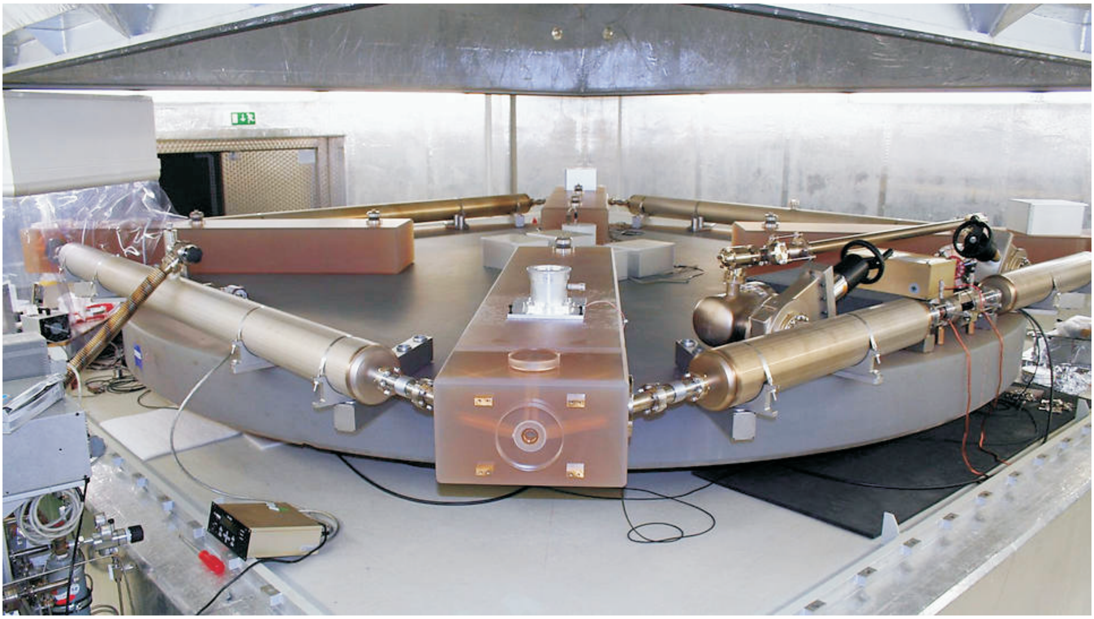
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2013
Letnik 60
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2013, letnik 60, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

LUNEBURGOVA LEČA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 49Sxx, 53A04, 78A05

V prispevku je predstavljena Luneburgova leča, v kateri se žarki enobarvne svetlobe širijo po eliptičnih lokih. Izpeljane so nekatere lastnosti ustreznih elips.

THE LUNEBURG LENS

In this contribution the Luneburg lens wherein the monocromatic light rays propagate along elliptical arcs is presented. Some properties of the corresponding ellipses are derived.

Uvod

Običajno v optiki najlaže obravnavamo probleme, pri katerih imajo optična sredstva lomni količnik, ki se ne spreminja v prostoru in času. V prispevku bomo skoz in skoz predpostavljali, da veljajo pravila geometrijske optike, kar pomeni, da bodo dimenzije optičnih teles zelo velike v primerjavi z valovno dolžino uporabljene svetlobe, za katero bomo ves čas predpostavljali, da je enobarvna. Ogledali si bomo kroglo, ki je izdelana iz optične snovi tako, da je njen lomni količnik v vsaki točki funkcija samo razdalje te točke od središča krogle. Opazovali pa bomo samo tiste žarke, ki prodirajo skozi kroglo, ne pa tistih, ki se na njenem robu odbijajo. Videli bomo, da nekateri dobljeni rezultati spominjajo na znane zakone mehanike.

Najprej bomo uporabili običajni Fermatov princip v optiki, ki pravi, da *v optičnem sistemu prepotuje svetloba svojo pot od točke A do točke B v najkrajšem času.* Če smo natančni, bi morali zapisati v *stacionarnem času*, ker se v nekaterih primerih lahko zgodi, da stacionarni čas ni najmanjši, ampak *lokalno* največji (več o tem v [2]). Vzemimo, da se svetloba širi v optičnem sredstvu z lomnim količnikom, ki je zvezno odvisen od točke. V izbranem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$ označimo lomni količnik v točki T, ki jo določa njen krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, z $n(\mathbf{r}) = n(x, y, z)$. Funkcija $\mathbf{r} \mapsto n(\mathbf{r})$ naj ima zvezne vse parcialne odvode in naj bo navzdol omejena z 1 na obravnavanem območju. Naj točki A do B povezuje gladka krivulja $\mathcal{K}$, za katero predpostavljamo, da je parametrizirana s parametrom ξ:

$$\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi)).$$

Točki A naj ustreza parameter ξ_A, točki B pa ξ_B, katerikoli točki T na krivulji pa ξ, tako da velja $\xi_A \leq \xi \leq \xi_B$. Z $\ell(\xi)$ označimo naravni parameter krivulje $\mathcal{K}$, to je njeno dolžino od točke A do točke T. Veljata zapisa:

$$\ell(\xi) = \int_{\xi_A}^{\xi} \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right| d\tau, \quad \frac{d\ell}{d\xi}(\xi) = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}(\xi) \right|.$$

Hitrost svetlobe v praznem prostoru naj bo c_0, v točki T pa je po fizikalni definiciji lomnega količnika enaka $c_0/n(\mathbf{r})$. Hitrost svetlobe v optičnem sredstvu je torej zvezno odvisna od točke, tudi vzdolž krivulje se zvezno spreminja. Na splošno se svetloba v optičnem sredstvu s krajevno spremenljivim lomnim količnikom ne širi premočrtno. Svetlobni žarki se ukrivijo.

Uporaba variacijskega računa

Razmišljajmo takole: Zelo kratek lok dolžine $\Delta\ell$ na krivulji v okolici točke, ki jo določa vektor $\mathbf{r}$, kjer se lahko vzame, da je lomni količnik približno stalen, prepotuje svetloba v času $\Delta t = \Delta\ell/(c_0/n(\mathbf{r})) = n(\mathbf{r})\Delta\ell/c_0$. Ko vse Δt po krivulji seštejemo, nato pa vse $\Delta\ell$ manjšamo proti nič, dobimo celotni čas $t_{AB,\mathcal{K}}$ potovanja svetlobe po krivulji $\mathcal{K}$ od točke A do točke B:

$$t_{AB,\mathcal{K}} = \frac{1}{c_0} \int_{A,\mathcal{K}}^{B} n(\mathbf{r})\, d\ell.$$

Količino $s_{AB,\mathcal{K}} = c_0 t_{AB,\mathcal{K}}$ imenujemo *optična pot* od točke A do točke B vzdolž krivulje $\mathcal{K}$. Fermatov princip zahteva, da najdemo tako krivuljo $\mathcal{K}$, za katero bo optična pot

$$s_{AB,\mathcal{K}} = \int_{A,\mathcal{K}}^{B} n(\mathbf{r})\, d\ell = \int_{\xi_A}^{\xi_B} n(\mathbf{r}(\xi)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}(\xi) \right| d\xi$$

minimalna. Naloga je tipičen primer iskanja ekstremale funkcionala

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right) = \int_{\xi_A}^{\xi_B} n(\mathbf{r}(\xi)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}(\xi) \right| d\xi$$

v variacijskem računu. Podintegralska funkcija, s katero imamo opravka, je

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mapsto \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right) = n(\mathbf{r})\left|\mathbf{p}\right|,$$

kjer je $\mathbf{p} = d\mathbf{r}/d\xi = (x', y', z')$. Pri tem smo označili $x' = dx/d\xi, y' = dy/d\xi, z' = dz/d\xi$. V daljšem, koordinatnem zapisu je

$$\mathcal{L}(x, y, z; x', y', z') = n(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Ekstremalo $\mathcal{K}$ iščemo med rešitvami sistema Euler-Lagrangeevih enačb (za poglobljen študij variacijskega računa je na razpolago na primer delo [1]):

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Po krajšem računu dobimo v vektorski obliki enačbo, ki velja vzdolž ekstremale:

$$n(\mathbf{r})\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right|^{-1}\frac{d}{d\xi}\left(n(\mathbf{r})\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right|^{-1}\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{grad} n^2(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Leva stran enačbe (1) je zapletena. Če pa sledimo [2, 3], pa tudi [1], jo lahko dodobra poenostavimo. Iskana ekstremala mora namreč biti neodvisna od svoje ekvivalentne parametrizacije. Denimo, da je parametrizirana z naravnim parametrom ℓ, za katerega velja $|d\mathbf{r}/d\ell| = 1$. Izberimo za parameter ξ rešitev diferencialne enačbe $d\xi/d\ell = 1/n(\mathbf{r}(\ell))$ pri začetnem pogoju $\xi(0) = \xi_A$. Potem je

$$n\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right|^{-1} = n\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\ell}\right|^{-1}\frac{d\xi}{d\ell} = n\frac{d\xi}{d\ell} = 1$$

in

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\ell}\right|\frac{d\ell}{d\xi} = \frac{d\ell}{d\xi} = n.$$

Tedaj dobi diferencialna enačba (1) posebno preprosto obliko, in sicer

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} n^2(\mathbf{r}), \tag{2}$$

ki velja pri pogoju

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right| = n(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Enačba (2) v primeru, ko je parameter ξ čas, spominja na Newtonov zakon delca z maso $m = 1$ v potencialnem polju.

Pomembni so primeri, ko je lomni količnik odvisen le od dolžine $r = |\mathbf{r}|$ vektorja $\mathbf{r}$. Tedaj je za $r \neq 0$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} n^2(r) = n(r)n'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{4}$$

Omejili se bomo na primer, ko ima funkcija $r \mapsto n(r)n'(r)/r$ limito v točki 0, tako da (4) velja tudi za $r = 0$. Tedaj smemo zapisati relacijo

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right) = \mathbf{0}.$$

To pa pomeni, da obstaja tak konstanten, od ξ neodvisen vektor $\mathbf{G}$, da velja

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} = \mathbf{G}. \tag{5}$$

Za $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ je ekstremala premica, za $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$ pa neka ravninska krivulja. Enačbi (5) ustreza pri gibanju planeta okoli Sonca izrek o stalnosti ploščinske hitrosti. V obeh primerih lahko potem obravnavamo ravninski primer diferencialne enačbe (2). Vpeljemo ravninski koordinatni sistem Oxy v ravnini, ki je pravokotna na vektor $\mathbf{G}$. Diferencialna enačba (2) razpade na sistem

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = n(r)n'(r)\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} = n(r)n'(r)\frac{y}{r},$$

kjer je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, pri tem pa seveda velja pogoj (3) $n(r) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Vzemimo kroglo, ki ima brez škode za splošnost polmer 1, izdelana pa je iz optičnega sredstva, kateremu se lomni količnik spreminja po zakonu $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$, pri čemer smo koordinatno izhodišče našega sistema $Oxyz$ postavili v središče krogle. Lomni količnik v središču krogle je enak $\sqrt{2}$, na površini krogle pa je enak 1. Zunanjost krogle naj ima lomni količnik enak 1, tako da je $r \mapsto n(r)$ zvezna funkcija na vsem prostoru. Taka krogla je *Luneburgova leča.*

Rudolf Karl Luneburg (1903–1949) je bil rojen v Nemčiji s priimkom Lüneburg, doktoriral je leta 1930 iz teorije potenciala v Göttingenu, pred nacizmom se je zatekel najprej na Nizozemsko, od tam pa leta 1935 v ZDA, kjer je nekaj časa delal na univerzi, v glavnem pa se je ukvarjal z optiko. Njegovo temeljno delo je *Mathematical theory of optics*, ki je v obliki predavanj izšlo leta 1944, nato pa z istim naslovom še v knjižni obliki leta 1964 (glej [3]). V ZDA se je avtor pisal najprej Lueneburg, nato Luneburg, včasih pa ga napačno navajajo celo kot Luneberg. Zahvaljujoč njegovemu temeljnemu delu pa se je v svetu najbolj uveljavil priimek Luneburg.

Potek žarkov v Luneburgovi leči

Z odvajanjem relacije $n^2(r) = 2 - r^2$ takoj dobimo $n(r)n'(r) = -r$. Ravninski primer nam omogoča, da lečo študiramo v koordinatnem sistemu Oxy, ki leži v poljubni ravnini skozi središče krogle. Ustrezni diferencialni enačbi sestavljata preprost sistem

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = -x, \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} = -y, \tag{6}$$

ki ima splošno rešitev

$$x(\xi) = \alpha \cos \xi + \beta \sin \xi, \quad y(\xi) = \gamma \cos \xi + \delta \sin \xi, \tag{7}$$

kjer so $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ realne konstante, ki pa zaradi pogoja (3) niso poljubne. Iz zahteve $n^2(r) = 2 - r^2 = 2 - x^2 - y^2 = x'^2 + y'^2$ namreč dobimo

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2. \tag{8}$$

Vpeljimo matriko in njeno determinanto

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad d = \det M = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Primer $d = 0$ ni zanimiv, saj sta tedaj rešitvi $x(\xi)$ in $y(\xi)$ linearno odvisni, ekstremala v Luneburgovi leči tedaj poteka po premici. Primer $d \neq 0$ pa nam omogoča iz (7) izraziti $\cos \xi$ in $\sin \xi$:

$$\cos \xi = \frac{\delta x - \beta y}{d}, \quad \sin \xi = \frac{\alpha y - \gamma x}{d}. \tag{9}$$

