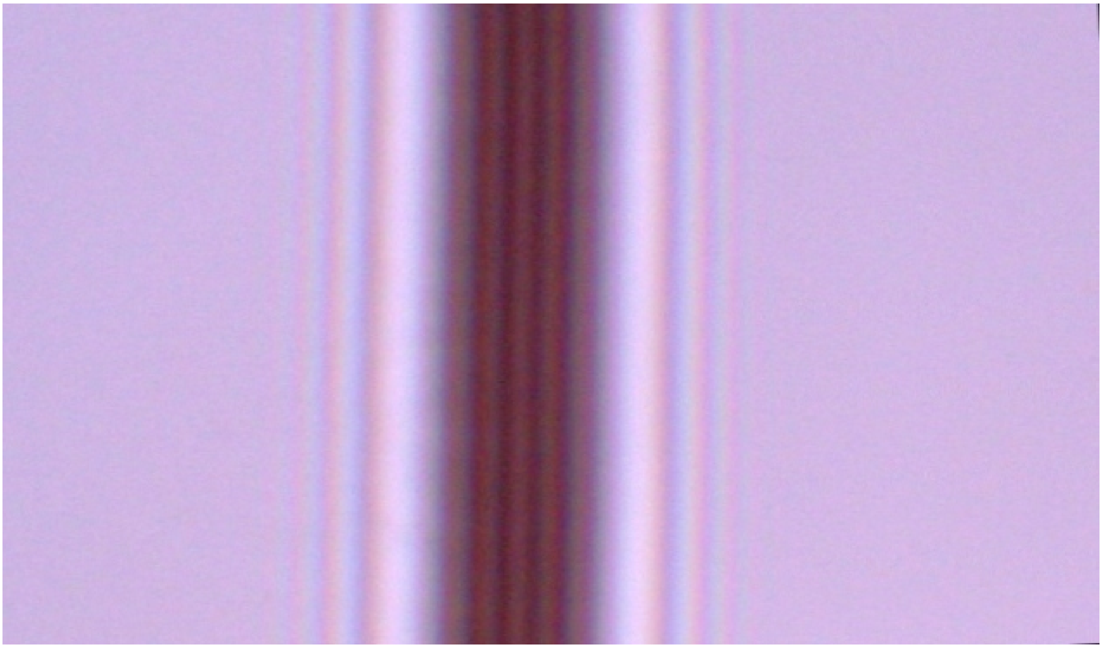
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2016
Letnik 63
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2016, letnik 63, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

ABEL-RUFFINIJEV IZREK PREKO ZANK IN PERMUTACIJ

ROK GREGORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 30C10, 30C15 20B30

V tem prispevku obravnavamo slavni Abel-Ruffinijev izrek o nerešljivosti polinomskih enačb stopnje pet ali več v radikalih. Sledili bomo enemu izmed njegovih elementarnih dokazov, pri katerem bomo predpisali enoparametrično družino polinomov in opazovali, kakšne permutacije ničel začetnega polinoma dobimo, ko parameter prepotuje zanke v kompleksni ravnini.

THE ABEL-RUFFINI THEOREM VIA LOOPS AND PERMUTATIONS

In this article we study the celebrated Abel-Ruffini theorem about the insolvability of polynomial equations of degree five or greater in radicals. We will follow one of its elementary proofs, prescribing a one-parameter family of polynomials and observing the permutations of the zeros of the initial polynomial which are obtained when the parameter traverses loops in the complex plane.

Uvod

Že tisočletja je znano, da ima linearna enačba $ax + b = 0$ rešitev oblike

$$x = -\frac{b}{a}$$

in da ima kvadratna enačba $ax^2 + bx + c = 0$ rešitve, podane s formulo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Podobne formule za rešitve polinomskih enačb stopnje tri in štiri sta pred nekaj stoletji našla Cardano in Tartaglia. Na podlagi tega se zdi, da bi podobne formule lahko obstajale tudi za rešitve polinomskih enačb višjih stopenj, vendar se je uspeh pri iskanju teh matematikom dolgo izmikal. Naposled je bilo dokazano, da to ni naključje; takšnih formul v splošnem namreč ni. To je vsebina Abel-Ruffinijevega izreka, ki ga lahko nekoliko neformalno zapišemo takole:
Za polinome stopnje vsaj pet ne obstaja formula, ki bi ničle polinoma izrazila s koeficienti polinoma in bi vsebovala zgolj množenje, seštevanje, potenciranje in korenjenje.

V tem članku bomo ta izrek natančneje formulirali in dokazali. Za to ne bomo navedli standardnega dokaza z uporabo Galoisove teorije niti Ruffinijevega originalnega pristopa, temveč bomo sledili ideji[1] slavnega ruskega matematika Vladimirja Arnolda. Glavna prednost tega dokaza je, da vsebuje skoraj izključno matematične pojme, poznane že srednješolcem.

