolskega znanja. Letos se jih je na MARS odpravilo štiriindvajset, ki so se glede na interese razdelili v skupine po dva do štiri in v nadaljevanju vsak dan po nekaj ur raziskovali izbrano snov. Končni rezultat celotedenskega dela je krajši sestavek, morebitna računalniška aplikacija ter kratka predstavitev rezultatov na zaključnem dogodku tabora – pristanku. Poleg dijakov je bilo letos v odpravi še pet študentov prvih letnikov Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani, ki so se udeležili preteklih MARS-ov. Razdelili so se v dve skupini, od katerih je vsaka dobila svojo temo. Tako kot dijaki so tudi študentje pripravili članek in zaključno predstavitev svojega dela, ker pa so že imeli nekaj izkušenj z življenjem na MARS-u, so se svojih projektov lotili bolj samostojno. Več o delu udeležencev odprave lahko izveste na spletni strani http://mars.famnit.upr.si/projekti.html.

Prve štiri dni je bil na MARS-u z nami mag. Milan Mitrovič, ki je pripravil izvrstno malo šolo projektivne geometrije. Na štirih dvournih predavanjih nas je seznanil z zgodovino petega Evklidovega postulata – aksioma o vzporednici, o poskusih dokaza njegove resničnosti ter o spoznanju, da je v resnici neodvisen od drugih aksiomov evklidske ravnine. Potemtakem pa ga lahko zanikamo, pa še vedno dobimo neprotislovno teorijo. Če torej v ravnini vzamemo aksiom *Skozi dano točko, ki ne leži na dani premici* *p, potekata vsaj dve premici, ki p ne sekata*, dobimo t. i. hiperbolično geometrijo, aksiom *Vsaki dve premici v ravnini se sekata* pa dá projektivno geometrijo. Predavatelj nas je prepričal o lepoti slednje, saj pri dokazovanju trditev v projektivni ravnini ni treba obravnavati primerov *premici se sekata* in *premici sta vzporedni*, kot smo vajeni iz evklidske ravnine.

Večere so nam krajšali gostujoči predavatelji, ki so na srednješolcem razumljiv način obravnavali resne matematične teme. Prvi večer je doc. dr. Jaka Smrekar predaval o realnih algebrah z deljenjem (kjer algebra obmolkne in priskoči na pomoč topologija). V naslednjih dneh so sledili še prof. dr. Primož Potočnik, ki je predstavil križce in krožce, nim ter druge kombinatorične igre, in prof. dr. Mihael Perman, ki je predaval o ruletnih cilindrih in optimalnih strategijah pri ruleti. Eno od večernih predavanj pa je bilo letos drugačno – v živo se nam je iz Los Angelesa oglasil prof. dr. Jernej Barbič (University of South California), ki je predaval o uporabi matematike v računalniški grafiki, nekaj besed pa je spregovoril tudi o študiju v tujini in o svoji življenjski poti.

Med strokovnim delom programa MARS 2011 omenimo še dvourno delavnico LaTeX, ki jo je vodil Nino Bašić. Na njej je dijake naučil osnov rokovanja s tem matematičnim urejevalnikom besedil, ki so jih kasneje s pridom uporabili pri pripravi članka. Anja Komatar pa je predstavila še Geogebro – program za dinamično geometrijo, ki so ga nekatere skupine uporabile pri svojem raziskovanju.

Po napornem delu smo se sproščali v naravi v okolici CŠOD. Enkrat smo se podali na pohod do slapa Savica, med krajšimi odmori smo se kopali v Bohinjskem jezeru, igrali košarko in ping pong, zvečer pa številne družabne igre, ki so se zavlekle pozno v noč. Zadnje popoldne so se dijaki pomerili še na veliki MARS-ovski avanturi, orientacijskem pohodu s sedmimi postajami, na katerih so reševali različne matematične in praktične probleme. Zvečer so se nam pridružili še nekateri udeleženci taborov iz prejšnjih let ter člani slovenskih ekip srednješolcev na mednarodnih olimpijadah – biološki, lingvistični, matematični in računalniški.

MARS 2011 so finančno podprli Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo RS, Zavarovalnica Triglav, ŠOU v Ljubljani, Informatika, M. Kaufman s. p. ter DMFA Slovenije.