Po izločitvi parametra ξ iz (9) dobimo družino stožnic

$$(\delta x - \beta y)^2 + (\alpha y - \gamma x)^2 = d^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2,$$

na katerih ležijo iskane ekstremale. Iz razvite oblike

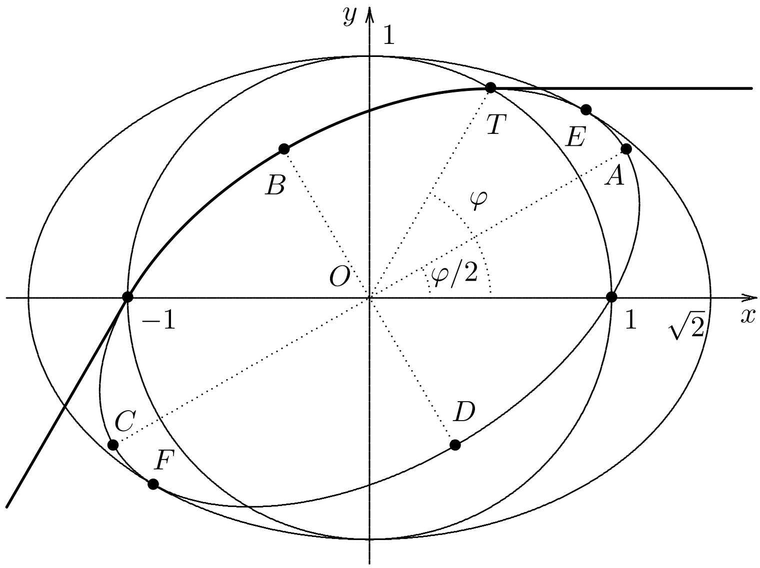
$$(\gamma^2 + \delta^2)x^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)xy + (\alpha^2 + \beta^2)y^2 = d^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2, \tag{10}$$

izračunamo diskriminanto kvadratne forme na levi strani enačbe (10):

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = -(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = -d^2 < 0.$$

To pomeni, da je dobljena stožnica elipsa, ki je na splošno zasukana okoli koordinatnega izhodišča. Elipso, ki jo dobimo kot rešitev sistema (7), imenujemo *Hookova elipsa*. Po Robertu Hooku (1635–1703) se elipse imenujejo zato, ker imamo vsako od enačb (6) lahko za enačbo gibanja vzmetnega nihala, pri katerem za vzmet velja Hookov zakon. Hookove elipse so tudi poseben primer Lissajousovih krivulj. Spomnimo se, da Lissajousovo krivuljo opisuje točkasto telo, ki niha sinusno v dveh med seboj pravokotnih smereh, na splošno z različnima krožnima frekvencama ω_1 in ω_2. Matematično tako gibanje opišemo s funkcijama časa t:

$$x(t) = \alpha \cos \omega_1 t + \beta \sin \omega_1 t, \quad y(t) = \gamma \cos \omega_2 t + \delta \sin \omega_2 t. \tag{11}$$



Slika 1. Potek žarka skozi Luneburgovo lečo.

Za $\omega_1 = \omega_2$ in $\xi = \omega_1 t$ dobimo ravno Hookovo elipso.

Ekstremala v Luneburgovi leči, v preseku znotraj enotskega kroga, torej poteka po loku, ki je del Hookove elipse (slika 1).

Naj svetlobni žarek pada na enotsko krožnico v točki $T(\cos\varphi, \sin\varphi)$, kjer je φ polarni kot točke T, vzporedno z osjo x. Smiselno je vzeti pogoja $|\varphi| < \pi/2$ in $\varphi \neq 0$. Za $\varphi = 0$ se žarek ne lomi in poteka skozi središče kroga od točke $(1,0)$ do točke $(-1,0)$, kjer lečo zapusti. Žarek namreč tedaj pravokotno seka namišljene krožnice, vzdolž katerih se lomni količnik ne spreminja.

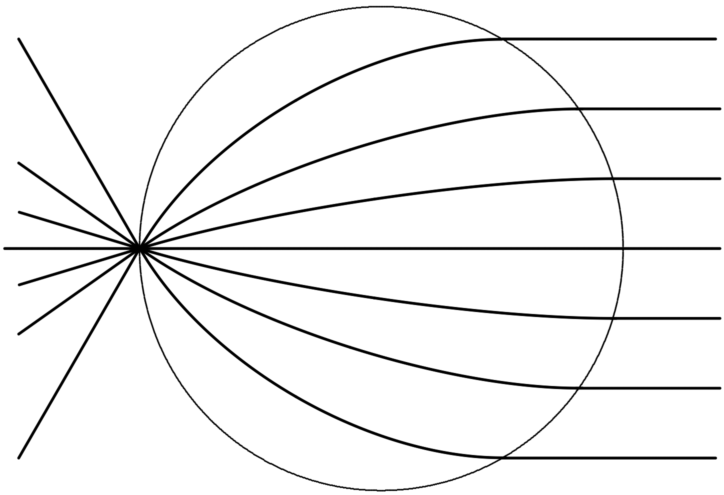
Hookove elipse in Luneburgova leča

Enačbo elipse (10) z vpeljavo novih koeficientov

$$a = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{d^2}, \; b = -\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{d^2}, \; c = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d^2}$$

predelamo v enostavnejšo obliko:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$



Slika 2. Vzporeden snop žarkov Luneburgova leča zbira v točki.

Iz pogoja (8) dobimo najprej $d^2(a+c)=2$, iz enakosti

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^2+(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$$

pa $ac=b^2+1/d^2$. Nazadnje najdemo relacijo:

$$ac-b^2=\frac{a+c}{2}. \tag{12}$$

Žarek pade vzporedno z osjo x na enotsko krožnico v točki $T(\cos\varphi,\sin\varphi)$, kjer se zaradi enakosti lomnih količnikov zunaj kroga in na njegovem robu ne lomi. V točki T je tangenta na ekstremalo vzporedna z osjo x, kar pomeni, da v točki T velja $ax+by=0$. Iz obeh podatkov imamo:

$$a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi=1,\quad a\cos\varphi+b\sin\varphi=0.$$

Iz teh zvez hitro dobimo $c=1+(a+1)\operatorname{ctg}^2\varphi$ in $b=-a\operatorname{ctg}\varphi$. Izraza za b in c vstavimo v (12) in brez težav izrazimo:

$$a=1,\quad b=-\operatorname{ctg}\varphi,\quad c=1+2\operatorname{ctg}^2\varphi.$$

To pomeni, da lahko enačbo elipse zapišemo kot

$$x^2-2xy\operatorname{ctg}\varphi+(1+2\operatorname{ctg}^2\varphi)y^2=1 \tag{13}$$

ali pa kot

$$x^2 + 2bxy + (1 + 2b^2)y^2 = 1. \tag{14}$$

Dobili smo enoparametrično družino elips in preprost račun pove, da ima družina za ogrinjačo elipso z enačbo $x^2/2 + y^2 = 1$. Vsaka elipsa iz družine poteka skozi točki $(-1, 0)$ in $(1, 0)$, ki sta ravno gorišči ogrinjače. Najbolj zanimiva pa je ugotovitev, da Luneburgova leča vse vzporedne žarke, ki padajo nanjo, zbere v isti točki na nasprotni strani leče (slika 2).

Izračunajmo še kot izstopa žarka. Z odvajanjem relacije (14) dobimo:

$$y'(x, y) = -\frac{x + by}{bx + (1 + 2b^2)y}.$$

V izstopni točki $(-1, 0)$ se odvod poenostavi v

$$y'(-1, 0) = -\frac{1}{b} = \operatorname{tg}\varphi.$$

To pomeni, da žarek izstopa pod kotom, ki je enak polarnemu kotu vstopne točke T.

Kot ϑ zasuka elipse (14) izračunamo s formulo

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2b}{a - c} = -\frac{1}{b} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Kot zasuka je torej $\vartheta = \varphi/2$.

Temena elipse (13) najpreprosteje izračunamo kot presečišča premic $y = x \operatorname{tg}(\varphi/2)$ in $y = -x \operatorname{ctg}(\varphi/2)$ s to elipso:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \cos\varphi), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right), \quad C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \cos\varphi), -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right),$$

$$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos\varphi), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right), \quad D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos\varphi), -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right).$$

Polosi elipse sta dolgi

$$\sqrt{2}\cos(\varphi/2) \quad \text{in} \quad \sqrt{2}|\sin(\varphi/2)|,$$

njena ploščina pa je enaka $\pi|\sin\varphi|$. Nekoliko bolj zahtevno pa je računanje, kje se elipsa dotika ogrinjače družine (14), to je elipse $x^2/2 + y^2 = 1$. To se zgodi v točkah

$$E\left(\frac{2\cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}, \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}\right) \quad \text{in} \quad F\left(-\frac{2\cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}, -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}\right).$$

Do zgornjega rezultata najlaže pridemo tako (glej na primer [5]), da rešimo sistem enačb

$$x^2 + (2y^2 - 2) = 0, \quad x^2 + 2byx + (1 + 2b^2)y^2 - 1 = 0$$

z uporabo rezultante $R(p, q)$ polinomov

$$p(x) = x^2 + (2y^2 - 2), \quad q(x) = x^2 + 2byx + (1 + 2b^2)y^2 - 1,$$

pri čemer je y parameter:

$$R(p,q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2y^2-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2y^2-2 \\ 1 & 2by & (1+2b^2)y^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 2by & (1+2b^2)y^2-1 \end{vmatrix} =$$

$$= ((1 + 2b^2)y^2 - 1)^2 = 0.$$

Nato rešitve ni več težko najti. Če polarni kot točke E označimo s ψ (slika 1), potem ni težko priti do povezave $2\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi$. Prav tako očitno velja, da sta daljša in krajša polos elipse v razmerju $|\operatorname{ctg}(\varphi/2)|$ in da je razdalja od središča elipse do njenih gorišč enaka $\sqrt{2\cos\varphi}$. Gorišči elipse sta v točkah

$$(\pm\sqrt{2\cos\varphi}\cos(\varphi/2), \pm\sqrt{2\cos\varphi}\sin(\varphi/2)).$$

Takoj opazimo, da ležita na Bernoullijevi lemniskati $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$, ki ima gorišči v točkah $(\pm 1, 0)$. Numerična ekscentričnost ε elipse in njen parameter p (polovica dolžine na daljšo os elipse pravokotne tetive skozi gorišče, glej na primer [6]) sta

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\cos\varphi}}{\cos(\varphi/2)}, \quad p = \sqrt{2}\sin(\varphi/2)\operatorname{tg}(\varphi/2).$$

Uporaba

Nazadnje se še vprašamo, ali ima Luneburgova leča tudi kakšno uporabno vrednost. Leče, ki zbirajo žarke v eni točki, so pomembne, ker je v tej točki svetloba zelo ojačana. Isti princip pa deluje tudi pri dielektrični Luneburgovi leči, saj so telekomunikacijski in drugi elektromagnetni valovi tudi podvrženi odboju in lomu. Luneburgova leča elektromagnetna valovanja z majhno valovno dolžino v primerjavi s premerom leče, na primer s satelitov, zbere in ojača praktično v točki, z različnih satelitov pa v različnih točkah. Z isto lečo torej lahko spremljamo hkrati več satelitov. Luneburgova leča je uporabna tudi v obratni smeri: na lečo prislonjen izvir valovanja usmeri v snop vzporednih žarkov. Razne mobilne postaje in celo počitniške prikolice ter avtodomi so pogosto opremljeni z Luneburgovo lečo kot anteno.

Kako tehnično izdelati Luneburgovo lečo? V bistvu se moramo zadovoljiti z bolj ali manj natančnimi približki. Po tankih krogelnih plasteh nanašamo optično snov oziroma dielektrik, tako da v bistvu funkcijo $r \mapsto n(r)$ nadomestimo z odsekoma konstantno funkcijo. Velikost in maso Luneburgove leče lahko razpolovimo, če namesto krogle vzamemo polkroglo, na njen ravni del pa namestimo ravno zrcalo, ki žarke odbije proti ukrivljenemu površju polkrogle, kjer se zberejo. Raziskav v zvezi z Luneburgovo lečo ne manjka, na kar nas opozarja veliko spletnih strani. Tudi člankov v znanstvenih in strokovnih revijah je precej, če samo navedemo [4]. Kakšne pa so v resnici Luneburgove leče, pa si lahko bralec sam ogleda na svetovnem spletu, kjer najdemo precej skic in fotografij.

Sklepne besede

Spremenljivi lomni količnik $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$, Hookov lomni profil, je samo eden, ki se uporablja in smo si ga v prispevku nekoliko natančneje ogledali. Lomnih profilov si lahko izmislimo nešteto. Pomemben je na primer tudi Newtonov lomni profil $n(r) = \sqrt{2/r - 1}$. Ustrezna leča, Eatonova leča, je tudi krogla in obrne snop vzporednih žarkov tja, od koder so prišli. Diferencialna enačba (4) preide v obliko, ki ustreza gibanju delca v gravitacijskem polju. Teorija takih leč je obširna. Kot lahko razberemo iz [2, 3], je v njej veliko matematike in fizike, na primer analitična geometrija, diferencialna geometrija, diferencialne enačbe, variacijski račun, kompleksna analiza, analitična mehanika, teorija relativnosti.

LITERATURA

[1] F. Križanič, *Diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.

[2] U. Leonhardt, T. Philbin, *Geometry and light: the science of invisibility*, Dover Publications, Mineola, New York, 2010.

[3] R. K. Luneburg, *Mathematical theory of optics*, University of California Press, Berkely, Los Angeles, 1964.

[4] M. M. Mattheakis, G. P. Tsironis in V. I. Kovanis, *Luneburg lens waveguide networks*, Journal of optics **14** (2012), št. 11, 1–8.

[5] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.

[6] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – Založništvo, Ljubljana, 2008.

SAGNACOV POJAV

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 42.26.Hz

Stoletnica Sagnacovega poskusa je pripravna pretveza za kratko razpravo o krožnih interferometrih. A. A. Michelson je s sodelavcema s krožnim interferometrom opazoval vrtenje Zemlje. Potem so razvili krožne laserske interferometre in krožne vlakenske interferometre. Merilna tehnika je v sto letih doživela izjemen razvoj. Omogoča, da zasledujejo kotno hitrost Zemlje.