Princip zveznosti in nevarne točke

V pristopu k Abel-Ruffinijevemu izreku, ki ga bomo ubrali, bo bistven naslednji rezultat:

Izrek 1 (Princip zveznosti). *Naj bodo $a_{n-1}, \ldots, a_0\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ zvezne funkcije in označimo s*

$$p_s(x) = x^n + a_{n-1}(s)x^{n-1} + \cdots + a_1(s)x + a_0(s)$$

pripadajočo družino polinomov. Denimo, da nima noben polinom $p_s(x)$ za $0 \le s \le 1$ ničle stopnje dve ali več. Tedaj obstajajo takšne zvezne funkcije $x_1, \ldots, x_n\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, da velja

$$p_s(x) = (x - x_1(s))\cdots(x - x_n(s)).$$

Princip zveznosti, katerega dokaz je mogoče najti npr. v [4], je natančna formulacija intuitivno gotovega dejstva: če malo spremenimo koeficiente polinoma, se bodo njegove ničle malo premaknile. Med drugim iz njega sledi, da ima vsak kompleksen polinom stopnje n natanko n ničel, kar je znano pod imenom *osnovni izrek algebre.*

Družina polinomov, s katero se bomo ukvarjali, je

$$\boxed{p_t(x) = x^5 - x + t, t \in \mathbb{C}.}$$

V njej je zgolj eden izmed koeficientov spremenljiv, namreč prosti člen. Če parameter t zvezno spreminjamo vzdolž neke krivulje v kompleksni ravnini, potem princip zveznosti zagotavlja, da se tudi ničle polinoma $p_t(x)$ spreminjajo zvezno in izrišejo vsaka svojo krivuljo v $\mathbb{C}$.

Pri tem moramo biti nekoliko previdni; princip zveznosti smemo uporabiti le, če pri potovanju t vzdolž dane krivulje nobeden izmed pripadajočih

[1]Arnoldov dokaz, objavljen kot zaporedje nalog v [1], uporablja nekoliko bolj sofisticiran jezik monodromije in Riemannovih ploskev. Zasluga Dimitrija Fuchsa in Sergeja Tabachinkova je, da sta dokaz priredila in prepisala v elementaren jezik. Vsebina tega članka je tako povzeta predvsem po njunem gradivu [2].

polinomov p_t nima večkratne ničle. Zato moramo poiskati tiste vrednosti $t \in \mathbb{C}$, v katerih ta pogoj za našo družino ni izpolnjen. Spomnimo se naslednjega preprostega kriterija:

Trditev 2. *Naj bo p polinom s kompleksnimi koeficienti, ki ima ničlo v točki $x_0 \in \mathbb{C}$. V tej točki ima p večkratno ničlo natanko tedaj, ko je $p'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Ker je x_0 ničla polinoma p, je mogoče zapisati $p(x) = (x - x_0)q(x)$ za neki polinom q. Ničla x_0 je večkratna za p, če in zgolj če ima v njej ničlo tudi q. Po verižnem pravilu za odvajanje je

$$p'(x) = (x - x_0)q'(x) + q(x)$$

in v posebnem $p'(x_0) = q(x_0)$. Torej je to, da ima q ničlo v x_0, nadalje ekvivalentno temu, da ima tam ničlo odvod p'. ■

Iz zgornje trditve torej sledi, da je ničla polinoma p_t večkratna natanko tedaj, kadar je tudi ničla njegovega odvoda $\frac{\partial p_t}{\partial x}$. Ker je

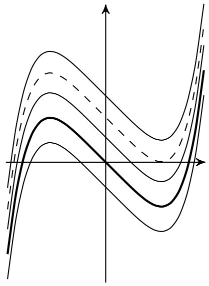
$$\frac{\partial p_t}{\partial x}(x) = 5x^4 - 1,$$

odvod polinoma p_t ni odvisen od t in ima ničle natanko v $5^{-1/4}$-kratnikih četrtih korenov enote. To pomeni, da so potencialne večkratne ničle polinoma p_t točke $\pm 5^{-1/4}$ in $\pm 5^{-1/4} i$. Da bo zares šlo za večkratne ničle, mora seveda imeti p_t tam vrednost 0, torej mora za kako izmed teh vrednosti za x veljati

$$\begin{aligned} 0 &= x^5 - x + t \\ &= \frac{1}{5}x - x + t \\ &= -\frac{4}{5}x + t. \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili prej opaženo dejstvo, da v teh točkah velja $x^4 = 1/5$. Ugotovili smo, da ima polinom p_t večkratne ničle natanko tedaj, ko je t enak enemu izmed števil $\pm 4 \cdot 5^{-5/4}$ in $\pm 4 \cdot 5^{-5/4} i$. Ta števila poimenujmo *nevarne točke* in jih zaporedoma označimo kot t_1, t_3, t_2 in t_4.

Nevarnih točk je malo, zgolj štiri v kontinuumu točk, ki tvorijo kompleksno ravnino. Zato bomo lahko nemoteno uporabljali princip zveznosti; vsakič, ko bi prečkali nevarno točko, bomo z drobno perturbacijo dosegli, da se ji bomo izognili. K temu se bomo vrnili na začetku razdelka, v katerem bomo dokazali Abel-Ruffinijev izrek.



Slika 1. Grafi polinomov p_t za $-\varepsilon \leq t \leq t_1+\varepsilon$. Z odebeljeno črto je prikazan p_0, s prekinjeno črto pa p_{t_1}. Vidimo, da je t_1 zares nevarna točka, saj ima polinom p_{t_1} presečišče drugega reda z abcisno osjo.