Gašper Zadnik

ODGOVORNOST, POMNJENJE, SKLEPANJE – POMOČNIKI, VARUHI, GRADNIKI ALI OSEBNOSTNA IN MISELNA KONDICIJA MLADIH[1]

MARTA ZABRET

Šolski center Rudolfa Maistra, Kamnik

V tem prispevku želim prikazati nekatere globalne pojave, ki krojijo tako učiteljevo poučevanje kot učenčevo učenje. Poučevanje in učenje katerega koli predmeta je namreč del širšega dogajanja, ki ga sicer preučuje in analizira družboslovje, mi eksaktni operativci pa se običajno držimo varnih meja svoje stroke. Moj današnji poskus, poseči na obrobje učiteljskega dometa, je porodila iskrena želja po iskanju somišljenikov, ki imajo znanje in moč za premik pomembne kretnice v naravi našega šolstva.

Kot dolgoletna učiteljica matematike in razredničarka na srednji šoli ter kot mati treh otrok, od katerih sta dva že zaključila srednjo šolo, lahko na podlagi svojih izkušenj in opažanj zatrdim, da je povprečni slovenski devetnajstletnik osebnostno in umsko krhek. Obilje kurikulov, projektov in drugih javnih vzgojno izobraževalnih dobrin, ki jih je ta mladi človek užil od vrtca do mature, očitno ne deluje v prid osnovni vsakodnevni zdržljivosti, ki jo vse od zore človeštva krepijo predvsem sprejemanje odgovornosti, pomnjenje in sklepanje.

Pred leti sem ugotavljala, da je permisivnost vgrajena v vse pore vzgoje in izobraževanja, od priročnikov za novopečene starše do pravilnika o šolskem redu v srednji šoli, in domnevala, da gre morda za ekonomsko računico – da postanejo permisivno vzgojeni ljudje, ki jim je prioriteta lastno ugodje, vsaj dobri potrošniki. Dandanes se razkraja tudi ta argument: iz sistema, ki mlade ljudi varuje pred vsakršnim naporom ter sprejemanjem odgovornosti za njegove odločitve in dejanja, lahko izide le prazen in apatičen siromak z odporom do življenja. Do tridesetega leta ga morda še varuje Potemkinovo

[1]Ponatis s soglasjem avtorice in SAZU

domače gnezdo, slej ko prej pa se sooči s povsem vsakodnevnimi napori, stiskami, odločitvami in izzivi ter ... podleže.

Našim dijakom sistem in napačno razumevanje prijaznosti omogočata „neskončno življenj“, torej še eno in še eno in še eno in še eno, če ne uspe pri zadnjem, pa dobi še eno za povrh. In tako dalje brez konca, kot pri računalniški igrici, ki jo po pritisku tipke za izhod – prejemu novodobnega popolnega odpustka – lahko poženeš vsakokrat znova. Ne čudimo se torej, da je sprejemanje odgovornosti za mnoge mlade povsem iracionalno početje.

Pomnjenje in sklepanje – le kdo ju še potrebuje?

Pred dnevi je že četrtič letos poskusil pridobiti pozitivno oceno iz matematike dijak, ki mu je omenjeni „sistem neskončno življenj“ omogočil prehod v zadnji letnik srednje šole, ne da bi imel končanega prejšnjega. Ko se je izkazalo, da je že prostornina kocke zanj prehud zalogaj, sem mu želela pomagati. Med nama je tekel naslednji dialog: „Deniva, da ima vodni rezervoar obliko kocke s stranico dolžine dveh metrov. Koliko drži?“ „Pojma nimam.“ “Malo pa že lahko pomisliš – dva metra počez, dva po dolgem, dva v višino. No?“ „Kaj pa vem. Površino zračunaš.“ „Oh ... Takole ne bo šlo. Ne govori v prazno, pomisli vendar.“ „Mah, ne bom. Pa saj nima smisla. Jaz bom šel na jezike.“ „Hja, na jezike ... Upam, da boš prevajal poezijo in ne kakih tehničnih navodil.“ „Kakšno poezijo neki. Jaz se bom ukvarjal z nepremičninami!“

Ob zadnjih rezultatih TIMSS smo kar pokali od ponosa, ker smo se uvrstili više kot prejšnjič. Malo manj glasno pa je bilo povedano, da so naši petnajstletniki bosi pri uporabnih nalogah, zdaj modno imenovanih „matematično modeliranje“. Dragi univerzitetni profesorji, preizkusite svoje študente s priredbo kake naloge iz avstro-ogrskih računic Franca Močnika, npr.: Sveže skladiščeno seno izgubi v petih mesecih 11,5 % svoje mase. Za vsakih 300 kg svežega sena kmet (denimo moj sosed Jože, ki mi je pomagal posodobiti nalogo) dobi po 25 EUR; za vsakih 100 kg pet mesecev sušenega sena pa bo dobil po 10 EUR. Naj kmet seno proda sveže ali s prodajo počaka pet mesecev? Vseh mojih šestdeset dijakov, skoraj samih odličnjakov iz osnovne šole, je po dveh dneh obupalo.