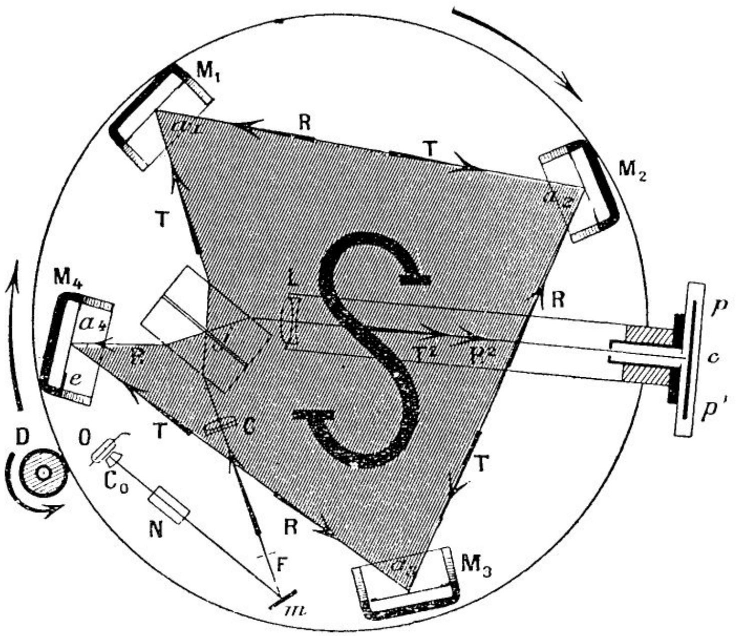
THE SAGNAC EFFECT

The centenary of the Sagnac experiment is a viable excuse for a brief dicussion of ring interferometers. A. A. Michelson with collaborators observed with a ring interferometer the rotation of the Earth. Later on laser ring intererometers and fiber ring interferometers were developed. In a hundred years the measuring techniques experienced an exceptional development. Currently the angular velocity of the Earth is monitored.

Sagnacov poskus

Leta 1913 je Georges Sagnac v glasilu francoske akademije objavil kratka prispevka *Prikaz svetlobnega etra z učinkom gibanja glede na eter z interferometrom v enakomernem vrtenju* in *K dokazu za obstoj svetlobnega etra pri poskusu z vrtečim se interferografom* [1], [2]. Na ploščo, vrtljivo okoli navpične osi, je namestil štiri zrcala in z njimi vodil svetlobo po sklenjeni poti. S polprepustno ploščico je razdelil valovanje, da ga je del potoval v tej, drugi del pa v nasprotni smeri (slika 1). Nazadnje je delni valovanji sestavil in na zaslonu opazoval premik interferenčnih prog, ko je vrtel ploščo. Osem let po posebni teoriji relativnosti je po izidu sklepal, da eter miruje. Zapisal pa je tudi: „Rezultat merjenja kaže, da svetloba potuje s hitrostjo c neodvisno od gibanja izvira in optičnega sistema.“ K poskusu ga je napeljalo to, da se je leta 1905 začel zanimati za zvezdno aberacijo.

Vzemimo, da opazujemo v inercialnem opazovalnem sistemu. Svetloba naj potuje po obodu kroga s polmerom r po plošči, ki se vrti s kotno hitrostjo Ω. Delno valovanje, ki potuje v smislu vrtenja, porabi za obhod daljši čas, kot če bi plošča mirovala. Čas t_2, ki ga porabi to valovanje s hitrostjo c_2 za en obhod, izračunamo iz enačbe $c_2t_2 = 2\pi r + \Omega r t_2$. Delno valovanje v



Slika 1. Risba interferometra iz Sagnacovega članka [1].

nasprotni smeri s hitrostjo c_1 porabi krajši čas t_1, ki ga izračunamo iz enačbe $c_1 t_1 = 2\pi r - \Omega r t_1$. V praznem prostoru sta hitrosti enaki, $c = c_1 = c_2$, in je razlika časov:

$$\delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\pi r}{c - \Omega r} - \frac{2\pi r}{c + \Omega r} = \frac{4\pi r^2 \Omega}{c^2 - \Omega^2 r^2} = \frac{4\pi r^2 \Omega}{c^2}. \tag{1}$$

Upoštevali smo, da je obodna hitrost Ωr veliko manjša od hitrosti svetlobe c. Premik interferenčnih prog, merjen z razdaljo med sosednjima progama, dobimo kot relativno fazno razliko, ko razliko časov delimo z nihajnim časom t_0 in vstavimo valovno dolžino $\lambda = ct_0$:

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta t}{t_0} = \frac{4\pi r^2 \Omega}{c\lambda} = \frac{4S\Omega}{c\lambda}. \tag{2}$$

Pot objame ploščino $S = \pi r^2$. Zveza velja tudi, če sklenjena pot objame kak drug lik.

V Sagnacovem interferometru je pot svetlobe objela $S = 0{,}0860\ \mathrm{m}^2$. Interferenčne proge so se premaknile, ko je interferometer začel vrteti. Najprej je vrtel ploščo z določeno kotno hitrostjo, nato je obrnil smer vrtenja, ne da bi spremenil kotno hitrost. Opazoval je podvojeni premik interferenčnih prog $2\delta\varphi/(2\pi)$. Naredil je samo štiri meritve. Pri eni od njih so se proge pri frekvenci plošče 2,35 s^{-1} in kotni hitrosti 14,8 s^{-1} premaknile za 0,077 razmika med sosednjima progama. Enačba (2) da s tema podatkoma za dvojni razmik 0,068, če vstavimo valovno dolžino zelene svetlobe 500 nm. Sagnac je kot izvir svetlobe uporabil majhno žarnico z zveznim spektrom. Čeprav ni zelo natančno meril, je bil poskus za tisti čas velik dosežek.

Drugi poskusi

Albert Abraham Michelson s sodelavcema je na Sagnacov način izmeril kotno hitrost Zemlje [3]. V enačbi (2) je bilo treba upoštevati projekcijo kotne hitrosti Zemlje na navpičnico v določenem kraju $\Omega \sin\varphi$ z zemljepisno širino φ (odločilen je skalarni produkt $\vec{S}\cdot\vec{\Omega} = S\Omega\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)$). Svetlobo so z zrcali vodili po vodovodnih ceveh s premerom 30 cm, v katerih so tlak zmanjšali na 16 milibarov. Cevi so bile položene po obsegu pravokotnika 603 m krat 334 m, tako da je pot svetlobe zajela ploščino $2{,}014 \cdot 10^5$ m^2. Za zvezdni dan, ki je za 3,93 minute krajši od sončnega dne, dobimo $\Omega = 2\pi/(86164\ \mathrm{s}) = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. To da pri zemljepisni širini $\varphi = 41{,}46^\circ$ za Chicago $\Omega \sin\varphi = 4{,}83 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Pri 269 merjenjih so izmerili premik prog $(0{,}230 \pm 0{,}005)$ razmika med sosednjima progama, kar se se je v okviru natančnosti pri merjenju ujemalo z napovedjo enačbe (2) $(0{,}236 \pm 0{,}002)$. Zemlje ni bilo mogoče zaustaviti, da bi določili začetno lego interferenčnih prog. Ugotovili so jo z interferometrom z veliko krajšim obsegom, ki so ga postavili ob velikem interferometru. Pri tem so si pomagali tako, da so najprej uporabili kot izvir obločnico in nato izvir natrijeve svetlobe.

Krožni interferometri imajo zanimivo zgodovino [4]. O velikem krožnem interferometru so razmišljali že prej, na primer Oliver Lodge leta 1897 in A. A. Michelson leta 1904. Z njim so se nadejali ugotoviti, ali eter v vesolju miruje ali se na površju lepi na Zemljo kot viskozna tekočina. Max von Laue je leta 1911 nadaljeval Michelsonovo razmišljanje in potrdil, da posebna teorija relativnosti v prvem redu da enak izid kot etrska teorija. Paul Langevin in drugi so pozneje ta izid dobili tudi v vrtečem se, to je neinercialnem opazovalnem sistemu.

Že v letih med 1909 in 1911 se je Franz Harress želel prepričati, da hitrost svetlobe $c/n \pm k_F v$ v snovi, ki se giblje s hitrostjo v, v prvem redu podaja

Fresnelov koeficient $k_F = 1 - 1/n^2$ z lomnim količnikom n. Fresnelov koeficient je izmeril Armand Hyppolite Fizeau leta 1851 pri poskusu, pri katerem sta delni valovanji potovali po toku tekočine v smeri toka in v nasprotni smeri. Poskus sta leta 1886 ponovila A. A. Michelson in E. W. Morley [5]. Harress ni uporabil toka tekočine, ampak je prozorno snov vrtel. Interferometer, v katerem je s totalnim odbojem svetlobo vodil po desetih steklenih prizmah, je poganjal z majhno turbino. Pred Sagnacom je opazil premik interferenčnih prog, a ga sprva ni znal pojasniti. Pri tem je v računu naredil napako. Njegovo delo je ostalo neobjavljeno. Na Lauejevo pobudo so poskus Harressa, ki je padel v prvi svetovni vojni, ponovili in leta 1920 o tem poročali. Nasploh so o poskusih Sagnacove vrste veliko razpravljali.

Krožni laserski in krožni vlakenski interferometer

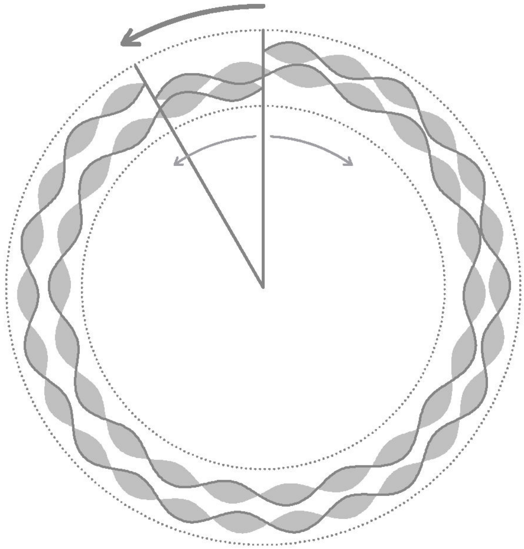
Kmalu potem ko so izdelali prve laserje, so pomislili na laserski krožni interferometer. Prve račune je naredil A. H. Rosenthal leta 1962. S poskusi sta začela Warren M. Macek in D. T. M. Davies leta 1963, ameriški patentni urad pa je odločil, da je prvi laserski krožni interferometer izdelal Chao Chen Wang pri družbi Sperry Gyroscopes.

Krožni laserski interferometer naredijo tako, da sklenjeno cev z zrcali izsesajo in vanjo uvedejo mešanico helija in neona pri majhnem tlaku. V delu cevi z visokofrekvenčnim električnim poljem ustvarijo plazmo, v kateri se s stimuliranim sevanjem ojačujeta valovanji, ki potujeta v nasprotnih smereh. V delnih valovanjih je različno število valovnih dolžin, zato se valovni dolžini malo razlikujeta in imata valovanji malo različni frekvenci (slika 2). Relativna sprememba valovne dolžine je enaka relativni spremembi frekvence in relativni spremembi dolžine, ki jo prepotujeta valovanji: $\delta\lambda/\lambda = \delta\nu/\nu = \delta l/l$. Eno od valovanj ima za $2\pi r \cdot (r\Omega/c)$ daljšo pot, drugo pa za toliko krajšo, tako da je $\delta l = 4\pi r \cdot (\Omega r/c)$. Z zapisano zvezo sledi:

$$\delta\nu = 4\pi r\,\frac{\Omega r}{c} \cdot \frac{\nu}{l} = \frac{4S\Omega}{\lambda l}. \tag{3}$$

Z interferenco valovanj nastane utripanje s frekvenco $\delta\nu$. Merjenje frekvence je precej bolj pripravno kot merjenje premika interferenčnih prog. To je prednost krožnih laserskih interferometrov.

Leta 1966 je Charles K. Kao predlagal uporabo svetlobnega vodnika (in leta 2009 dobil polovico Nobelove nagrade). Postopno so razvili valovne

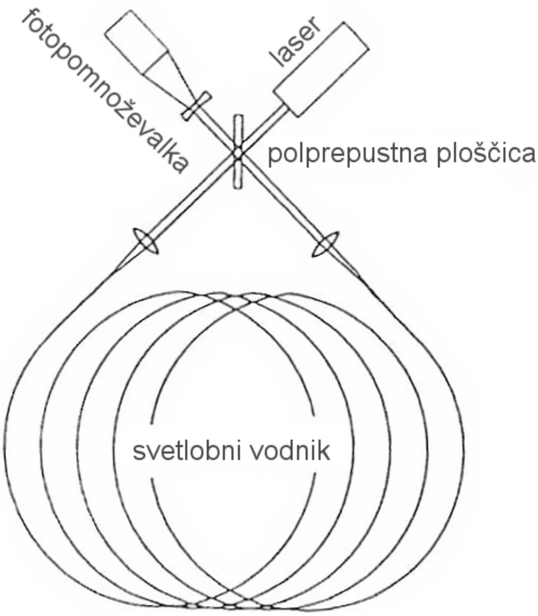


Slika 2. Poenostavljena risba valovnih dolžin v krožnem laserskem interferometru. Valovna dolžina valovanj v resonatorju je narisana močno pretirana [2].

vodnike v obliki tankih kremenovih vlaken, v katerih lomni količnik od osi proti robu pojema. Svetloba zaradi totalnega odboja ne uide iz vlakna, če to ni prehudo ukrivljeno. Vlakno vodi svetlobo na znatne razdalje. Misel, da bi vlakno uporabili v krožnem interferometru, je obdelal leta 1976 R. W. Shorthill s sodelavcem.

Vlakenski interferometer naredijo tako, da optično vlakno navijejo na kolut s polmerom r v N ovojih. Skozi polprepustno ploščico na obeh krajiščih uvedejo laserski curek, da potuje v tej in v nasprotni smeri. Valovanje, ki nastane z interferenco, zaznava fotopomnoževalka (slika 3). Pot svetlobe v ovojih se podaljša in je treba enačbo (2) opremiti s številom ovojev N kot dodatnim faktorjem. V vlaknu svetloba potuje po snovi. Eden od delnih curkov potuje po vlaknu, ki se giblje s hitrostjo Ωr v smeri potovanja, drugi pa v nasprotni smeri, če se ovoji vrtijo s kotno hitrostjo Ω okoli geometrijske osi. Ne zadovoljimo se s prvim redom in Fresnelovim koeficientom, ampak uporabimo enačbo posebne teorije relativnosti za seštevanje hitrosti: $(v_x \pm v_0)/(1 \pm v_0 v_x/c^2)$. Vstavimo $v_x = c/n$ in $v_0 = \Omega r$ in dobimo:

$$c_2 = \frac{c/n + \Omega r}{1 + \Omega r/(nc)} \quad \text{in} \quad c_1 = \frac{c/n - \Omega r}{1 - \Omega r/(nc)}.$$



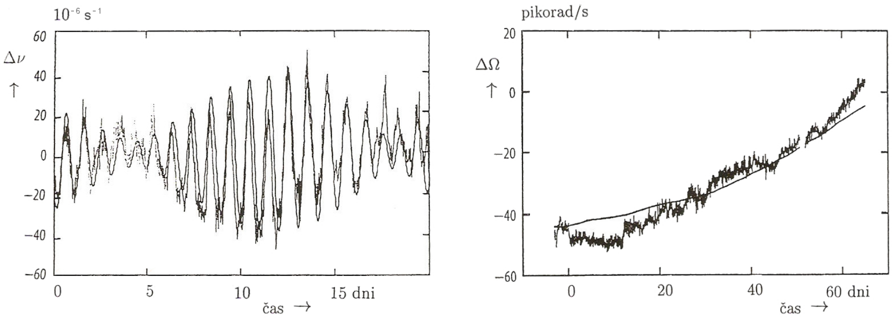
Slika 3. Poenostavljena risba krožnega vlakenskega interferometra.