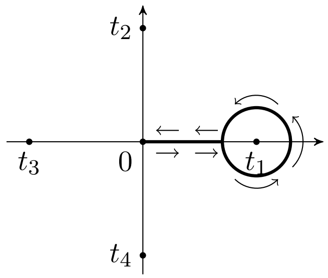
Zankam prirejene permutacije

Opazovali bomo, kako se ničle polinomov p_t spreminjajo, ko t prepotuje neko zanko, to je sklenjeno zvezno krivuljo, ki se začne in konča v izhodišču ter se izogne vsem nevarnim točkam. Ker bo t na začetku in koncu enak 0, bosta nabora $\{x_1(0), \ldots, x_5(0)\}$ in $\{x_1(1), \ldots, x_5(1)\}$, kjer uporabljamo oznake iz izreka 1, med seboj enaka. Pri tem je pomembno, da to ne pomeni nujno, da je $x_n(0) = x_n(1)$. Lahko se na primer zgodi, da je $x_n(0) = x_n(1)$ za $n = 1, 2, 3$, vendar je $x_4(0) = x_5(1)$ in $x_5(0) = x_4(1)$. Ko torej t prepotuje zanko skozi izhodišče, se ničle polinoma p_0 lahko med sabo premešajo. Ker ima $p_0(x) = x^5 - x$ ničle ± 1, $\pm i$ in 0, zanka skozi izhodišče porodi permutacijo teh točk.

Naj bo ℓ zanka skozi izhodišče v kompleksni ravnini, ki se izogne vsem nevarnim točkam. Kot običajno privzemimo, da je krivulja $t = \ell(s)$ parametrizirana z intervalom $[0, 1]$, torej da se začne pri času $s = 0$ in konča pri času $s = 1$ v izhodišču. Zanka ℓ določa permutacijo $\pi(\ell)$ množice s petimi elementi, ki številu $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ priredi tisto število $\pi(\ell)(n) = m$, za katero je $x_n(0) = x_m(1)$, kjer ponovno uporabljamo oznake kot v izreku 1. Da bo permutacija enolično določena, moramo oštevilčiti tudi ničle polinoma p_0. Izbira oštevilčenja ni bistvena, tako naj bo npr. $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = i$, $x_3(0) = -1$, $x_4(0) = -i$ in $x_5(0) = 0$.

Oglejmo si zanko ℓ_1, ki se začne v izhodišču, potuje po realni osi proti nevarni točki $t_1 = 4 \cdot 5^{-5/4}$, zakroži po krogu z zelo majhnim polmerom okoli t_1, ter se nato vrne po realni osi nazaj v izhodišče.

Razdelimo zanko ℓ_1 na krivuljo γ_1, ki teče vzdolž realne osi, ter krivuljo γ_2, ki opiše krog okoli točke t_1. Če si ogledamo sliko 1, se lahko prepričamo, da pri potovanju po γ_1 realne ničle p_t ostajajo na realni osi. Pri tem se



Slika 2. Nevarne točke in z odebeljeno črto označena zanka ℓ_1.

ničli x_1 in x_5 približujeta druga drugi, medtem ko je x_3 oddaljena. Pri $t = t_1$ ima, kot smo videli zgoraj, p_{t_1} dvojno ničlo $x_1(t_1) = x_5(t_1) = 5^{-1/4}$, vendar se krivulja γ_1 ustavi nekoliko pred t_1 in ničli x_1 ter x_5 se znajdeta na nasprotnih straneh točke $5^{-1/4}$.

Spomnimo se, da kompleksne ničle realnega polinoma vedno nastopajo v konjugiranih parih. S pomočjo principa zveznosti je lahko videti, da za konjugirani par ničel $x_2(0) = \overline{x_4(0)}$ polinoma p_0 velja $x_2(t) = \overline{x_4(t)}$ za vsak dovolj majhen $t > 0$. Tako vidimo, da se ničli $x_2(t)$ in $x_4(t)$ polinoma p_t gibljeta vsaka po svoji polravnini, ko parameter t prepotuje γ_1.

Premislimo še, kako se premikajo ničle polinoma p_t, ko parameter t preteče krožnico γ_2. Iz načela zveznosti sledi, da se za dovolj majhne polmere te krožnice ničle x_2, x_3 in x_4 ne morejo premakniti preveč in tako pristanejo po prepotovanem γ_2 v tistih točkah, v katerih so začele potovati.

Za x_1 in x_5, ki sta na začetku in koncu krivulje γ_2 na nasprotnih straneh realne osi glede na točko $a = 5^{-1/4}$, pa je zgodba drugačna. Fiksirajmo neki parameter $t \in \gamma_2$ in se vprašajmo, za katera kompleksna števila ε, nemara z majhno normo $|\varepsilon| > 0$, je točka $x = a + \varepsilon$ kandidat za $x_1(t)$ ali $x_5(t)$. Ekvivalentno, za katere majhne $\varepsilon \in \mathbb{C}$ velja $p_t(a + \varepsilon) = 0$.