Pomnjenje in sklepanje sta v splošni nemilosti že vsaj četrt stoletja (to vem, ker ves ta čas poučujem). Pomnjenju se kar na počez pripisuje nalepka „nepotrebna faktografija, saj se s pritiskom tipke kadar koli doseže kateri koli podatek”, sklepanju pa ”nepotreben napor, saj vse lahko naredi računalnik“.

Na soočenje zaradi težav pri matematiki sem povabila skoraj meter devetdeset visokega in približno cent težkega dijaka, ki sem ga videla večkrat iti mimo šole kot vanjo, ter njegovo mater. Gospa je med našim sestankom izvedla nekaj nujnih telefonskih razgovorov, v odmorih med njimi pa izrazila razočaranje, ker „ta otrok ob vsem trudu ne doseže dvojke“, in zabelila, da je „matematika edina in povsem nesmiselna ovira na poti tega otroka do pisarne, v kateri bo podpisal tri pogodbe dnevno, kar bo ITAK vse delo, ki ga bo moral opraviti“.

Gre za pristop, ki ga srečujem večinoma pri fantih. Razlaga, da je razlika med šolskimi rezultati fantov in deklet posledica sistema, ki bolje nagrajuje ustrežljivost in prilagodljivost, po mojem mnenju ni edina. Razlogi so najbrž tudi v tem, da marsikatero okolje fante še vedno bolj ščiti pred napori kot dekleta. Zanimivo pričevanje naj dodam iz glasbenega izobraževanja: znanec, ki poučuje klarinet in saksofon, je že pred kakim desetletjem opazil, da je pri igranju tega nekdaj izrazito fantovskega instrumenta opaziti vse več deklet, in sicer zato, ker veliko fantov ne premore dovolj vztrajnosti za vsakodnevno vadbo pa tudi hitreje obupajo ob neuspehih.

Slovenska nebesa v vato ovitih dečkov je najbrž treba prevetriti; kako in pri kom začeti, pa presega moje današnje umovanje. Morda nam pri tem lahko pomagajo športni trenerji, eni redkih, ki številne mlade uspejo prepričati v pomen rednega in usmerjenega truda pri poti do uspeha in zadovoljstva. Neverjetno dovzetni pa so mnogi moji dijaki tudi za argumente, ki sem si jih za svoje vsakodnevno tečnarjenje pridobila pri uglednih psihologih: ročno pisanje spodbuja ustvarjalnost, redna obremenitev možganov s pomnjenjem in sklepanjem, reševanje miselnih zank in računanje peš pa dokazano pospešijo miselni reakcijski čas, pa tudi upočasnijo in omilijo starostno demenco ...

Kdaj je otrok-mladostnik-študent dovolj „velik“ za sprejemanje odgovornosti?

Na vprašanje odgovarjam enako v vlogi matere in učiteljice: Zdaj, takoj, vedno, v razumnih okvirih. In trdim, da je sprejemanje odgovornosti predvsem pravica. Pravica, ki jo permisivna vzgoja mlademu človeku odvzema ali vsaj krati. V svoji razredniški karieri sem, svoji pregovorni natančnosti v posmeh, morala razveljaviti na desetine ukorov zaradi banalnih napak v postopku. Trdim, da niti najbolj eminentni slovenski pravniki z ministrom za pravosodje na čelu ne bi izpeljali izključitve dijaka brez za veljavnost ključne napake v postopku. Slovenska šola postaja tiskarna spričeval, ognjenik evalvacij in gojišče zlagane prijaznosti.

Sama ukorov že dolgo ne dajem. Otrokom vzgojno zrelih družin jih ni treba, otrokom vzgojno zaostalih družin pa jih ni smiselno dajati. Izmišljujem si duhovite alternativne kazni, zanje pridobim starše, dokumentaciji pa se soglasno in tiho odpovemo. In družno upamo, da bodo „kaznovani“ mladostniki dozoreli za izzive tega sveta, še preden nas kdo obdolži kršitve Konvencije o otrokovih pravicah.