S tema hitrostma sledi za razliko časov $\delta t = t_2 - t_1 = 4\pi r^2 \Omega / c^2$, enako kot v vakuumu. Snov ne prizadene premika interferenčnih prog. Michelson je verjetno poznal ta izid, a se ni želel nanj opreti, zato je v ceveh interferometra zmanjšal tlak.

Vlakenske krožne interferometre sestavljajo sami trdni deli. Zato so odporni na udarce in so lahko zelo majhni. Taki interferometri so prevzeli vlogo vrtavk, giroskopov, v inercialnih navigacijskih sistemih. K njihovemu razvoju so znatno prispevale letalske družbe. Krožni laserski interferometri so precej dražji od vlakenskih. Pri izdelavi zahtevajo večjo natančnost in boljša zrcala, katerih odbojnost je le za 10^{-6} manjša od 1. So težji, večji in občutljivejši na tresljaje ter imajo v splošnem krajši življenjski čas. Pri majhni kotni hitrosti se lahko pojavijo motnje. Na drugi strani ni težav z določitvijo kotne hitrosti 0, ki se pojavi pri vlakenskih interferometrih.

Kotna hitrost Zemlje

Pri velikem številu podatkov, ki jih potrebujemo pri raziskovanju in v vsakdanjem življenju, na primer pri določanje lege na Zemlji z GPS, moramo na-



Slika 4. S Krožnim laserjem G so zasledovali spreminjanje kotne hitrosti Zemlje. Frekvenca se spreminja s periodo enega dne in zaradi delovanja Lune s periodo dveh tednov. Na navpično os so nanesene spremembe frekvence v milijoninah vrtljaja, na vodoravno pa dnevi. Izmerjena in napovedana krivulja se dobro ujemata (levo) [6]. Opazovali so tudi letne in Chandlerjeve spremembe. Gladka krivulja podaja rezultate interferometrije z zelo dolgo osnovnico. Primerjava krivulj pokaže, kako stabilno je deloval krožni laser. Na navpično os so nanesene spremembe kotne hitrosti v pikoradianih na sekundo (1 pikorad/s $= 5{,}73 \cdot 10^{-11\circ}$/s), na vodoravno pa dnevi (desno) [6], [7].

tančno poznati lego zemeljske osi. To je mogoče ugotoviti z interferometrijo z zelo veliko osnovnico VLBI (Very Long-Base Inteferometry). Mikrovalove zelo oddaljenega vesoljskega izvira radijskih valov, kvazarja, sprejemata dva radioteleskopa na zemeljskem površju v razdalji več tisoč kilometrov. Zaradi velike oddaljenosti kvazarja lahko vzamemo, da je valovno čelo ravno. Po zakasnitvi valovanj v radioteleskopih, ki jo ugotovijo z interferenco, lahko sklepajo na lego osi v prostoru in na kotno hitrost. Te vrste merjenja so zahtevna in draga. Zato jih opravljajo bolj poredko, denimo, dve po 24 ur trajajoči merjenji na teden. Med merjenjema neprekinjeno zasledujejo kotno hitrost Zemlje s krožnimi laserskimi interferometri. Zemlja ni togo telo. Luna na primer povzroči v Srednji Evropi dvig zemeljske skorje za dvajset centimetrov s periodo 365,25 dneva. Geometrijska os Zemlje se ne pokriva z vztrajnostno osjo. Zemlja se giblje po malo sploščeni elipsi. Vse to povzroči, da se razmere spreminjajo približno s periodami enega dne, dveh tednov in enega leta. Seth Carlo Chandler je leta 1891 odkril nihanje zemeljske osi s periodo 435 dni, ki so ga pozneje pojasnili s spremembo tlaka na dnu oceanov in zračnega tlaka. Našteti pojavi povzročajo spremembo efektivnega vztrajnostnega momenta Zemlje in s tem spremembo kotne hitrosti.

Na svetu je nekaj velikih krožnih laserskih interferometrov, s katerimi zasledujejo kotno hitrost Zemlje. Interferometer s ploščino kvadratnega metra deluje v opuščenem bunkerju v Christchurchu na Novi Zelandiji [4]. Od leta 2009 tam deluje tudi največji krožni laserski interferometer s ploščino 39,7 m krat 21 m, to je 834 m^2. Od leta 2001 deluje *Krožni laser G* Geodetskega observatorija Wettzell v Bavarskem gozdu s ploščino 4 m krat 4 m, to je 16 m^2. Slednji je na glasu, da je od vseh najbolj stabilen (slika na naslovnici) [6]. Nemška raziskovalna skupina sodeluje z novozelandsko [7].

Med merjenjem se ne smejo spremeniti razdalje med deli naprave. Krožni laser G je postavljen na ploščo iz steklene keramike z linearnim razteznostnim koeficientom, manjšim od $5 \cdot 10^{-9}$ K^{-1}. Interferometer je pod zemljo v prostorih s kolikor mogoče stalno temperaturo in stalnim tlakom. Z interferometrom neprekinjeno zasledujejo spremembe zemeljske kotne hitrosti. Interferometer uporablja mešanico štiridesetih delov helija in enega dela neona pri tlaku 5 milibarov. Ojačevanje poteka v 10 cm dolgi kapilari s premerom 5 mm, a območje plazme je dolgo le 3 cm. Z zrcali z zelo veliko odbojnostjo in drugimi prijemi so kolikor mogoče zmanjšali izgube. Potem ko izključijo ojačevanje, valovanje traja še 1,2 milisekunde in prepotuje 360 km. Zelo majhen del valovanj, ki izstopi skozi eno od zrcal, vodijo na polprevodniški merilnik in po opazovani frekvenci utripanja sklepajo na spremembe kotne hitrosti (slika 4) [6], [7]. Sodobni krožni laserski interferometri imajo za okoli 12 velikostnih stopenj boljšo ločljivost od Michelsonovega. To priča o izjemnem razvoju merilne tehnike.

LITERATURA

[1] M. G. Sagnac: *L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme*, Comptes rendus **157** (1913) 708–710; *Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interérférographe tournant*, Comptes rendus **157** (1913) 1410–1413. Angleški prevod: http://en.wikisourse.org/wiki/The_Demonstration_of_the_Luminiferous_Aether; http://en.wikisourse.org/wiki/On_the_Proof_of_the_Reality_of_the_Aether.

[2] *Sagnac effect*, http://en.wikipedia.org/wiki/Sagnac_effect.

[3] A. A. Michelson, H. G. Gale in F. Pearson, *The effect of the earth's rotation on the velocity of light*, Astrophys. J. **61** (1925) 137–145. Članek je mogoče dobiti na spletu.

[4] R. Anderson, H. R. Bilger in G. E. Stedman, *„Sagnac“ effect: A century of Earth-rotated interferometers*, Am. J. Phys. **62** (1994) 979–985.

[5] J. Strnad, *Michelsonovi poskusi*, Obzornik mat. fiz. **30** (1983) 167–178.

[6] U. Schreiber, *Ein Ring, die Erde zu finden*, Physik Journal **12** (2013) 25–30 (5).

[7] K. U. Schreiber, T. Klügel, J.-P. R. Wells, R. B. Hurst in A. Gebauer, *How to detect the Chandler wobble of the Earth with a large ring laser gyroscope*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 173904 1–4.

NEVERJETNA VERJETNOST

DARJO FELDA

Pedagoška fakulteta
Univerza na Primorskem

Math. Subj. Class. (2010): 97-01, 97K50

V prispevku pokažemo na napake pri vpeljevanju verjetnosti v učbenikih za matematiko za deveti razred osnovne šole.

INCREDIBLE PROBABILITY

In the paper, errors in introducing probability in mathematics textbooks for the ninth grade of primary school are shown.

Uvod

Odveč je pripomniti, da je treba učenca uvajati v katerokoli matematično vsebino z veliko mero previdnosti. Jezik, ki ga uporabljamo v procesu učenja in poučevanja, mora biti prilagojen razvojni stopnji učenca, kljub temu pa matematično korekten in nedvoumen. Učbeniki in druga učbeniška gradiva naj bi bili opora samostojnemu učenju in zato namenjeni učencu. Morali bi nuditi jasno in natančno podane matematične pojme in koncepte oziroma usmeritve, a se, žal, vanje prikradejo hude nepravilnosti.

Pri pregledovanju izdelkov, ki jih učenci oddajo na nacionalnem preverjanju znanja matematike, opažamo določene napačne oziroma površne zapise in postopke reševanja matematičnih problemov, za katere bi težko sodili, da so plod samostojnega razmisleka posameznih učencev. Prej nasprotno – izkazujejo se kot plod nekih naučenih pravil in postopkov v procesu učenja in poučevanja matematike, skozi katerega se prebijajo ti učenci.

Za ta prispevek smo se odločili potem, ko smo ob t. i. poizvedbah prejeli od nekaterih šol fotokopije delov učbenikov, s katerimi naj bi se dokazovala pravilnost in popolnost rešitev posameznih nalog, kakor so jih zapisali učenci. Prav te fotokopije so nas spodbudile, da smo natančneje pregledali poglavje o verjetnosti v obeh učbenikih, iz katerih so bili fotokopirani deli uvodnih strani omenjenega poglavja. Gre za učbenika *Kocka 9, matematika za 9. razred osnovne šole* in *Skrivnosti števil in oblik, učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole.*

Verjetnost in učni načrt

Glede na učni načrt za matematiko (glej [4]) se učenci srečajo z verjetnostjo v 9. razredu osnovne šole, čeprav so operativni cilji in vsebine le orientacijsko vezani na določen razred. Lahko bi se torej verjetnost (delno) obravnavala tudi prej v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Najbrž je smiselno, da bi se nekatere dejavnosti, vezane na usvajanje verjetnosti, izvajale celo že v nižjih razredih osnovne šole in da bi učenci vstopili v zaključni razred z nekaterimi predhodnimi konkretnimi izkušnjami s slučajnimi dogodki. V nižjih razredih seveda ne gre za poučevanje verjetnosti v strogem matematičnem smislu, pač pa za postopno srečevanje z verjetnostjo ter sprotno spoznavanje in nadgrajevanje pojmov iz verjetnosti ob izvajanjih poskusov, ki so učencem blizu. Pomembno je, da učenci pridobijo pravilne predstave o verjetnosti.

Verjetnost je v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju zapisana pod temo druge vsebine, za katero so opredeljeni nekateri globalni cilji tega vzgojno-izobraževalnega obdobja. Izmed njih se le eden neposredno nanaša na verjetnost, in sicer: *(učenci) na primerih spoznajo statistično verjetnost.* Ustrezni operativni cilji so zapisani v sklopu *Izkušnje s slučajnimi dogodki*, kjer je zapisano, da učenci:

- pridobijo izkušnje o številsko izraženi verjetnosti;
- ocenijo verjetnost s sklepanjem in utemeljevanjem (življenjske situacije);
- izvajajo poskuse (met kocke, met žebljičkov, met kovanca, met valja idr.), opazujejo izbrane dogodke, zapišejo izide in napovedujejo verjetnost dogodka;
- izvajajo poskuse in na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom napovedujejo izide (npr. met kovanca);
- zberejo, uredijo, analizirajo rezultate poskusa in ob konkretnih primerih (poskusih) spoznajo statistično verjetnost dogodka;
- povežejo pojma statistična in matematična verjetnost ([4]).

Pripadajoče vsebine so podane kot:
pojmi: poskus, dogodek, izid;
dogodek: nemogoč, gotov, slučajen dogodek;
verjetnost dogodka (statistična verjetnost).

Vsi našteti operativni cilji in vsebine so obvezni.

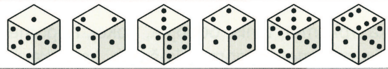
V učnem načrtu za matematiko so zapisana tudi pripadajoča didaktična priporočila, ki jih povzemamo dobesedno: *Prve izkušnje s pojmi poskus,* *dogodek, izid in verjetnost dogodka naj učenci pridobivajo skozi izvajanje poskusov, kot so met kovanca, met kocke, vrtenje kazalca na vrtavki idr. V poskusu najprej izberejo dogodek in opazujejo (štejejo) ugodne izide za izbrani dogodek. Primer: v poskusu met kocke je lahko izbrani dogodek: „pade pet pik“. Za začetne dejavnosti pripravimo preproste situacije. Če je npr. vrtavka rdeča, je dogodek, da se bo kazalec ustavil na rdeči barvi, gotov dogodek, dogodek, da se ustavi kazalec na beli barvi, pa nemogoč. Verjetnost prvega dogodka je ena, drugega pa nič. Če je vrtavka dvobarvna (pol/pol), je verjetnost dogodka, da se ustavi na eni izmed barv, enaka* $\frac{1}{2}$. *V poskusu met kovanca je verjetnost dogodka, da „pade cifra“, enaka* $\frac{1}{2}$. *Verjetnost dogodka, da v poskusu met kocke „padejo tri pike“, pa je* $\frac{1}{6}$. *Z izvajanjem poskusov si učenci pridobivajo izkušnje z napovedovanjem dogodkov (nemogoč, gotov, slučajni dogodek ...) in njihovih verjetnosti (verjetnost gotovega dogodka je ena, verjetnost nemogočega dogodka je nič, verjetnost slučajnega dogodka pa med nič in ena), pri čemer se zavedajo pomena števila ponovitev poskusa. Osnove napovedovanja dogodkov lahko vpeljemo oziroma povežemo s poznavanjem delov celote (npr. ciljanje v tarčo), pri čemer učenci tudi zapišejo verjetnost dogodka s številom* ([4]).