Tak ε zadošča

$$\begin{aligned} t &= x - x^5 \\ &= a - a^5 + \varepsilon(1 - 5a^4) - \binom{5}{2}\varepsilon^2 a^3 - \cdots - \varepsilon^5 \\ &= a - a^5 + C\varepsilon^2; \end{aligned}$$

uporabili smo binomski izrek in dejstvo, da je $5a^4 = 1$. Tu je C konstanta, ki je odvisna od a in ε, vendar je za dovolj majhen ε (in mi bomo razmišljali le o takih) njena odvisnost od ε zanemarljiva. Še več, za majhne ε je C zelo blizu realnim številom in lahko privzamemo, da za vsako vrednost parametra a

leži na realni osi[2].

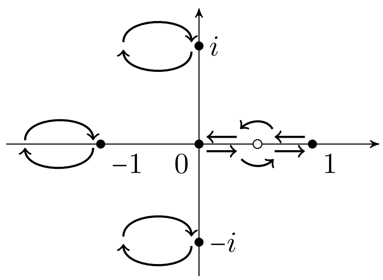
Spomnimo se, da velja $p_{t_1}(a) = 0$ oziroma $a - a^5 = t_1$, torej lahko zgornjo formulo prepišemo v

$$t = t_1 + C\varepsilon^2.$$

Tako smo ugotovili, da je za majhne $\varepsilon \in \mathbb{C}$ točka $a+\varepsilon$ ničla polinoma p_t tedaj, ko se parameter t izraža kot $t = t_1 + C\varepsilon^2$. Opazimo, da je sprememba parametra t (približno) kvadratno odvisna od spremembe ničle $a + \varepsilon$. Drugače povedano, ko parameter t prepotuje krožnico γ_2, število ε^2 obkroži točko 0. Hkrati ničli $x_1(t)$ in $x_5(t)$ polinoma p_t prepotujeta zgolj polovico krožnice okoli točke $x_1(t_1) = x_2(t_1) = a$. To pomeni, da pri obhodu γ_2 s t ničli $x_1(t)$ in $x_5(t)$ zamenjata mesti.

Da dokončamo obhod zanke ℓ_1, mora t še enkrat prepotovati γ_1, a tokrat v nasprotni smeri. Kaj se v tem primeru dogaja z ničlami, že vemo, saj je enako kot v prej obravnavanem primeru, le da se premiki dogajajo v nasprotni smeri.

Povzamemo lahko, da se po potovanju parametra t vzdolž ℓ_1 ničle $x_2(0)$, $x_3(0)$ in $x_4(0)$ vrnejo vsaka nazaj vase, medtem ko se ničli $x_1(0)$ in $x_5(0)$ zamenjata med sabo, torej je $x_1(0) = x_5(1)$ in $x_5(0) = x_1(1)$. Permutacija $\pi(\ell_1)$, ki pripada zanki ℓ_1, je zato transpozicija $(1,5)$.

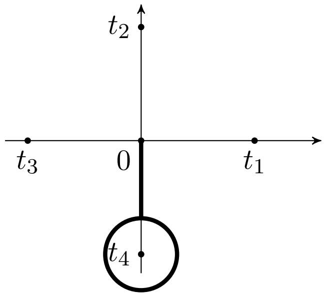


Slika 3. Prikaz potovanja ničel polinoma p_t, ko parameter t preteče zanko ℓ_1, tj. tirnice krivulj $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ in $x_5(t)$. Nevarna točka $a = 5^{-1/4}$ je označena z drobnim belim krogcem na intervalu med točkama 0 in 1.

Naj bodo zdaj ℓ_2, ℓ_3 in ℓ_4 zanke enake oblike kot ℓ_1, le zavrtene okoli izhodišča vsaka za kot $\pi/2$ naprej od prejšnje. Tako je na primer ℓ_4 zanka,

[2] V tem in prejšnjem stavku zanemarjamo odvisnost od »majhnih« količin, kar je pogosta strategija v fizikalnih premislekih, nad katero matematiki načeloma vihajo nos. V danem primeru bi lahko to hevristiko spremenili v povsem rigorozen argument z nekaj ε-δ ocenami in načelom zveznosti. Vendar tako ne bi pridobili globljega razumevanja, temveč bi zgolj v morju tehnikalij utopili nadvse enostavno idejo. Bralec, ki mu ta »fizikalni premislek« ne da miru, pa je toplo vabljen, da sam priskrbi rigorozno neoporečen argument in naj mu bo v uteho, da je bil to tudi avtorjev prvi instinkt.

ki najprej potuje iz točke 0 proti nevarni točki t_4 po negativnem delu imaginarne osi, potem se malo pred točko t_4 ustavi, zakroži okoli nje v pozitivni smeri po krogu z majhnim radijem in se nato po imaginarni osi vrne v 0. Opazimo, da dobimo točke na ℓ_2, ℓ_3 oziroma ℓ_4 tako, da točke na ℓ_1 pomnožimo z i, -1 oziroma $-i$. Iz tega sledi, da lahko iz že preverjenih rezultatov za ℓ_1 dobimo pripadajoče rezultate za ℓ_2, ℓ_3 in ℓ_4 z množenjem z ustreznim številom. Tako vidimo, da tudi tem zankam pripadajo transpozicije in za vse $n = 1, \ldots, 4$ velja $\pi(\ell_n) = (n, 5)$.



Slika 4. Zanka ℓ_4, katere pripadajoča permutacija je $(4, 5)$.