Osebnostna in miselna kondicija mladih – naš cilj, njihova pot

Če otroku pripenjanje z varnostnim pasom ni pogodu, ga „razumevajoči“ starši v pripenjanje ne silijo. Če povprečno sposoben mladostnik ob samostojnem učenju trpi in se dolgočasi, se domače naloge uvrsti v šolsko arhaiko in ukine. Če učenec ali dijak ne zdrži niti deset minut zbranega poslušanja, se samodejno okrivi nezanimivo poučevanje ali razglasi „posebne potrebe“. Če mlademu človeku nek študij ne diši, ga zamenja in znova zamenja in spet in spet in tako dalje deset let. Če mu kasneje ni všeč posvojeni otrok, ga vrne in vzame drugega, ki ga bo prav tako vrnil, če mu ne bo všeč. Neodgovorno ravnanje nima zgornje meje.

Omogočimo mladim pravico do sprejemanja odgovornosti, negujmo dediščino pomnjenja in sklepanja. Osebna in miselna kondicija mladih sta naš cilj in njihova pot.

VESTI

POROČILO O STROKOVNEM SREČANJU IN 63. OBČNEM ZBORU DMFA SLOVENIJE V PORTOROŽU

Letošnje tradicionalno srečanje članov društva je bilo 28. in 29. oktobra 2011 v hotelu Slovenija v Portorožu. Kot običajno je program potekal v več sekcijah, vodilna tema strokovnega srečanja pa je imela naslov Ko enačbe oživijo – uporaba GeoGebre pri poučevanju matematike in fizike. Petkovo dopoldne je s plenarnim vabljenim predavanjem Diakavstike z GeoGebro začel prof. dr. Marko Razpet, letošnji prejemnik nagrade Republike Slovenije za življenjsko delo na področju šolstva v 2011. Sledili so raznovrstni prispevki in delavnice s področja matematike, fizike in astronomije, namenjeni predvsem učiteljem v osnovnih in srednjih šolah. Vzporedno je ves dan potekalo tudi 14. slovensko srečanje o uporabi fizike, na katerem se bienalno srečujejo fiziki iz različnih slovenskih raziskovalnih ustanov in industrije. Urnika obeh srečanj sta na voljo na spletni strani `www.dmfa.si`.

Slika 1. Prof. dr. Marko Razpet med predavanjem o diakavstičnih krivuljah.

Sobotno dopoldne smo začeli s plenarno predstavitvijo odmevnih znanstvenih dosežkov dveh odličnih slovenskih raziskovalcev. Prof. dr. Janez Dolinšek, ki je v letu 2010 prejel Zoisovo nagrado za vrhunske znanstvene dosežke v fiziki, je v vabljenem predavanju Termična spominska celica predstavil presenetljiv fizikalni pojav, kjer si sistem sklopljenih elektronskih spinskih magnetnih dipolnih momentov zapomni svojo termično zgodovino med ohlajanjem. Prof. dr. Janez Mrčun, ki je prav tako v letu 2010 prejel Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke v matematiki, pa je v vabljenem predavanju Predstavitev singularnih prostorov s topološkimi grupoidi opisal geometrične objekte, s katerimi lahko dobro predstavimo prostor orbit delovanja topološke grupe, prostor listov regularne foliacije in nekatere druge singularne prostore.

Slika 2. Prof. dr. Janez Dolinšek med predavanjem o termični spominski celici.

63. občni zbor DMFA Slovenije je, če ne štejemo tradicionalnega polurnega zamika zaradi nesklepčnosti, potekal gladko. Z minuto molka smo se najprej poklonili spominu na nedavno preminulega častnega člana akad. dr. Roberta Blinca in na članico Heleno Godec. Večino letnih poročil o delu različnih sekcij so lahko udeleženci prebrali že v biltenu srečanja, zato smo v živo prisluhnili le poročilu Gregorja Dolinarja in Matjaža Željka o uspešni organizaciji seje mednarodne organizacije Kangourou sans frontieres, ki je oktobra potekala na Bledu. Poročila so bila sprejeta brez razprave, prisotni so potrdili tudi sklep o višini prijavnine na tekmovanja v znesku 1,2 EUR. Milan Hladnik je v imenu Nadzornega odbora poročal, da v tekočem delovanju Upravnega odbora ni bilo nepravilnosti, tajnik Janez Krušič pa je predstavil Računovodsko in poslovno poročilo DMFA za leto 2010, ki je bilo

soglasno sprejeto. Mitja Rosina je prisotne povabil k udeležbi na društvenih ekskurzijah (sončni mrk 2012) in pripravi predlogov za društvena priznanja, Boštjan Kuzman pa k predlaganju tem in predavateljev za prihodnja strokovna srečanja.