V učnem načrtu ni med standardi znanja omenjen noben standard, ki bi se neposredno navezoval na verjetnost. Niti med naštetimi minimalnimi standardi ni nobenega s področja verjetnosti.

Če pogledamo v učni načrt, sprejet leta 1998 ([3]), ki se mu veljavnost izteka, je področje verjetnosti veliko bolj skopo predstavljeno. V okviru teme *Druge vsebine – obdelava podatkov* je sklop *Izkušnje s slučajnimi dogodki* s ciljem *Pridobiti izkušnje o numerično izraženi verjetnosti.* Po učnem načrtu naj bi se obdelala vsebina, ki obsega pojme: *dogodek, izid; verjetnost (empirični pristop); dogodek: nemogoč, gotov, enako verjeten itd.* Pod specialno didaktična priporočila in dejavnosti je zapisano zgolj: *Učenec/učenka s poskusom ugotovi oz. oceni verjetnost dogodka (pri čemer se zaveda pomena števila poskusov). Na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom napove izide.*

Učenje in poučevanje verjetnosti

V naši šolski praksi ima učbenik vlogo, ki mu ne pripada. Veliko učiteljev se namreč pri pouku oziroma načrtovanju pouka pretirano zgleduje po uvajanju vsebin na način, kot je predstavljeno v izbranem učbeniku. Tako se na šolah odločajo za učbenike, ki so „všeč“ učiteljem in so večinoma (pre)bogato opremljeni z različnimi razlagami in dodatki ter „zanimivostmi“, ki večine učencev ne zanimajo, učitelji pa dobijo v njih dovolj informacij za izpeljavo pouka, ki je podrejen tem učbenikom. Namesto da bi učitelji kritično sprejemali, kar jim ponuja učbenik, (pre)mnogokrat neposredno prenašajo

Ugoden izid		1
Vsi dogodki		6

Slika 1. Vseh mogočih dogodkov je 6, le eden pa ima za Anjo tudi ugoden izid. Matematična verjetnost, da bo Anja že v prvem poskusu vrgla 6 pik, je torej 1 : 6 ali $\frac{1}{6}$. Verjetnost je količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh dogodkov.

učencem informacije iz učbenika in, žal, slepo zaupajo zapisanemu v njem, „ker je učbenik potrjen“. V nadaljevanju si oglejmo nekaj spodrsljajev iz učbenikov za matematiko za 9. razred osnovne šole. Besedilo, ki ga bomo dobesedno povzeli iz učbenikov, bomo zapisali s to pisavo.

Kocka 9, matematika za 9. razred osnovne šole

V verjetnost naj bi vstopili z zgledom: Anja in Jurij sta igrala Človek ne jezi se. Anja je trdila, da bo zagotovo v prvem metu vrgla 6 pik.

Sledi pojasnilo: Anjina trditev temelji na njeni želji, da bi zares že v prvem metu vrgla 6 pik. Met kocke poimenujemo **dogodek**. Mogoč dogodek pri metu kocke je padec 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik. Če pa kocka pokaže 6 pik, kot si je želela Anja, je to **ugoden izid**.

Dodana je še preglednica in zapis pod njo:

Kot lahko vidimo, se ponuja izjemno nekorekten vstop v verjetnost. Osnovni pojmi iz verjetnosti, s katerimi naj bi učenci dopolnili matematični jezik, da bi se o verjetnosti pogovarjali in jo spoznavali, so napačno vpeljani. Met kocke je opredeljen kot *dogodek* namesto kot *poskus*, v nadaljevanju pa učence še zbegamo, saj je glede na opredelitev dogodka razumeti, da je *mogoč dogodek* pri tem *dogodku* (namreč metu kocke) padec 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik, za nameček pa je želeni *mogoč dogodek* (to je padec 6 pik) pri *dogodku* (metu kocke) *ugoden izid*.

Zdi se, da je besedna zveza „mogoč dogodek“ napačno uporabljena namesto besede „izid“. Tako bi morali zapisati: „Izid pri metu kocke je padec 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik.“, v preglednici pa namesto zapisa „Vsi dogodki“ uporabiti „Vsi izidi“. Pod preglednico bi morali zapisati: „Vseh izidov je 6, le eden pa je ugoden za Anjo.“ Verjetnosti ne bi smeli navajati v obliki razmerja, definicijo pa bi morali zapisati: „Verjetnost je količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh izidov.“

V učbeniku je za tem še primer meta kovanca, ki se navezuje na primer Anje in Jurija z vprašanjem: Kaj pa če bi metala kovanec in želela, da pade podoba? Nadaljuje se analogna „zmešnjava“, vključno s preglednico, v kateri ni naveden pravi ugoden izid – namesto „podobe“ je „številka“. Tako je zapisano: Če bi metala kovanec, bi imela samo dve možnosti, pade lahko podoba ali številka.

Ugodni izidi		1
Vsi dogodki		2

Slika 2. Pri metu kovanca sta mogoča samo dva dogodka, ugoden pa je izid, ko kovanec kaže podobo. Od dveh izidov je za nas ugoden en sam, kar matematično zapišemo $\frac{1}{2}$ ali $1:2$.
Pri desetiških ulomkih verjetnost lahko predstavljamo v odstotkih. Tako lahko rečemo: verjetnost, da bo kovanec pokazal podobo, je 50 %.

$$\underbrace{1}_{\text{gotov dogodek}} - \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{verjetnost, da pade podoba}}$$

Slika 3. Pri metu kovanca je enaka verjetnost, da pade podoba, kot da pade številka. Ugodna izida sta vedno enako verjetna.
Pri metu kovanca ni možnosti, da bi kovanec ostal v zraku. Dogodek, ki se ne more zgoditi, imenujemo **nemogoči dogodek**.

Poudariti je treba, da je verjetnost nenegativno število, ki ni večje od 1. Zapisujemo ga lahko v obliki ulomka ali z odstotki, pa tudi z decimalno številko (npr.: $\frac{1}{8}$, 12,5 %, 0,125), zadnja zapisa včasih zaokrožamo na nekaj decimalk natančno (npr.: $\frac{1}{36}$, 2,78 %, 0,0278). Verjetnost je količnik in ne razmerje, zato zapis v obliki razmerja ni primeren. Pri uvajanju verjetnosti raje povejmo, da je ugoden npr. *en izid izmed dveh* ali *en izid izmed šestih*, kar zapišemo v obliki $\frac{1}{2}$ ali $\frac{1}{6}$.

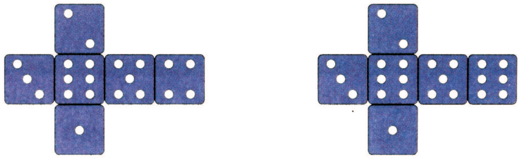
Zanimivo sta uvedena gotov in nemogoč dogodek: Kadarkoli vržemo kovanec, bo zagotovo padel na eno stran. Dogodek, ki se zagotovo zgodi, imenujemo **gotovi dogodek**. Verjetnost gotovega dogodka je 100 % in jo lahko zapišemo s številom 1.

Verjetnost, da pade številka pri metu kovanca, je torej:

Po tej razlagi je gotov dogodek pri metu kovanca, da *le-ta pade na eno stran*, nemogoč pa, da *le-ta ostane v zraku.* V pojasnilu k izračunu verjetnosti, da pade številka, je nemarno zapisano, da je število 1 *gotov dogodek* namesto *verjetnost gotovega dogodka.*

Bolje bi bilo, če bi gotov dogodek v tem primeru opisali s „Pade podoba ali številka“ ali „Pade katerakoli stran“, nemogoč pa z „Ne pade ne podoba ne številka“.

Eden izmed zgledov, s katerim naj bi razjasnili nekatere osnovne pojme o verjetnosti, je podan tako:
V vrečki je 6 belih in 9 črnih žetonov.



a) Kolikšna je verjetnost, da na slepo iz vrečke potegnemo črne žetone?
b) Kolikšna je verjetnost, da potegnemo bel žeton?

Takoj opazimo, da prvo vprašanje ni jasno, saj ne vemo, ali *potegnemo vse črne žetone*. Iz postopka reševanja se sicer izkaže, da bi moralo pisati: ... *iz vrečke potegnemo črn žeton*. Iskanje odgovora na prvo vprašanje nas takoj preseneti, saj je zapisano: V vrečki je skupaj 15 žetonov, torej je vseh dogodkov 15. Učenec tako dobi zmotno prepričanje, da je število dogodkov pri poskusih, ko vlečemo žetone ali kroglice iz vrečke, enako številu žetonov ali kroglic v vrečki, kar seveda ne drži. Do odgovora nas vodi zapis: Za nas je ugoden izid, če izvlečemo črn žeton, teh pa je 9. Verjetnost, da potegnemo črn žeton, je torej $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ali 60 %. Ta sicer napačen premislek je v skladu z zapisom na robu strani učbenika, kjer je povzeta napačna definicija verjetnosti, po kateri število ugodnih izidov delimo s številom vseh mogočih dogodkov, za nameček pa je dodana še „formula“: verjetnost $= \frac{\text{ugodni izidi}}{\text{vsi dogodki}}$.

Veliko enostavneje je bilo, če bi se naslonili na intuicijo in preprosto zapisali: „Ker je 9 izmed 15 žetonov črnih, je verjetnost, da na slepo izvlečemo črn žeton, enaka $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ali 60 %.“ Za učence je tak razmislek veliko bolj jasen kot pa zapleteno in strokovno oporečno ovinkarjenje.

Nič manj „raztresenosti“ ni v iskanju odgovora na drugo vprašanje: Iz vrečke vedno potegnemo črn ali bel žeton, kar imenujemo gotovi dogodek. Verjetnost gotovega dogodka je vedno 1. Zato lahko verjetnost, da izvlečemo bel žeton, izračunamo kot razliko: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Na koncu je sicer spodrsljaj, ki nakazuje na nedoslednost pri „prevajanju“, saj se pojavi kar frnikola: Verjetnost, da iz vrečke na slepo izvlečemo črn žeton, je $\frac{3}{5}$, za belo frnikolo pa $\frac{2}{5}$.

Skrivnosti števil in oblik, učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole

Že v napovedi je zapisano, da bomo v poglavju o verjetnosti med drugim izvedeli, kdaj je dogodek slučajen, kdaj je gotov in kdaj nemogoč, čeprav je najbrž mišljeno, da naj bi izvedeli, kateri dogodek (pri nekem poskusu) je slučajen, kateri gotov in kateri nemogoč.

Ob naštevanju dogodkov, ki se zgodijo v poskusu vrzi pošteno igralno kocko, so po vrsti zapisani standardni elementarni dogodki, zmoti pa zavajajoča slika, ki naj bi ločevala pošteno igralno kocko od nepoštene.

Kot vemo, *poštenost* običajne igralne kocke pomeni, da se vsak izid zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{6}$ oziroma da se po metu kocke vsaka njena mejna ploskev z enako verjetnostjo postavi na „zgornjo stran". Če je na dveh mejnih ploskvah poštene igralne kocke 6 pik, je pač verjetnost, da pade 6 pik, enaka $\frac{1}{3}$. Morda bi bilo dobro opozoriti, da je predstavljena mreža poštene igralne kocke neobičajna. Običajna igralna kocka ima namreč na nasproti ležečih mejnih ploskvah skupaj 7 pik.

V nadaljevanju srečamo nekaj nedomišljeno oblikovanih povedi, na primer „Če bi imeli v skledi same rumene kroglice, bi bila na slepo izvlečena kroglica vedno rumene barve" kot opis gotovega dogodka. Če je namreč izvlečena kroglica rumena, je le-ta *vedno rumene barve*, razen če jo prebarvamo ali zbledi. Bolje bi bilo zapisati, da *bi bila na slepo izvlečena kroglica zagotovo rumena* (saj je predpostavljeno, da so v skledi *same rumene kroglice*).

Izrazoslovje je vprašljivo tudi v povedih „Ker so v skledi 4 rumene in 4 bele kroglice, je naključno izvlečena kroglica ali rumene ali pa bele barve. Izbor barve bi bil naključen – slučajen, zato rečemo, da je takšen dogodek **slučajen dogodek**". Tako ni jasno, kaj slučajen dogodek sploh je – ali je to omenjeni *naključen izbor barve*? Raje bi zapisali: „Ker so v skledi 4 rumene in 4 bele kroglice, je naključno izvlečena kroglica ali rumene ali pa bele barve. Dogodek *Izvlečena kroglica je rumena* se zgodi, če naključno (slučajno) izvlečemo kroglico rumene barve, sicer pa ne. Zato je ta dogodek *slučajen dogodek*. Podobno ugotovimo, da je dogodek *Izvlečena kroglica je bela* slučajen."

Sledijo še večje nejasnosti, saj popolnoma izgubimo rdečo nit. Po besedilu v učbeniku naj bi namreč verjetnost slučajnega dogodka lahko napovedovali empirično (s poskušanjem) ali teoretično. Avtorji opišejo empirično napovedovanje verjetnosti dobesedno tako: „Opravimo veliko število ponovitev poskusa in si sproti zapisujemo ali se dani dogodek zgodi ali ne. Izračunamo količnik med frekvenco dogodka in številom vseh izvajanj poskusa", teoretično pa: „Verjetnost slučajnega dogodka poskušamo oceniti, ne da bi v resnici izvedli poskuse. To lahko naredimo v primerih, kjer ni nobenega razloga, da bi se en elementarni dogodek zgodil večkrat kot drugi (met kovanca ali igralne kocke)".