Komutatorji permutacij in zank

V tem razdelku bomo med drugim strnili nekaj standardnih osnovnih algebraičnih dejstev o permutacijah, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Za nekoliko temeljitejšo referenco lahko navedemo [3].

Označimo s Σ_n simetrično grupo, tj. grupo permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Alternirajoča grupa A_n je podgrupa v Σ_n, ki jo sestavljajo vse sode permutacije. Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt transpozicij, sode pa so natanko tiste permutacije, ki sestojijo iz produkta sodo mnogo transpozicij. Obstaja alternativna karakterizacija: sode permutacije so natanko produkti triciklov, tj. permutacij oblike (a, b, c). Res, opazimo, da za vse med seboj različne a, b, c in d velja

$$(a, b)(a, c) = (a, b, c) \quad \text{in} \quad (a, b)(c, d) = (a, d, c)(a, d, b).$$

Ker je vsak produkt para transpozicij ene izmed zgornjih dveh oblik, smo pokazali, da tricikli generirajo alternirajočo grupo.

Spomnimo se, da je komutator permutacij π in σ definiran kot produkt

$$[\pi, \sigma] = \pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}.$$

Očitno je komutator sodih permutacij sod. Abel-Ruffinijev izrek bomo izpeljali iz naslednje opazke:

Trditev 3. *Vsak element grupe* A_n *za* $n \geq 5$ *je mogoče zapisati kot produkt komutatorjev.*

Dokaz. Za poljubne med seboj različne $a, b, c, d, e \in \mathrm{A}_5$ velja

$$[(a,b,c,d,e),(a,c,b)] = (a,b,c,d,e)(a,c,b)(e,d,c,b,a)(b,c,a) = (a,e,c),$$

Opazimo, da je petcikel (a,b,c,d,e) soda permutacija. Ker so bili elementi poljubni, je torej mogoče vsak tricikel zapisati kot produkt komutatorjev sodih permutacij. Zgoraj smo pokazali, da tricikli generirajo A_n, zato enako velja za komutatorje. ∎

Podobno kot lahko med seboj množimo permutacije, lahko to počnemo tudi z zankami. Izberimo neko točko $x \in \mathbb{C}$ in označimo z Ω_x množico vseh zank, ki se začno in končajo v x (ter se, v skladu z dogovorom od prej, izognejo vsem nevarnim točkam; a to ni bistveno). Tedaj lahko definiramo *produkt zank* $\ell, \ell' \in \Omega_x$ kot zanko $\ell\ell' \in \Omega_x$, ki najprej prepotuje ℓ, nato pa še ℓ'. Podobno lahko za poljuben $\ell \in \Omega_x$ definiramo *obrat zanke* $\ell^{-1} \in \Omega_x$, ki ga dobimo tako, da zanko ℓ prepotujemo v nasprotni smeri. Z istim predpisom kot prej lahko definiramo[3] tudi *komutator zank* $\ell, \ell' \in \Omega_x$, torej

$$[\ell, \ell'] = \ell\ell'\ell^{-1}\ell'^{-1}.$$

Pomembno je opaziti, da preslikava $\pi\colon \Omega_0 \to \Sigma_5$ iz prejšnjega razdelka, ki zanki iz izhodišča priredi permutacijo ničel polinoma $p_0(x) = x^5 - x$, spoštuje operacijo produkta. Natančneje to pomeni, da je $\pi(\ell\ell') = \pi(\ell)\pi(\ell')$, kar sledi neposredno iz definicij vseh vpletenih pojmov. Res, $\pi(\ell)$ pusti, da parameter t prepotuje zanko ℓ in nato pogleda, kje so pristale ničle, ter vrne dobljeno permutacijo, nato pa primnoženi $\pi(\ell')$ naredi isto za zanko ℓ', le da začne s postavitvijo ničel, v katerih so se znašle po prepotovanem ℓ. To

[3]Pri tem smo pod preprogo pometli določene tehnične podrobnosti. Če krivuljo pojmujemo kot zvezno preslikavo iz enotskega intervala $[0,1]$, potem bi lahko produkt dveh zank razumeli na veliko različnih načinov, odvisno od tega, kako bi se ga odločili parametrizirati. Ta težava pride posebej do izraza, ko med seboj množimo tri zanke ali več, saj je zanka, ki jo dobimo, močno odvisna od izbire parametrizacije produktov. Vendar to za nas ne bo pomembno; zanke lahko obravnavamo do reparametrizacije natančno, v tem primeru pa je opisani produkt dobro definiran in asociativen. Drugačna pot iz zagate bi lahko bila, da bi poti namesto kot preslikave iz $[0,1]$ obravnavali kot preslikave iz $[0,d]$, kjer je d lahko poljubno pozitivno realno število. Tako bi dobili tako imenovane Moorove zanke in asociativnost produkta poti bi veljala dobesedno.

je očitno povsem enako, kot če bi najprej zaporedoma prepotovali zanki ℓ in ℓ' oziroma produktno zanko $\ell\ell'$ ter šele tedaj pogledali, kje so pristale ničle, kar pa ni nič drugega kakor definicija permutacije $\pi(\ell\ell')$.

S pomočjo te ugotovitve smo sposobni določiti, katere permutacije lahko realiziramo z zankami.