Slika 3. Prof. dr. Janez Mrčun med predavanjem o topoloških grupoidih.

Tudi letos smo poskrbeli za nekaj posebnih dogodkov, ki srečanja članov DMFA ločijo od strokovnih srečanj in seminarjev drugih organizatorjev. Častni član društva dr. Anton Suhadolc je krajše predavanje posvetil 100-letnici knjige Potentialtheoretische Untersuchungen akad. dr. Josipa Plemlja. Stoletnico rojstva prof. Ivana Štalca je s predstavitvijo njegovega življenja in dela obeležila mag. Milena Strnad, ki je pripravila tudi razstavo njegovih učbenikov. Posebno presenečenje s torto velikanko smo namenili 40-letnici prve številke revije Presek. V odsotnosti dolgoletne urednice mag. Marije Vencelj je njene misli o Preseku prebrala Maja Klavžar, ki je poskrbela tudi za razstavo izbranih člankov, ob prižiganju iskric na torti pa je prisotne s spodbudnimi besedami o soustvarjanju revije nagovoril še sedanji odgovorni urednik dr. Aleš Mohorič. V predprostoru kongresnega centra sta prof. dr. Alenka Lipovec in asis. Darja Antolin pripravili razstavo štirih matematičnih, Jaka Banko pa fizikalnega eksperimenta, ki so med udeleženci pritegnili veliko pozornost. Prizorišče sta popestrila tudi razstava 40 plakatov dr. Boštjana Kuzmana z naslovnom Mejniki – oris razvoja teorije grafov v Sloveniji in predstavitveni plakat revije Ars Mathematica Contemporanea. Marsikdo je z veseljem prelistal in kupil tudi razstavljene publikacije DMFA-založništva in se pozanimal o možnostih zimovanja v Plemljevi vili na Bledu.

Slika 4. Torta velikanka ob 40-letnici revije Presek.

Srečanje se je končalo v soboto popoldne s strokovnima prispevkoma častnih članov Dušana Modica in mag. Karla Šmigoca ter preostalimi delavnicami na temo GeoGebre. Organizatorji smo bili ob koncu zadovoljni z dobro udeležbo in izvedbo pestrega programa, h kateremu so prispevali številni posamezniki od raziskovalcev in visokošolskih učiteljev do učiteljev v osnovnih in srednjih šolah, svetovalk z Zavoda za šolstvo, študentov in tudi že upokojenih, a še vedno zelo aktivnih članov društva, za kar se vsem iskreno zahvaljujemo. Posebej se zahvaljujemo tudi Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, da vsako leto podpre udeležbo svojih zaposlenih. Upamo, da bodo njenemu zgledu sledile tudi druge slovenske ustanove, ki se trudijo za razvoj naših področij, in da bo naslednje srečanje jeseni 2012 še bolj kvalitetno in vsaj tako obiskano kot letošnje.

Boštjan Kuzman

VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Dragi bralci!

Veseli nas, da so vam naloge v veselje; vsem, ki ste poslali rešitve, se zahvaljujemo. Vabimo vas, da nam pošljete tudi predlog kakšne naloge. Spodaj objavljamo rešitve treh nalog iz prejšnjih številk Obzornika; prvo in tretjo je poslal Stanislav Pirnat, drugo pa Franc Savnik. Zastavljamo pa vam tudi novi nalogi, prvo je pripravil Izidor Hafner, drugo pa smo sestavili v uredništvu.

Naloga 1: Dva konveksna poliedra z isto mrežo

Dana je mreža poliedra, ki sestoji iz 4 enakostraničnih trikotnikov z osnovnico 1 in 4 enakokrakih trikotnikov z osnovnico $a < 1$. Zanimivost te mreže je, da jo lahko zlepimo v dva različna poliedra. Poiskati moramo volumna obeh poliedrov.