Precejšnja zmeda je tudi v navedeni *klasični definiciji verjetnosti*, saj je najprej zapisano: „Kadar so posamezni izidi enakovredni glede možnosti, da se zgodijo, je verjetnost slučajnega dogodka količnik med številom ugodnih izidov (m) in številom vseh možnih elementarnih dogodkov (n) v nekem poskusu", sledi pa formula:

$$P(A) = \frac{\text{število možnih ugodnih dogodkov}}{\text{število možnih elementarnih dogodkov}} = \frac{m}{n}.$$

V učbeniku sledi definicija frekvence dogodka na posebnem zgledu, čeprav je bil že v opisu t. i. *empiričnega napovedovanja verjetnosti* govor o frekvenci, nato pa popolnoma nekonsistentna definicija relativne frekvence, saj je navedeno: „Zapišemo količnik med številom ugodnih izidov za dogodek in številom vseh ponovitev poskusa“, za tem pa ulomek

$$\frac{\text{frekvenca dogodka}}{\text{število vseh ponovitev poskusa}},$$

ki je poimenovan relativna frekvenca dogodka in katerega vrednost $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ je izračunana za posebni zgled (Pri igri Človek ne jezi se, je Špela 3-krat v 15-tih metih kocke vrgla šestico). Očitno gre za „neločevanje“ med ugodnimi izidi in frekvenco dogodka, pa tudi za nerazumevanje pojma *relativna frekvenca*, saj lahko preberemo razlago „V zapisanem primeru je Špela opravila le 15 ponovitev poskusa. Če se želimo približati točni vrednosti za relativno frekvenco, moramo izvesti veliko večje število poskusov (npr. tisoč)“ in še poseben povzetek „Relativna frekvenca je količnik med številom ugodnih izidov za dogodek in številom vseh ponovitev poskusa. Računamo jo le pri enakovrednih dogodkih. Relativna frekvenca določa teoretično verjetnost.“

Pa smo pred dilemo: najprej je bilo teoretično napovedovanje verjetnosti opisano z „Verjetnost slučajnega dogodka poskušamo oceniti, ne da bi v resnici izvedli poskuse“, čeprav ni bilo pojasnjeno, kako to dejansko napravimo, iz tega povzetka pa naj bi teoretično verjetnost določali z relativno frekvenco. Ali gre za isti pojem?

Niti z rešenima primeroma si pri razjasnjevanju pojmov ne moremo pomagati, prej nasprotno. Že besedilo prvega primera je nejasno in matematično sporno. Tako gre:
Mečem dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik na obeh kockah 5?
a) Opravi 100 poskusov in ugotovi, kolikokrat je ugoden izid.
b) Nariši kombinatorično drevo za vse možne izide.
c) Določi verjetnost dogodka na osnovi meritev.
č) Določi relativno frekvenco in napovej teoretično verjetnost.
d) Primerjaj, ali si se pri izvajanju poskusa približal teoretični verjetnosti.

Kdor je usvojil prave verjetnostne pojme in koncepte, najbrž ne zna rešiti naloge. Porajajo se mu vprašanja: Zakaj je treba opraviti 100 poskusov, da bi ugotovili, kolikokrat je ugoden izid in kateri izid sploh? Kako naj določimo verjetnost dogodka na osnovi meritev – katerih meritev, kaj naj merimo? Kako z relativno frekvenco napovemo teoretično verjetnost – kaj sploh je teoretična verjetnost? Če relativna frekvenca določa teoretično verjetnost, ni kaj napovedovati. Kako naj primerjamo, ali smo se pri izvajanju poskusa približali teoretični verjetnosti?

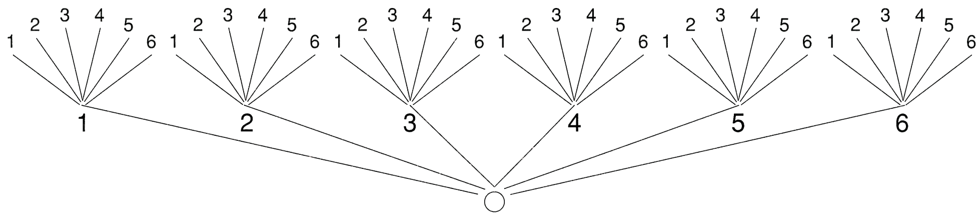
Poglejmo rešitev primera, kakor je navedena v učbeniku:
a) opravimo poskuse, število padlih pik zapišemo v preglednico in obarvamo stolpec, če je vsota pik na obeh kockah 5.
Sledi preglednica v 4 delih, ni pa nikakršnega pojasnila. Nemara je treba prešteti, koliko stolpcev je obarvanih, a na ta način preštejemo, da se je

št. pik 1. kocke	1	6	3	5	5	3	4	4	6	6	5	2	4	6	3	6	4	1	4	3	1	3	4	2	6
št. pik 2. kocke	1	1	4	5	6	2	3	6	3	2	2	3	6	2	5	1	5	1	5	2	1	2	1	3	6

št. pik 1. kocke	2	1	6	1	6	4	6	1	4	1	5	4	4	4	4	2	3	5	2	2	6	5	2	2	5
št. pik 2. kocke	1	1	2	5	3	4	3	1	1	5	6	2	3	5	4	5	3	3	5	3	4	2	6	4	2

št. pik 1. kocke	6	3	1	3	6	6	4	3	5	3	4	1	2	5	3	6	2	5	4	5	2	4	3	3	6
št. pik 2. kocke	2	4	4	2	3	4	5	3	5	1	6	1	4	1	4	4	4	2	1	4	6	1	3	4	5

št. pik 1. kocke	3	5	3	4	6	2	6	1	5	1	4	4	4	6	3	1	1	5	1	1	4	2	4	6	5
št. pik 2. kocke	1	1	1	6	2	6	6	5	4	4	2	3	3	4	1	1	1	4	2	3	3	6	4	1	5



omenjeni dogodek zgodil 12-krat, ne izvemo pa, kako *ugotovimo, kolikokrat je ugoden izid*. Pozoren bralec bi sicer našel napako že v barvanju stolpcev, saj eden izmed stolpcev v tretjem delu preglednice ni obarvan, čeprav v njem nastopata števili 4 in 1.

b) narišemo kombinatorično drevo vseh možnosti za met dveh kock. Vidimo, da je vseh možnosti 36.

c) Vsota 5 pik je padla 12-krat v 100 poskusih, zato je verjetnost na osnovi meritev

$$P(A_m) = \frac{12}{100} = 0{,}12 = 12\ \%.$$

Glede na rešitev je torej *verjetnost dogodka na osnovi meritev* pravzaprav kar relativna frekvenca in ni jasno, zakaj je tako poimenovana.

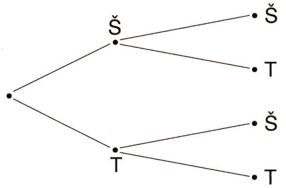
č) Ugodne možnosti za vsoto 5 pik so štiri: 1, 4 2, 3 3, 2 4, 1. Izračunamo relativno frekvenco $P(A) = \frac{4}{36} = 0{,}\overline{1} \doteq 11{,}1\ \%$.
Tu ni kaj dodati, saj je v resnici izračunana verjetnost po klasični definiciji, ki jo avtorji napačno imenujejo relativna frekvenca.

d) Izračunamo; kolikšen del teoretične verjetnosti je verjetnost pri merjenju.

$$P(A_m) = \tfrac{12}{100} \qquad P(A) = \tfrac{4}{36} \qquad \tfrac{12}{100} : \tfrac{4}{36} = 1{,}08 = 108\ \%$$

Teoretična verjetnost se od dejansko izmerjene verjetnosti razlikuje za 8 %.

Verjetno si to znajo razložiti le pisci učbenika. Če privzamemo, da je $P(A_m)$ *verjetnost pri merjenju*, pa karkoli že to je, je torej $P(A)$ *teoretična verjetnost*,



Š = števka, T = Triglav

POZOR!
Če opravimo premajhno število poskusov, se rezultati meritev razlikujejo od teoretične verjetnosti dogodka.

Vse možne rešitve so 4.

števka – števka	števka – Triglav	Triglav – števka	Triglav – Triglav
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷

da smo lahko izračunali, kar je zahtevano pod d). Pod č) je isti $P(A)$ imenovan *relativna frekvenca*.

Oglejmo si še drugi primer:
Rok je v zrak hkrati metal dva kovanca za 50 centov, Špela pa je v tabelo zapisovala dogodke, ki so se pri tem zgodili.
a) dogodek A: na obeh kovancih pade Triglav
b) dogodek B: na obeh kovancih pade števka
c) dogodek C: na enem od kovancev pade Triglav, na drugem pa števka
Poskus sta ponovila stokrat.

Z računanjem verjetnosti ugotovi, ali sta se pri izvajanju poskusa približala pričakovanim rezultatom.

Pred samo rešitvijo primera je v učbeniku dodano:

Seveda se takoj vprašamo, o katerih rešitvah je govor; najbrž so mišljeni izidi pri metu dveh kovancev. Iz preglednice naj bi razbrali, kolikokrat se je zgodil posamezni izid. Nekoliko nejasno je, kako je Špela vedela, na katerem kovancu je padla številka, če nista na obeh kovancih padli številki – ali sta bila kovanca označena? Pozoren bralec opazi, da je namesto besede *številka* napačno uporabljena beseda *števka*.

Naj navedemo le rešitev a), kot je zapisana v učbeniku, drugi dve sta rešeni analogno.

Spet ostanemo brez besed, zlasti ob dodatku ... *sta se zmotila za* ... Zelo nenavadne so tudi nekatere naloge za vajo. Navedimo dve:

Zapiši vse možne dogodke za vsak poskus.
a) Rok obiskuje pouk

Rešitev:

ugoden dogodek

a) Izračunamo verjetnost za dogodek *A*: $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

možni dogodki

Izmerjena verjetnost dogodka *A*: $P(A_m) = \frac{28}{100} = 0{,}28$.

Pri izvajanju poskusa *A* Rok in Špela nista dobila pričakovanega rezultata. Verjetnost pri meritvah je 112 % (0,28 : 0,25) izračunane verjetnosti, torej sta se zmotila za 12 %.

b) učiteljica pisno ocenjuje
c) Špela naključno izbere osebo iz njene nivojske skupine

Če ne „pokukamo“ v rešitve, bi stežka uganili, kateri so vsi možni dogodki za poskus *Rok obiskuje pouk*. A rešitev je sila preprosta: Rok je pri pouku, Rok ni pri pouku. Sedaj bi morda bralec naštel tudi vse možne dogodke za poskus *učiteljica pisno ocenjuje*.

Iz kupa 32 igralnih kart (komplet vsebuje 4-krat: kralj, dama, fant, as, 10, 9, 8, 7) 100-krat na slepo izvleci eno karto, jo poglej, zapiši, katera je, in karto vrni.
a) v razpredelnico zapisuj vse dogodke
b) izračunaj verjetnost za dogodek A: izvlečena karta je kralj
c) na osnovi podatkov v razpredelnici izračunaj, kolikokrat se je zgodil dogodek A
č) za koliko se razlikujeta rezultata pri b in c?

Reševalec je pred dilemo, ali naj po vrsti zapisuje vse dogodke, ki se lahko zgodijo, če izvlečemo karto iz kupa 32 kart, ali naj sproti zapisuje, kateri dogodek se je dejansko zgodil pri posamezni ponovitvi poskusa. Pod točko b je najbrž mišljena ena izvedba poskusa, ni pa jasno, kaj pravzaprav pove razlika rezultatov pri b in c oziroma zakaj primerjamo verjetnost dogodka A s frekvenco tega dogodka pri 100 ponovitvah poskusa.

Nasploh je v opisanem delu toliko protislovij in nekorektno vpeljanih pojmov, da bi bilo treba vse pojme uvesti povsem na novo in sistematično ter se pri tem opreti na neki „znani“ poskus, na primer met (poštene igralne) kocke. Frekvenco dogodka in relativno frekvenco dogodka bi morali navezati na število ponovitev poskusa, statistično verjetnost dogodka pa bi opredelili z relativno frekvenco pri dovolj velikem številu ponovitev poskusa. Pri matematični (klasični) verjetnosti bi si lahko pomagali s preglednico, kot je podana v prej omenjenem učbeniku *Kocka 9*, le da je treba besedno zvezo „Vsi dogodki“ zamenjati z „Vsi izidi“. V nadaljevanju bi morali biti primeri in naloge za vajo podani konsistentno in strokovno pravilno, prvi primer bi zapisali na primer:
Mečem dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost dogodka „Vsota pik na obeh kockah je enaka 5“?
a) Nariši kombinatorično drevo za vse možne izide.

b) Določi matematično verjetnost omenjenega dogodka.
c) Opravi 100 poskusov in preštej, kolikokrat se je zgodil omenjeni dogodek.
č) Določi relativno frekvenco omenjenega dogodka.
d) Primerjaj matematično verjetnost z relativno frekvenco.

Rešitve primerov bi morale biti opremljene s koristnimi komentarji, ki bi bili učencu v pomoč pri utrjevanju posameznih pojmov iz verjetnostnega računa.

Sklep

Naj poudarimo, da ni bil naš namen kakorkoli soditi o „potrjenih“ učbenikih za osnovno šolo. Dotaknili smo se le poglavja o verjetnosti iz tistih dveh učbenikov, katerih fotokopirane strani je prejela predmetna komisija za matematiko, ki pripravlja gradivo za izvedbo nacionalnega preverjanja znanja matematike in oblikuje navodila za vrednotenje izdelkov učencev. Bralec lahko že iz dobesedno povzetih besedil presodi, da niti uporabljeni jezik ni najboljši. Primeri, s katerimi naj bi učenci vstopili v verjetnost, so dovolj elementarni in zato primerni za seznanitev z osnovnimi pojmi, a se, žal, ti pojmi uvajajo nepravilno in nekorektno. Učenci zato usvojijo napačne začetne pojme iz verjetnosti, sposobnejši pa najbrž opazijo nelogične povezave med navedenimi definicijami in upati je, da pridejo do pravih informacij.

Seveda nas mora skrbeti, če se učenci naučijo izkrivljene matematične koncepte, saj z njimi lahko dosežejo kvečjemu matematično polpismenost in zelo luknjičave strategije reševanja (realističnih) problemov. Učitelji bi morali opozoriti učence na vsako napako v učbeniku in jih poučiti, kako je pravilno. Ker so učbeniki v t. i. učbeniških skladih, bi bilo treba ob prvi uporabi učbenikov vsaj označiti nepravilnosti. Sicer pa je skoraj neverjetno, da se lahko besedila s toliko nejasnosti ter strokovnih nepravilnosti in nekorektnosti sploh znajdejo v učbenikih.

LITERATURA

[1] J. Berk, J. Draksler in M. Robič, *Skrivnosti števil in oblik, učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole*, Rokus Klett, Ljubljana, 2010.