Trditev 4. *Za vsako permutacijo* $\sigma \in \Sigma_5$ *obstaja takšna zanka* $\ell \in \Omega_0$, *da je* $\pi(\ell) = \sigma$.

Dokaz. Denimo najprej, da je $\sigma = (a, b)$ transpozicija. V prejšnjem razdelku smo našli zanke $\ell_1, \ldots, \ell_4$, za katere velja $\pi(\ell_n) = (n, 5)$. Zapišemo lahko

$$(a, b) = (a, 5)(b, 5)(a, 5)$$

in tako ugotovimo, da je $(a, b) = \pi(\ell_a)\pi(\ell_b)\pi(\ell_a)$. Ker π ohranja množenje, je $\sigma = \pi(\ell_a\ell_b\ell_a)$.

Zdaj naj bo σ splošna permutacija. Zapišimo jo kot produkt transpozicij, $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_n$. Za vsak τ_n smo že našli zanko $\ell'_n \in \Omega_0$, za katero velja $\pi(\ell'_n) = \tau_n$. Za iskani ℓ lahko torej vzamemo produktno zanko $\ell'_1 \cdots \ell'_n$, pa bo veljalo $\pi(\ell) = \sigma$. ∎

V resnici smo pokazali še več, kot zahteva trditev: vsako permutacijo $\sigma \in \Sigma_5$ lahko dobimo kot $\pi(\ell)$ za zanko ℓ, ki je končen produkt zank ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 in ℓ_4.

Sedaj ko imamo na voljo trditev 4, je ideja naslednja: predpostavili bomo, da Abel-Ruffinijev izrek ne velja, in izpeljali omejitev na vrsto permutacij, ki jih lahko ustvarimo z zankami. Ker smo zgoraj dokazali, da lahko z zanko induciramo poljubno permutacijo, bo to pokazalo, da je naša predpostavka napačna.

Rešljivost polinomskih enačb v radikalih

Seveda moramo najprej Abel-Ruffinijev izrek sploh natančno formulirati. Da bo to mogoče, se moramo dogovoriti, kaj smo v uvodu razumeli z izjavo »formula, ki bi ničle polinoma izrazila s koeficienti polinoma in bi vsebovala zgolj množenje, seštevanje, potenciranje in korenjenje«. Eno najpreprostejših možnosti, kako lahko to formaliziramo, podaja naslednja definicija:

Definicija 5. Rekli bomo, da je polinomska enačba

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{1}$$

rešljiva v radikalih, če za neki $k \in \mathbb{N}$ obstajajo takšni polinomi (morda v več spremenljivkah) p_j in takšna števila $n_j \in \mathbb{N}$ za $j = 1, 2, \ldots, k$, da med vsemi možnimi vrednostmi spremenljivke y_k, ki ustrezajo sistemu enačb

$$\begin{array}{rcl} y_1^{n_1} & = & p_1(a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ y_2^{n_2} & = & p_2(a_1, a_2, \ldots, a_n, y_1), \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \\ y_k^{n_k} & = & p_k(a_1, a_2, \ldots, a_n, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}), \end{array}$$

nastopajo vse rešitve enačbe (1).

Lahko si mislimo, da definicija rešljivosti v radikalih podaja algoritem, pri katerem moramo na vsaki točki izračunati vrednost nekega polinoma v že izračunanih vrednostih ter vzeti vse možne (kompleksne) korene dobljene vrednosti. Na končnem koraku bomo dobili (med drugim) tudi vse ničle našega prvotnega polinoma.

Denimo, da imamo polinomsko enačbo (1) in vemo, da je rešljiva v radikalih. Oglejmo si, kako iz tega pridelamo formulo za rešitev. Najprej vstavimo koeficiente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v polinom p_1 in dobimo neko kompleksno število. Njegovi n_1-ti koreni so možne vrednosti za y_1. Za vsako izmed možnih vrednosti za y_1 vstavimo to vrednost skupaj s koeficienti polinoma v polinom p_2. Tako dobimo število, katerega n_2-ti koreni so možne vrednosti za y_2. Tako nadaljujemo in na vsakem koraku dobivamo več možnosti. Za y_1 imamo do n_1 vrednosti, za vsako izmed njih imamo do n_2 vrednosti za y_2 in tako naprej. Ko pridemo do k-te stopnje, imamo lahko vse do $n_1 n_2 \cdots n_k$ možnih vrednosti za y_k. Med temi vrednostmi so po predpostavki med drugim tudi vse rešitve enačbe (1). Torej smo s končnim iterativnim procesom, v katerem smo na vsakem koraku zgolj izračunali polinom v prejšnji vrednosti ter koeficientih $a_1, \ldots, a_n$ ter po potrebi korenili, prišli do vseh rešitev dane enačbe.