Naloga 2: Padec palice

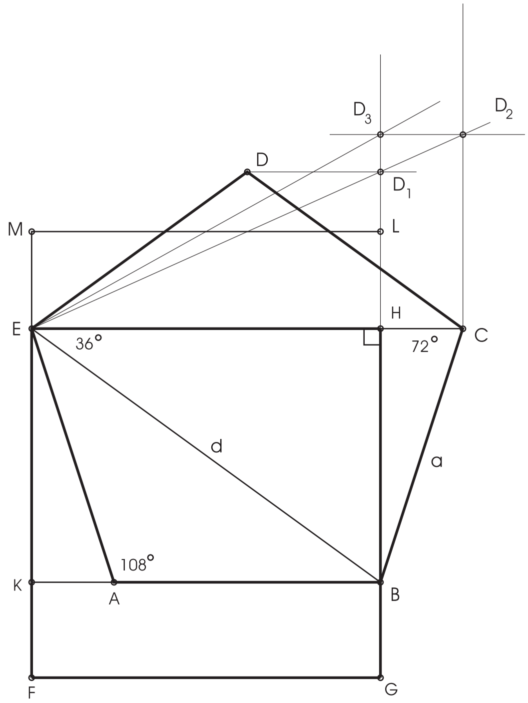
Obravnavajte padec palice, postavljene (skoraj) pokonci na ravna tla. Palica in tla se stikata v točki. Ali palica med padanjem zdrsne naprej ali nazaj? Ali pred padcem palica kdaj odskoči?

Odgovori na vprašanja

11. naloga iz 6. številke 2010:

Ko David hodi po zunanjem robu vrtiljaka v smeri vrtenja, prečka med dvema srečanjema z Anjo, ki miruje ob vrtiljaku, manj vrst konjičkov kot vse, pri hoji v nasprotno smer pa več vrst. Število vrst n na vrtiljaku je zato $20 < n < 40$. Kotna hitrost ω (= število prečkanih vrst v časovni enoti) pri hoji v nasprotno smer je ob enačbi $v = r\omega$ zaradi dvakratne hitrosti in tretjine polmera 6-krat večja, čas hoje v nasprotni smeri torej tretjina časa hoje t v smeri vrtenja. Če je hitrost kroženja zunanjega roba vrtiljaka u, veljata za manjkajoče oziroma odvečne vrste enačbi $n-20 = t\cdot\frac{u}{r}$, $40 - n = \frac{t}{3}\cdot\frac{u}{r}$, iz katerih izračunamo $n = 35$. Konjički na vrtiljaku so v 35 vrstah.

1. naloga iz 3. številke 2011:



Označimo točke in dolžini $|AB|$ in $|EC|$ kot na sliki. Lika $ABCE$ in $KBHE$ imata enaki ploščini. Trikotnik ECD preoblikujemo v ploščinsko enak pravokotnik $EHLM$. Zanima nas, kateri izmed pravokotnikov $FGBK$ in $EHLM$ ima večjo višino.

Višino $|HL| = \frac{1}{2}|CD_2|$ dobimo iz sorazmerja $|CD_2| : |HD_1| = |EC| : |EH|$. Potem je

$$\frac{|HL|}{|GB|} = \frac{|EC| \cdot |HD_1|}{2|EH| \cdot (|EH| - |BH|)} = \frac{d \cdot \frac{d}{2} \tan 36^\circ}{2 \cdot d \cos 36^\circ \cdot d(\cos 36^\circ - \sin 36^\circ)}.$$

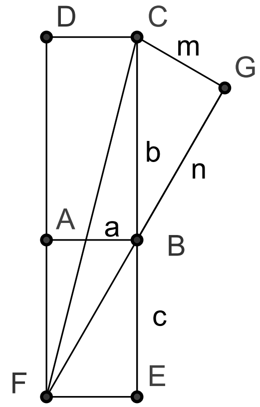
Upoštevamo, da je $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ in dobimo

$$\frac{|HL|}{|GB|} = \frac{2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{(3 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}})} \approx 1.015.$$

Petkotnik ima večjo ploščino.

2. naloga iz 3. številke 2011:

Nad daljico $AB = a$ z dolžino 1 enota skiciramo pravokotnik $ABCD$ s stranico $b = \sqrt{5}$ in pravokotnik $ABEF$ s stranico $c = \sqrt{3}$. Diagonalo FB podaljšamo do G, presečišča poltraka FB s pravokotnico skozi C. Dobimo kota $\arctan(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \angle EFC$ in $\arctan(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 60^\circ = \arctan \frac{m}{2+n}$. Za m in n veljata enačbi $m^2 + n^2 = 5$, $\frac{n}{m} = \sqrt{3}$, iz katerih dobimo $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $n = \frac{\sqrt{15}}{2}$. $\frac{m}{2+n} = \frac{\sqrt{5}}{4+\sqrt{15}} = 4\sqrt{5}-5\sqrt{3}$ in $\arctan(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = 60^\circ + \arctan(4\sqrt{5}-5\sqrt{3})$. Pravilo za tangens dvojnega kota $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ prepišemo $\tan 2 \arctan a = \frac{2\tan\arctan a}{1-\tan^2\arctan a} = \frac{2a}{1-a^2}$ oziroma $2\arctan a = \arctan \frac{2a}{1-a^2}$ in dobimo



$$2\arctan(4\sqrt{5} - 5\sqrt{3}) = \arctan \frac{2(4\sqrt{5} - 5\sqrt{3})}{1 - (4\sqrt{5} - 5\sqrt{3})^2} = \arctan \frac{4\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{20\sqrt{15} - 77}.$$