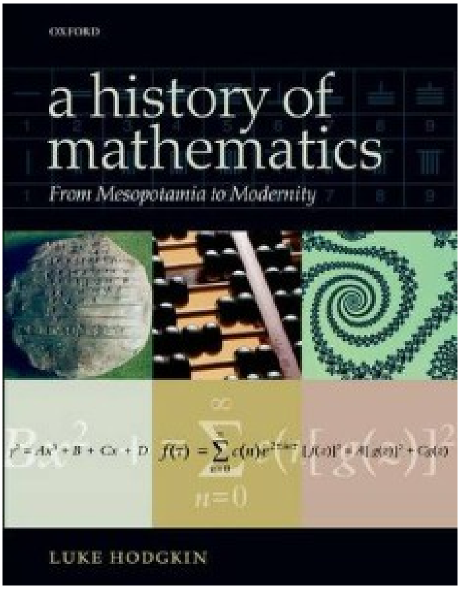
[2] M. Dornik, T. Smolej, M. Turk in M. Vehovec, *Kocka 9, matematika za 9. razred osnovne šole*, Modrijan, Ljubljana, 2008.

[3] G. Tomšič, M. Cotič, Z. Magajna in A. Žakelj, *Učni načrt: program osnovnošolskega izobraževanja. Matematika*, Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport : Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, 2002.

[4] A. Žakelj et al., *Program osnovna šola – matematika – učni načrt*, Ministrstvo za šolstvo in šport : Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, 2011.

NOVE KNJIGE

Luke Hodgkin, A history of mathematics, From Mesopotamia to Modernity, Oxford University Press, Oxford, New York 2005, 281 strani.



Knjiga je formalno namenjena (ameriškim) dodiplomskim študentom matematike; boljše poznavanje „humanistične“ (kulturne, zgodovinske, razvojne) dimenzije matematike naj bi jim razširilo obzorje ozko strokovne „tehnične“ izobrazbe in morda izboljšalo tudi zaposlitvene možnosti. V resnici pa nagovarja predvsem „idealnega“ bralca, neskončno radovednega ljubitelja matematike in navdušenega raziskovalca, ki mu ni škoda ne časa ne denarja za iskanje primarnih virov po knjižnicah, knjigarnah in na spletu, in ki nobene trditve o zgodovini matematike ne sprejme nekritično, ne da bi jo sam dodobra preveril.

Vsako poglavje se začne s citati znanstvenikov, ki dostikrat zagovarjajo diametralno nasprotne teze (npr. da so bili Arabci le posredniki grškega in indijskega znanja Evropi, ali pa da so bili tudi originalni v sintezi in nadgradnji rezultatov predhodnikov), konča pa se z odlomki originalnih matematičnih del in vprašanji, na katera lahko bralec argumentirano odgovori le po temeljitem razmisleku. Sploh je celotno delo zastavljeno problemsko in odgovarja na zahtevna vprašanja, kot so npr. „Kaj je Leibniz hotel sporočiti v svojem članku iz 1684 (v katerem je na hitro in zelo površno predstavil svoj infinitezimalni račun)? Kako so njegovo sporočilo razumeli bralci?“. Nekatera od vprašanj so povzeta po najnovejših raziskavah najboljših sodobnih zgodovinarjev matematike (npr. „Zakaj je trajalo tako dolgo, da so nove (neevklidske) geometrije dosegle širše občinstvo? Če so bile razmere ugodne za to, da je prišlo do dveh takih neodvisnih odkritij (Bolyai, Lobačevski) okrog leta 1820, zakaj ni bilo nobenih takih odkritij v naslednjih 40 letih?“. Poleg standardnih zgodovinskih vsebin (Babilonci, Grki, Kitajci, islamska matematika, infinitezimalni račun) obravnava tudi znastveno revolucijo (Galilej) in čas pred njo (npr. prispevek sholastike), problematiko geometrije in prostora ter moderno dobo. Bralcu omogoča pridobiti bolj kritičen pogled na zgodovino matematike, kot ga ponujajo običajne popularne knjige s to tematiko, v katerih je marsikatera nepreverjena ali celo neresnična trditev, izvirajoča iz avtorjevih predsodkov, nevednosti, površnosti, pristranskosti ali zvestobe določeni ideologiji, zapisana z neverjetno lahkoto in predstavljena kot preverjeno dejstvo, čeprav je v resnici samo hipoteza, ki je morebiti na podlagi novejših spoznanj stroke že ovržena in presežena.

Odlomki iz primarnih virov (npr. Heronov dokaz formule o ploščini trikotnika) nam omogočajo neposredno doživeti izkušnjo stika z drugačnimi pristopi k matematiki in osebnimi slogi posameznih avtorjev ter posebnostmi različnih dob in kultur. Ob tem lahko začnemo ceniti različnost in spoznamo, da so pojmi, ki so nam danes samoumevni, takšni le toliko časa, dokler se nam ne razširi obzorje. Takrat spoznamo, da poenostavljen pogled na zgodovino matematike ni nobena prednost, in začnemo ceniti bolj sofisticirano in kritično obravnavo posameznih vprašanj, katerih problematičnosti se poprej sploh nismo zavedali. Začne se nam svitati, da je zgodovina matematike izredno zanimiva, čeprav ne tako eksaktna veda, kot bi nam kot matematikom ugajalo.

Avtor za vsako izbrano obdobje in kulturo opredeli njene bistvene matematične dosežke, ideje, inovacije, značilne računske tehnike, pa tudi omejitve, predstavi pa tudi glavne težave zgodovinarjev pri njenem študiju in razumevanju (npr. premalo virov, drugačni zapisi števil in enačb, kot smo jih vajeni, neznan jezik, pomanjkanje prevodov, drugačen način razmišljanja ali zastavljanja problemov, različno strogi koncepti dokaza, pomanjkljivi komentarji sodobnikov, itd.).

Knjiga opozarja tudi na tipične napake zgodovinarjev matematike (npr. *evrocentrizem* – prepričanje, da je vsa pomembna matematika nastala v Evropi, *historicizem*, ki trdi, da je pretekla dela mogoče primerno interpretirati le v kontekstu določene pretekle kulture – in *prezentizem*, ki razlaga preteklost z vidika naše lastne kulture). Prav to iskreno priznavanje inherentnih omejitev zgodovine matematike pa nam omogoči prepoznati v njej znanost, ki se lahko še razvija in bogati ter odkriva nova presenetljiva spoznanja (npr. da so v Kerali, v jugovzhodni Indiji, v številnih astronomskih tekstih med leti 1400–1600 že uporabljali sofisticirane formule za neskončne vrste funkcij, ki jim mi pravimo $\sin x$, $\cos x$ in $\arctan x$). Ob branju knjige začnemo ceniti drobne evolucijske korake generacij za generacijami, ki postopoma omogočijo, da pride do posameznih „revolucionarnih“ odkritij. Ko vidimo, s kakšno muko so se npr. izoblikovali najosnovnejši pojmi števila, mestnega zapisa, neznank, potenc, dokaza, ipd., kot jih poznamo danes, lahko bolje cenimo vsak najmanjši prispevek različnih matematikov, npr. osvojitev koncepta ponazoritve splošne metode s posebnim primerom, ali Oresmov sholastični eksistenčni dokaz, da sploh obstaja kvadrat, katerega ploščina je enaka ploščini danega kroga (ker obstajata krogu očrtan in včrtan kvadrat in kvadrati vseh vmesnih velikosti, ki se spreminjajo zvezno!). Grški ideal strogega dokaza (že Platon je tako v matematiki kot filozofiji zahteval „logos“ – razlago, razumno utemeljitev izrekov in trditev) je bil v različnih dobah in kulturah različno upoštevan. Zelo poučno je poglavje o začetkih matematične analize, kjer je bilo tako Newtonu kot Leibnizu pomembneje, da novi račun, zasnovan na skrivnostnih „neskončno majhnih količinah“, deluje in zlahka daje rezultate, ki so bili prej nedosegljivi, kot pa da je brezhibno utemeljen. Avtor pravi, da si od tega zdrsa v negotovost (kljub temu da je Weierstrass analizo „očistil“ neskončno majhnih količin) matematika nikoli ni povsem opomogla.

Knjiga opozarja tudi, da v matematiki (in znanosti nasploh) ne gre vselej le za napredovanje, ampak včasih tudi za nazadovanje (npr. v pisavi ali v težavnosti obravnavanih problemov ali zahtevnosti izračunov, itd.). Da bi lahko pravilno razumeli pomen posameznega odkritja v matematiki, je treba poznati tudi okoliščine, v katerih je do njega prišlo, to pa zahteva dolgotrajen in poglobljen študij. Že samo pozorno branje te knjige, v kateri imamo tako rekoč vse pri roki (celo ključne odlomke prevodov originalnih tekstov), ni ravno preprosto. Težave pa so raznovrstne. Če se nam stvari zdijo samo čudne, je to še najmanjši problem (Kitajci so npr. pri računanju s paličicami z dvobarvnimi paličicami pri zapisu istega števila uporabljali pozitivne in negativne števke, kot če bi mi npr. pisali $3 \times 100 - 4 \times 10 + 4 \times 1$.) Težje je, če je podatkov premalo in tavamo v popolni temi. Tako npr. nekatere matematike poznamo le po njihovih delih, o njihovem življenju pa ne vemo nič, ali pa ravno obratno.

Knjigo, ki nas z jasno formuliranimi vprašanji in kritično perspektivo nenehno spodbuja, da svoje misli v zvezi z matematiko tudi ubesedimo, jasno izrazimo in argumentiramo, zato priporočam v branje prav vsem, ki želijo globlje pronikniti v skrivnost matematičnih odkritij preteklosti, sedanjosti in prihodnosti.

Jurij Kovič

DEVETNAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

V Blagoevgradu v Bolgariji je od 26. julija do 1. avgusta 2012 potekalo že 19. tekmovanje študentov matematike. Iz Slovenije sta se ga udeležili dve ekipi. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali Matej Aleksandrov iz drugega letnika, Gregor Grasselli in Jurij Volčič iz tretjega letnika in Aljaž Zalar iz prvega letnika druge stopnje študija, Famnit Univerze na Primorskem pa študenta prvega letnika Radovan Krtolica in Bećo Merulić.

V dvodnevnem reševanju desetih nalog se je pomerilo 316 študentov, ki so prišli z več kot 70 univerz. Naša ekipa je bila zelo uspešna, Matej Aleksandrov je osvojil drugo nagrado, Aljaž Zalar, Jurij Volčič, Radovan Krtolica in Gregor Grasselli pa tretjo.

Družabni del ni zaostajal za dogajanji prejšnjih let. V študentskem domu je bila zabava vse dni, še posebej po drugem tekmovalnem dnevu, ko je bilo delo študentov opravljeno. Naslednji večer so proslavljali neuradne rezultate, še večer kasneje pa osvojene nagrade. Tako je bilo spanja bolj malo tudi za tiste redke, ki bi sicer želeli spati.

Posebej čustvena je bila letos razglasitev rezultatov, ko je tretjo nagrado osvojila študentka iz Irana. Dekle brez rok se je prijavila sama, brez univerzitetne ekipe, organizatorji pa so ji zagotovili vse potrebno, da je lahko pisala z nogami. Na podelitvi je poleg priznanja prejela tudi stoječi aplavz vseh udeležencev.

V letu 2013 bo jubilejno 20. tekmovanje organizirano spet v Blagoevgradu.

Oglejmo si še tri naloge s tekmovanja ter njihove rešitve. Prva bo lahka, druga srednje težavnosti in tretja malo težja.

Naloga 1. Naj $p(n)$ označuje število načinov, kako število n zapišemo kot vsoto naravnih števil. Na primer, ker je

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1\,,$$

je $p(4) = 5$. Dokažite, da je razlika $p(n) - p(n-1)$ enaka številu načinov, kako število n zapišemo kot vsoto celih števil, enakih vsaj 2.

Rešitev 1. Nekateri študenti so imeli probleme z rahlo nenatančno formulacijo naloge, mnogi pa z dejstvom, da se jim je naloga zdela tako očitna, da niti niso razumeli, kaj je treba dokazati. Tako celo nekateri študenti, ki so sicer osvojili visoka mesta, pri tej nalogi niso dobili vseh točk.

Zapišimo nalogo formalno. Definiramo tri družine množic:

$$P_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k); a_i \in \mathbb{Z}, a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_k \geq 1, a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n\}\,,$$

$$R_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k); a_i \in \mathbb{Z}, a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_k = 1, a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n\}$$

in

$$S_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k); a_i \in \mathbb{Z}, a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_k \geq 2, a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n\}\,.$$

Ker sta množici R_n in S_n disjunktni in velja $P_n = R_n \cup S_n$, velja zveza

$$|P_n| = |R_n| + |S_n|\,.$$

Seveda velja $|P_n| = p(n)$ ter $|S_n|$ je število načinov, kako število n zapišemo kot vsoto celih števil, enakih vsaj 2. Dokazati je torej treba, da je $|R_n| = p(n-1)$. Definiramo funkcijo $\phi : P_{n-1} \to R_n$ s predpisom $\phi((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})) = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, 1)$. Ker velja $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} = n-1$, je $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + 1 = n$, tako je ϕ res preslikava med ustreznima množicama. Poleg tega je injektivna in surjektivna, torej je bijekcija. Zato res velja $|P_{n-1}| = |R_n|$.

Komisija je kot popolno sprejela tudi naslednjo rešitev:

V bistvu ločimo vsote števila n na dve množici, v eni so vsote, ki ne vsebujejo 1, v drugi pa vsote z vsaj eno 1. Ko to 1 odstranimo, je vsota preostalih členov enaka $n - 1$.

Bistveni del rešitve se je komisiji namreč zdel konstrukcija bijekcije (odstranitev ali dodajanje 1). Tako so mnogi študenti, ki so napisali le $n = (n-1)+1$ najverjetneje imeli pravo idejo, a ker niso natančneje pojasnili, kaj storiti z odvečno 1, so dobili le malo točk.

Naloga 2. Definiramo zaporedje $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ in za $n \geq 1$ rekurzivno z zvezo $a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}$. Dokažite, da vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ konvergira, ter ugotovite, koliko je njena vrednost.