Z uporabo vektorske oznake $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lahko zapišemo eksplicitno formulo za y_k in tako (med drugim) za vse rešitve enačbe (1) kot

$$y_k = \sqrt[n_k]{p_k\left(\mathbf{a}, \sqrt[n_1]{p_1(\mathbf{a})}, \ldots, \sqrt[n_{k-1}]{p_{k-1}\left(\mathbf{a}, \sqrt[n_1]{p_1(\mathbf{a})}, \ldots, \sqrt[n_{k-2}]{p_{k-2}\left(\mathbf{a}, \sqrt[n_1]{p_1(\mathbf{a})}, \ldots\right)}\right)}\right)}.$$

Pri tem je treba upoštevati, da pri vsakem nastopu korena stopnje d lahko izberemo d različnih vrednosti. Ta pojav večličnosti členov v formuli ni novost; srečali smo ga že v formuli za rešitev kvadratne enačbe, kjer nastopa drugi koren, za katerega lahko izberemo dve različni vrednosti.

Ni nujno, da imamo pri fiksiranem naboru prejšnjih števil $y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}$ za y_j res natanko n_j možnosti. Če je namreč $p_j(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_{j-1}) = 0$, potem je možno edino, da je $y_j = 0$. Iz algebraične zaprtosti kompleksnih števil sledi, da je to tudi edina izjema; če je $p_j(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_{j-1}) \neq 0$, potem obstaja natanko n_j različnih izbir za y_j. Naj bo $y \in \mathbb{C}, y \neq 0$ ena izmed možnih vrednosti za y_j, torej naj velja $y^{n_j} = p_j(a_1, \ldots, a_n, y_1, \ldots, y_{j-1}) \neq 0$. Tedaj so vse druge možne vrednosti za y_j enake

$$y_j = \omega y, \omega^2 y, \ldots, \omega^{n_j - 1} y,$$

kjer je število $\omega = \cos \frac{2\pi}{n_j} + i \sin \frac{2\pi}{n_j}$ primitivni n_j-ti koren enote, tj. velja $\omega^{n_j} = 1$.

Primer 6. Za enačbo oblike

$$x^2 + ax + b = 0$$

je $n_1 = 2$ in $p_1(a, b) = b^2 - 4a$ ter $n_2 = 1$ in $p_2(a, b, x) = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}x$. Drugače povedano, ogledamo si sistem

$$\begin{aligned} y_1^2 &= b^2 - 4a, \\ y_2 &= -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}y_1 \end{aligned}$$

in opazimo, da možni vrednosti za y_2, ki sta oblike

$$y_2 = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a},$$

natanko sovpadata z rešitvijo začetne kvadratne enačbe. Standardna formula za rešitev kvadratne enačbe je torej ekspliciten primer rešitve v radikalih.

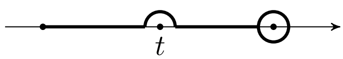
Abel-Ruffinijev izrek

Omejimo se zdaj na družino polinomov p_t iz razdelka Princip zveznosti in nevarne točke. Privzemimo, da je enačba $p_t(x) = 0$ rešljiva v radikalih, tj. da obstajajo polinomi $q_1, \ldots, q_k$ in eksponenti $n_1, \ldots, n_k$, da za sistem enačb

$$\begin{aligned} y_1^{n_1} &= q_1(t), \\ y_2^{n_2} &= q_2(t, y_1), \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ y_k^{n_k} &= q_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}), \end{aligned}$$

vrednosti spremenljivke y_k vsebujejo med drugim vse ničle polinoma p_0. Za dano vrednost t imamo za y_1 natanko n_1 možnosti, če le $q_1(t) \neq 0$. Da bomo to zagotovili, dodajmo vse tiste t, v katerih ima polinom q_1 ničlo, med nevarne točke. Torej bomo brez dvoma imeli n_1 možnosti za x_1. Za vsako izmed teh želimo imeti n_2 izbir za y_2, torej dodajmo med nevarne točke tudi tiste t, v katerih ima ničlo polinom $q_2(t, y_1)$. Tako nadaljujemo in naposled odstranimo vse ničle polinoma $q_k(t, y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ pri vseh možnih naborih $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$. Tako smo množico nevarnih točk morda precej povečali, a za največ končno mnogo točk.

V nadaljevanju bomo po različnih zankah ℓ spreminjali parameter t in opazovali, kako se spreminjajo rešitvene formule. Lahko bi se zbali, da smo na kakšnem koraku med nevarne točke dodali kako točko, ki leži na kateri izmed zank $\ell_1, \dots, \ell_4$. Zdi se, da bi bilo to zelo neprijetno, saj bi se morali odpovedati vsemu, kar smo doslej dokazali, tudi trditvi 4, s katero želimo doseči protislovje. Vendar podrobnejši pogled razkrije, da so težave mnogo manj resne, kot se zdi. Če smo npr. med nevarne točke dodali neki $t \in \gamma_1 \subset \ell_1$, lahko namreč spremenimo definicijo zanke ℓ_1 tako, da je povsod drugje enaka kot prej, le na zelo majhni okolici točke t jo popravimo. Tam, npr. na $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ za $\varepsilon > 0$, z ℓ_1 zapustimo realno os in sledimo polkrogu z radijem ε okoli točke t. Z izbiro dovolj majhnega radija $\varepsilon > 0$ lahko po principu zveznosti zagotovimo, da dokazani rezultati o ℓ_1 ostanejo nespremenjeni. Podobno ravnamo pri vseh nevarnih točkah na ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 in ℓ_4 ter jih nadomestimo z zankami, ki se izognejo vsem nevarnim vrednostim ter za katere sklep trditve 4 še vedno velja. Tu smo na bistven način uporabili dejstvo, da je nevarnih števil zgolj končno mnogo.