Prepišemo še pravilo za tangens vsote kotov $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan^2\alpha}$ v obliki

$$\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{\tan\arctan a + \tan\arctan b}{1 - \tan\arctan a \cdot \tan\arctan b} \quad \text{ali}$$
$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}.$$

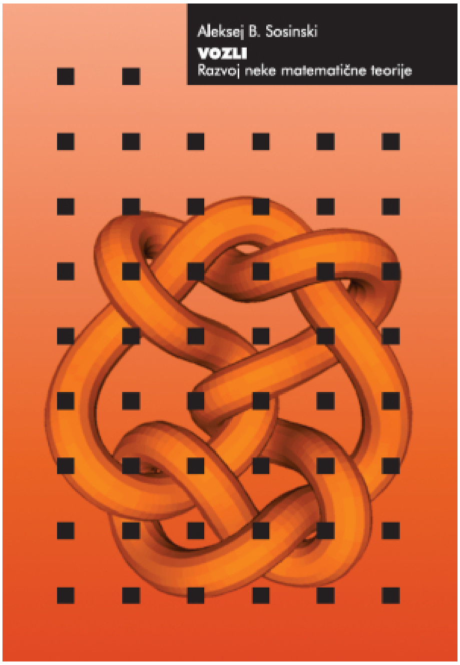
Zato je $2\arctan(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = 2\frac{\pi}{3} + \arctan \frac{4\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{20\sqrt{15}-77}$. Preverimo z računalom. Ujema se na 10^{-11}. Izračunamo

$$\frac{\frac{4\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{20\sqrt{15}-77} - \sqrt{3}}{1 + \frac{4\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{20\sqrt{15}-77} \cdot \sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{5} - 18\sqrt{3}}{23 - 6\sqrt{15}}.$$

Za vsoto kotov poskusimo $\frac{14\sqrt{5}-18\sqrt{3}}{23-6\sqrt{15}} = \frac{p\sqrt{5}+r\sqrt{3}}{1-p\sqrt{5}\cdot r\sqrt{3}}$. Dobimo $p_{1,2} = \frac{1}{10}, -2$, $r_{1,2} = -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ in $\arctan(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\arctan\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2}$, $\arctan(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}\arctan(-2\sqrt{5}) + \frac{1}{2}\arctan\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}$.

Urejeni peterici (q_1, q_2, q_3, q_4, k) sta $(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ in $(\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$.

Aleksej B. Sosinski, VOZLI: Razvoj neke matematične teorije, DMFA – založništvo, 2011, 160 strani.



Vzameš vrv, jo zavozlaš in stakneš oba konca. Tako dobljeni sklenjeni zavozlani vrvi v matematiki pravimo vozel. Za dva vozla pravimo, da sta ekvivalentna, če je mogoče enega s premikanjem sklenjene vrvi (ne da bi vrv pri tem prerezali in ob predpostavki idealne skrčljivosti/raztezljivosti vrvi) postaviti v lego drugega. Vsakdanje vprašanje „Ali je ta kos vrvi/el. kabla/verižice zavozlan?“ je tako poseben primer vprašanja o ekvivalentnosti vozlov. Študij lastnosti vozlov in klasifikacija ekvivalenčnih razredov vozlov sta osrednji nalogi teorije vozlov.

Knjiga *Vozli* avtorja Alekseja B. Sosinskega v prevodu Jožeta Vrabca po kronološkem vrstnem redu oriše nekatere mejnike v razvoju teorije vozlov. Povsem se ogne uporabi topoloških orodij za študij vozlov in temo predstavi popolnoma kombinatorno: vozli so predstavljeni z ravninskimi projekcijami, relacija ekvivalentnosti med vozli se definira z Reidemeistrovimi pomiki. Zaradi te lastnosti in ker knjiga ne predpostavi kakršnegakoli predznanja o temi, je povsem primerna za matematično navdahnjenega bralca s srednješolskim znanjem matematike in lahko rabi kot prvo srečanje z zanimivim svetom vozlov. Pisana je v sproščenem, neformalnem slogu, avtor pogosto na novo uvedene ideje in nekatere dokaze poda povsem intuitivno in jih poskuša vizualizirati s slikami. Knjiga vsebuje celo nekaj avtorjevih povsem osebnih izkušenj s teorijo vozlov. Nikoli pa na račun tega bralcu prijaznega tona knjiga ni nenatančna, kar je v znatni meri zasluga prevajalca, ki je odpravil mnoge napake originala.