Rešitev 2. Neposredno iz rekurzivne zveze (pomnožimo obe strani z $\frac{1+(n+1)a_n}{a_n}$) sledi

$$a_{n+1}/a_n + (n+1)a_{n+1} = na_n\,,$$

od koder dobimo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{1}{2} + (a_1 - 2a_2) + (2a_2 - 3a_3) + \ldots + (na_n - (n+1)a_{n+1})\\ &= \frac{1}{2} + a_1 - (n+1)a_{n+1} = 1 - (n+1)a_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Tako vemo, da so delne vsote omejene z 1, poleg tega pa zaporedje delnih vsot narašča, torej vrsta konvergira. To pa pomeni, da zaporedje členov a_{k+1}/a_k konvergira proti 0, torej obstaja n, da je $a_{k+1}/a_k < \frac{1}{2}$ za vsak $k > N$. Tako je za vsak $k > N$ člen $a_k < \frac{C}{2^k}$ za neko konstanto C. Od tod sledi, da zaporedje na_n konvergira proti 0, torej je iskana vrednost vrste enaka 1.

Naloga 3. Naj bo $n \geq 2$. Poiščite realne vrednosti parametra a, za katere obstajajo realna števila x_i, da velja

$$x_1(1-x_2) = x_2(1-x_3) = \ldots = x_{n-1}(1-x_n) = x_n(1-x_1) = a\,.$$

Rešitev 3. Najprej opazimo primer, ko so vsi x_i enaki. Ker ima enačba $x(1-x) = a$ rešitvi $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$, ki sta realni za $a \leq \frac{1}{4}$, te vrednosti parametra a ustrezajo zahtevam naloge.

Predpostavimo sedaj, da je $a > \frac{1}{4}$. Vidimo, da je $x_{i+1} = 1 - \frac{a}{x_i} = \frac{x_i - a}{x_i}$. Če definiramo preslikavo $\phi(x) = \frac{x-a}{x}$, je $x_{i+1} = \phi(x_i) = \phi^i(x_1)$. Izračunamo $\phi^2(x) = 1 - \frac{a}{\frac{x-a}{x}} = \frac{x(1-a)-a}{x-a}$ in $\phi^3(x) = 1 - \frac{a}{\frac{x(1-a)-a}{x-a}} = \frac{x(1-2a)-a+a^2}{x(1-a)-a}$. Opazimo, da lahko ϕ^n zapišemo kot racionalno funkcijo, natančneje, kot kvocient dveh linearnih funkcij v x. Koeficiente teh funkcij (ki so funkcije parametra a) pa lahko izračunamo rekurzivno. Tako lahko pridemo do rešitve, še bolje pa je, če ugotovimo, da je ϕ Möbiusova transformacija, ki jo lahko predstavimo z matriko $M = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, preslikava ϕ^n pa je potem predstavljena z matriko M^n. Seveda je $M^2 = \begin{bmatrix} 1-a & -a \\ 1 & -a \end{bmatrix}$ in $M^3 = \begin{bmatrix} 1-2a & a^2-a \\ 1-a & -a \end{bmatrix}$. Zadnja enačba v sistemu enačb nam pove, da pravzaprav iščemo rešitev enačbe $\phi^n(x) = x$ oziroma lastni vektor matrike M^n. Ker je karakteristični polinom matrike M enak $x^2 - x + a$, sta lastni vrednosti matrike M enaki $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ in sta torej kompleksni. Ker iščemo le realne rešitve osnovnega sistema, mora biti lastni vektor matrike M^n realen. Torej sta tudi lastni vrednosti realni. Dobimo torej pogoj $\lambda_{1,2}^n = (\frac{1 \pm i\sqrt{4a-1}}{2})^n \in \mathbb{R}$, kar velja, kadar sta argumenta λ_1 in λ_2 oblike $\frac{\pi k}{n}$ za neki k. To velja natanko takrat, ko je $\tan \frac{\pi k}{n} = \pm\sqrt{4a-1}$ oziroma $a = \frac{1}{4}\left(1 + \tan^2(\frac{\pi k}{n})\right)$. Pri danem a so potem rešitve sistema $x_i = \phi^{i-1}(x_1)$ (vzamemo lahko cikel, generiran s poljubno začetno vrednostjo x_1). Problem bi nastal, če je kak element tega cikla enak neskončno, a tak cikel dobimo le za končno mnogo začetnih vrednosti x_1, vsi drugi cikli so iskane rešitve.

Za konec predlagam, da se poskusite v reševanju še enega zanimivega vprašanja:

Naloga 4. Kolikšen je lahko najmanjši rang $n \times n$ matrike, ki ima na diagonali ničle, zunaj diagonale pa strogo pozitivne elemente?

Kogar zanima rešitev te naloge ali pa bi se rad poskusil v reševanju še kakšne naloge s tekmovanja, si jih lahko ogleda na uradni strani `www.imc-math.org.uk`.

Gregor Šega

OBVESTILO

V Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik 49, št. 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA, `www.dmfa.si/pravilniki/Pravilnik_Drustvena-Priznanja.html` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) v skladu s tem pravilnikom za letošnja priznanja pošljete do **30. septembra 2013** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ul. 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Andrej Likar

KODEKS RAVNANJA EVROPSKEGA MATEMATIČNEGA DRUŠTVA

Besedilo je prevod in priredba Uvoda v **Kodeks ravnanja Evropskega matematičnega društva (EMS)**, ki je bil objavljen marca 2013 v glasilu Newsletter of the EMS [1].

Društvo *EMS* je v letu 2010 ustanovilo *Odbor za etiko.* Vodi ga danski matematik *Arne Jensen*, ki je napisal ta uvod. Član odbora je tudi profesor *Tomaž Pisanski.* Podpredsednik odbora je profesor *Harold Garth Dales* z univerz v Lancastru in Leedsu, ki je letos spomladi obiskal Slovenijo in 18. aprila predaval na Matematičnem kolokviju v Ljubljani. Zahvaljujemo se mu za dodatna pojasnila o kodeksu.

Prva naloga Odbora za etiko EMS je bila priprava *Kodeksa ravnanja.* To nalogo so opravili spomladi 2012. Oktobra ga je odobril Izvršni odbor in v veljavo je stopil 1. novembra 2012.

Zahvaljujemo se EMS in profesorju Jensenu, da sta dovolila prevod in objavo tega kratkega opisa *Kodeksa.*

Kodeks ravnanja

Kodeks je na spletni strani EMS. Ta angleška verzija [2], objavljena tudi v EMS Newsletter marca 2013 [3], velja kot dokončna. Postavlja vrsto standardov, ki naj jim sledijo evropski matematiki v raziskovanju in poklicnem življenju. Enako kodeks velja za urednike in založnike matematične literature.

Kodeks pokriva objavljanje in razširjanje matematičnega raziskovanja. Vsebuje naslednje teme:

- odgovornost avtorjev;
- odgovornost založnikov in urednikov;
- odgovornost recenzentov;
- odgovornost uporabnikov bibliometričnih podatkov. (Sem sodi razvrščanje revij po kakovosti, faktorji vpliva, preštevanje citatov itd.)

Kodeks opisuje dobro prakso in etično ravnanje v objavljanju, razširjanju in ocenjevanju matematičnega raziskovanja. Opisuje tudi, kaj je neustrezno ravnanje ali neetično obnašanje na tem področju.

- *Za avtorje*: Dobra praksa je, da navedemo dosežke drugih in jih preciziramo z ustreznimi bibliografskimi podatki. V zadnjih letih se je v matematičnih znanostih bolj razširilo plagiatorstvo. Plagiatorstvo je brez dvoma neetično.

- *Za založnike*: Dobra praksa je, da postavijo in jasno predstavijo standarde za etično ravnanje v publiciranju. Določiti morajo tudi postopek preiskave in reakcije na sume in obtožbe o nepravilnem ravnanju.
- *Za urednike* (povzeto deloma iz kodeksa samega, op. prevajalca): Urednik se mora izvzeti iz kakršnihkoli uredniških dolžnosti, ki bi peljale v osebni, komercialni ali poklicni konflikt interesov. Urednik se mora izogibati zlorabi svojega privilegiranega položaja ali zlorabi informacij, ki jih je dobil v okviru uredniških dolžnosti in bi vplivale na obravnavo lastnih člankov ali pa člankov kolegov, študentov ali osebnih znancev. Vsekakor zaupnih informacij, ki jih je prejel, urednik ne sme uporabljati v lastnem delu.

  Če uredniki spoznajo, da je bilo delo, ki so ga objavili, deloma plagiat drugega vira, naj pozovejo avtorje, da predložijo nedvoumno izjavo o umiku. Če se to ne zgodi, naj sami objavijo izjavo, ki precizira dejanje plagiatorstva.
- *Za recenzente*: Izogibajo naj se poklicnim ali osebnim konfliktom interesov. Kakršenkoli konflikt interesov naj razjasnijo z urednikom. Recenzent lahko v tem primeru odloča le s soglasjem urednika. Recenzenti naj se izogibajo uporabi zaupnih informacij iz rokopisa, ki ga pregledujejo.
- *Bibliometrični podatki*: Uporabniki morajo poznati izvor podatkov. Uporabljati jih morajo previdno in razumeti zanesljivost oziroma nezanesljivost takih podatkov. Avtorji, uredniki in založniki naj ne poskušajo umetno vplivati na bibliometrične podatke, faktorje vpliva in število citatov, ki pri tem nastanejo.

Postopki

V kodeksu so tudi postopki obravnave posameznih primerov, na katere je opozorjen Odbor za etiko.

Primere lahko predložijo osebe, udeležene v trditvah o neetičnem obnašanju, opisanem v kodeksu. Odbor ne bo obravnaval predlogov tretjih strani. Preden se obrne na odbor, mora tožnik poskušati urediti zadevo sam. Ko gre za objavljena dela, naj najprej uporabi postopke, ki jih imajo založniki za obravnavo neetičnega ravnanja.

Ko se odbor odloči, da bo sprejel primer, se bo potrudil, da razkrije osnovna dejstva. Odbor bo najprej poskušal s posredovanjem (mediacijo). Če to ne bo uspešno, bo podal svoje ugotovitve. To bo sporočil predsedniku EMS, ki bo odločal o nadaljnjih korakih.

Sklep

Kodeks lahko uveljavljamo le z moralno močjo, tako da ljudi odvračamo od neetičnega ravnanja.

Gornji opis je seveda nepopoln. Za popolnejšo informacijo si oglejte kodeks sam, kjer so stvari bistveno bolj razčlenjene in precizirane.

Kodeks imate lahko za prvi poskus. Čez nekaj let bo sledila revizija.

Pripombe na kodeks lahko pošljete profesorju Arneju Jensenu (matarne@math.aau.dk), predsedniku odbora.

LITERATURA

[1] Arne Jensen, About the Code of Practice of the European Mathematical Society, Newsletter of the European Mathematical Society, March 2013, str. 11, http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2013-03-87.pdf

[2] Kodeks ravnanja na spletni strani EMS: Code of Practice, http://www.euro-math-soc.eu/files/COP-approved.pdf

[3] Code of Practice, Newsletter of the European Mathematical Society, March 2013, 12–15, http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2013-03-87.pdf

Peter Legiša

MATEMATIČNI RAZISKOVALNI TABOR MARS 2013

Že 8. raziskovalni tabor za srednješolce MARS 2013 v organizaciji DMFA Slovenije bo letos potekal v Bohinju od 18. do 24. avgusta, odgovorna oseba je dr. Boštjan Kuzman. Za udeležbo se lahko prijavijo vsi dijaki, ki imajo veselje do raziskovanja in želijo preživeti teden dni počitnic v družbi vrstnikov iz vse Slovenije. Udeleženci bodo sodelovali v delavnicah in pripravili skupinske projekte, poljudna predavanja zanje pa bodo pripravili uveljavljeni slovenski matematiki z različnih ustanov. Več informacij o vsebini in prijavi najdete na spletni strani mars.dmfa.si.

Fotografija: J. Šuntajs

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi k sodelovanju na strokovnem srečanju in 65. občnem zboru, ki bosta 15. in 16. novembra 2013 v Hotelu Golf na Bledu.

Vodilna tema letošnjega strokovnega srečanja ima naslov *Matematični in fizikalni sprehodi v naravo.* Med sprehodi opazimo marsikaj zanimivega, kar se da lepo vključiti v pouk tako matematike kot fizike. Nekaj časa bomo namenili **pripravam učencev na tekmovanja** in pripravili delavnice na to temo. Obeležili bomo tudi **140-letnico rojstva akademika profesorja dr. Josipa Plemlja.** K sodelovanju vabimo vse učitelje in člane DMFA, da predstavijo svoje izkušnje in ideje:

- v obliki krajših predstavitev,
- v obliki plakatov,
- v obliki delavnice.

Predavateljem bodo na voljo projekcijsko platno in projektor. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj ali pa se morajo o tem poprej dogovoriti (sporočiti Janezu Krušiču, telefon 01 4766 559 e-pošta `tajnik@dmfa.si`).

Prosimo vas, da nam prispevke na izbrani temi pošljete do **15. septembra 2013** na naslov `nada.razpet@fmf.uni-lj.si`.

Prijave morajo vsebovati:

- naslov prispevka,
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domači naslov in elektronski naslov,
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12pt naj ne presega 10 vrstic),
- predlagano trajanje predstavitve.

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora. Ob letošnjem občnem zboru bomo pripravili tudi **15. slovensko srečanje o uporabi fizike**. Vsa obvestila v zvezi z občnim zborom in strokovnim srečanjem bomo sproti objavljali na domači strani DMFA: `http://www.dmfa.si/`.

Prijava na seminar in kotizacija

Zgodnja prijava (do 15. septembra 2013): 35 EUR za člane DMFA Slovenije, 50 EUR za nečlane. Običajna prijava (do zapolnitve mest): 49 EUR za člane DMFA Slovenije, 70 EUR za nečlane. Na seminar se je potrebno prijaviti preko informacijskega strežnika DMFA (prijava bo možna od 1. 9. 2013 dalje). Morebitne hotelske storitve si **udeleženci rezervirajo sami**. Na internetni strani DMFA je prijavni list za rezervacijo hotela.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Andrej Likar

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2013
Letnik 60, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici je fotografija Krožnega laserja G v Geodetskem observatoriju Wettzell.