Sledi kratek oris poglavij. Prvo poglavje poda matematično korektno definicijo vozla in relacijo ekvivalenčnosti med vozli: to sta definicija in relacija ekvivalenčnosti, ki sta neformalno podana v prvem odstavku tega teksta. Tretje poglavje je temelj kombinatornega pristopa knjige k teoriji vozlov, saj uvede pojem ravninske projekcije vozla in Reidemeistrove pomike, ki so potrebni za opis ekvivalenčne relacije med ravninskimi projekcijami vozla. Poglavje razloži, zakaj je ta model teorije vozlov enakovreden tistemu iz prvega poglavja. Drugo poglavje je posvečeno posebnim ravninskim projekcijam vozlov, in sicer tistim, ko je ravninska projekcija vozla dobljena kot t. i. sklenitev kite. Četrto poglavje opisuje operacijo na množici ekvivalenčnih razredov (usmerjenih) vozlov: sklop vozlov. Gre za klasično topološko temo in je zaradi kombinatornega pristopa v knjigi opisana večinoma brez dokazov. Peto, šesto in sedmo poglavje opišejo pristop h klasifikaciji ekvivalenčnih razredov vozlov prek t. i. invariant vozla. Invarianta vozla je predpis, ki vsakemu vozlu priredi neko vrednost (število, polinom ipd.), in sicer tako, da ekvivalentnim vozlom pripada enaka vrednost. Če sta potem na dveh vozlih vrednosti neke invariante vozla različni, vemo, da gre za neekvivalentna vozla. Omenjena tri poglavja opišejo (v tem vrstnem redu) naslednje tri invariante: Alexander-Conwayev polinom, Jonesov polinom ter invariante Vasiljeva. Od omenjenih je kombinatornemu pristopu najbolj na kožo pisan Jonesov polinom, ki med omenjenimi invariantami edini nima opisa s klasičnimi topološkimi sredstvi. Zato je med omenjenimi šesto poglavje edino, ki vsebuje vse potrebne dokaze za opis teme. Zadnje, osmo poglavje opisuje nekaj pristopov h konstrukciji invariant vozla, ki so navdahnjeni z metodami matematične fizike. Gre za temo, ki je matematično zahtevnejša, zato je zadnje poglavje temu primerno megleno.

Knjižico lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 23,99 EUR.

Bojan Gornik

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2011
Letnik 58, številka 5
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

Poltranzitivne algebre in vektorski prostori (Damjana Kokol Bukovšek) 169–179

Nobelovo nagrado za kemijo 2011 je prejel Danny Shechtman za odkritje kvazikristalov (Janez Dolinšek) 180–188

Šola

Zakaj uk naravoslovja ne more biti zgolj zabava – gimnazijske izkušnje (Vitomir Babič) 189–194

Odgovornost, pomnjenje, sklepanje – pomočniki, varuhi, gradniki ali osebnostna in miselna kondicija mladih (Marta Zabret) 197–200

Vesti

MARS 2011 (Gašper Zadnik) 194–196

Poročilo o strokovnem srečanju in 63. občnem zboru DMFA Slovenije v Portorožu (Boštjan Kuzman) 201–204

Vprašanja in odgovori

Naloge in odgovori (uredništvo) 205–207

Nove knjige

Aleksej B. Sosinski, VOZLI: Razvoj neke matematične teorije (Bojan Gornik) 208–XIX

CONTENTS

Articles **Pages**

Semitransitive algebras and vector spaces (Damjana Kokol Bukovšek) 169–179

Nobel prize 2011 for chemistry was awarded to Danny Shechtman for the discovery of quasicrystals (Janez Dolinšek) 180–188

School 189–200

News 194–204

Questions and Answers 205–207

New books 208–XIX

Na naslovnici: Umetniška upodobitev dodekaedra s kvaziperiodično petštevno simetrijo (avtorica Matjuška Teja Krašek). Slika je darilo slovenske kvazikristalne komune nobelovcu za kemijo 2011 Dannyu Shechtmanu.