Slika 5. Popravljena zanka ℓ_1, če je prej na njej ležala nevarna točka t.

Po principu zveznosti dobimo tako družino zveznih funkcij $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ (enako kot zgoraj lahko med nevarne točke dodamo še vse takšne t, da ima kateri od polinomov q_j tam večkratno ničlo), da so nekatere izmed $n_1 n_2 \cdots n_k$ možnosti za $y_k(t)$ tudi ničle $x_1(t), \dots, x_5(t)$ polinoma p_t. Naj bo $\ell \in \Omega_0$ zanka skozi izhodišče, ki se (po predpostavki) izogne vsem nevarnim točkam. Enako kot ℓ inducira permutacijo na $x_1(0), \dots, x_5(0)$, ta zanka za vsak $j = 1, 2, \dots, k$ inducira tudi permutacijo vseh možnih vrednosti za $y_j(0)$. Dovolili si bomo zlorabo notacije in tudi to permutacijo označili s $\pi(\ell)$, vendar bomo vedno jasno povedali, za permutacijo česa gre.

Trditev 7. *Za vsak par $\ell, \ell' \in \Omega_0$ permutacija $\pi([\ell, \ell'])$ fiksira vse možne vrednosti $y_1(0)$.*

Dokaz. Naj bo $y(t)$ za vsak t ena izmed vrednosti $y_1(t)$. Ker smo zahtevali, da se vse zanke izognejo vsem nevarnim točkam, je $y(t) \neq 0$ in vse druge vrednosti $y_1(t)$ so enake $\omega y(t), \omega^2 y(t), \ldots, \omega^{n_1} y(t)$, kjer je ω kot v prejšnjem razdelku n_1-ti koren enote. Permutacija $\pi(\ell)$ torej slika $y(0)$ v $\omega^s y(0)$ za neki $s \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$. Iz principa zveznosti sledi, da mora potem $\omega^r y(0)$ preslikati v $\omega^{r+s} y(0)$ za vsak r. Enako slika $\pi(\ell')$ element $y(0)$ v $\omega^p y(0)$ in posledično $\omega^r y(0)$ v $\omega^{p+r} y(0)$. Inverzna zanka preslika obratno, torej velja $\pi(\ell^{-1}) : y(0) \mapsto \omega^{-s} y(0)$ in $\pi(\ell'^{-1}) : y(0) \mapsto \omega^{-p} y(0)$. Sledi, da je

$$\pi([\ell, \ell'])(y(0)) = \pi(\ell)\pi(\ell')\pi(\ell^{-1})\pi(\ell'^{-1})(y(0)) = \omega^{s+p-s-p} y(0) = y(0).$$

Ker smo že videli, da je permutacija $\pi([\ell, \ell'])$ enolično določena s tem, kam slika $y(0)$, je $\pi([\ell, \ell']) = \mathrm{id}$ kot permutacija možnih vrednosti za $y_1(0)$. ∎

Analogno z uporabo indukcije dokažemo naslednjo posplošitev:

Trditev 8. *Naj bosta $\ell, \ell' \in \Omega_0$ komutatorja. Tedaj permutacija $\pi([\ell, \ell'])$ fiksira vse $y_2(0)$. Če sta ℓ in ℓ' komutatorja komutatorjev, potem $\pi([\ell, \ell'])$ fiksira tudi vse vrednosti $y_3(0)$ in tako naprej.*

Naposled lahko dokažemo, kar smo se namenili dokazati.

Izrek 9 (Abel-Ruffini). *Ni vsaka polinomska enačba stopnje pet ali več rešljiva v radikalih.*

Dokaz. Če privzamemo, da Abel-Ruffinijev izrek ne velja, potem mora biti vsaka polinomska enačba rešljiva v radikalih, tudi vsaka enačba $p_t(x) = 0$. Privzemimo to in poskusimo poiskati protislovje.

Naj bo $\sigma \in \mathrm{A}_5$ poljubna soda permutacija. Po trditvi 3 lahko zapišemo $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]$ za $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{A}_5$, nato pa lahko trditev 3 spet uporabimo enkrat na σ_1 in enkrat na σ_2. Ta proces lahko ponavljamo v nedogled, na primer k-krat. To pomeni, da lahko σ zapišemo kot komutator komutatorjev komutatorjev in tako naprej k-krat. Po trditvi 4 obstaja pripadajoča zanka $\ell \in \Omega_0$, da je $\pi(\ell) = \sigma$. Iz pravkar povedanega in dejstva, da π nese komutatorje v komutatorje, sledi, da je tudi σ komutator komutatorjev komutatorjev in tako naprej k-krat. To pomeni, da lahko uporabimo trditev 8 in ugotovimo, da je $\pi(\ell)$ identitetna permutacija, če nanjo gledamo kot na permutacijo vseh vrednosti za $y_k(0)$. Po definiciji rešljivosti v radikalih so ničle $x_1(0), \ldots, x_5(0)$ vsebovane med vrednostmi $y_k(0)$ in $\pi(\ell)$ je za oboje definiran na enak način. Torej v A_5 velja $\sigma = \pi(\ell) = \mathrm{id}$. Seveda smo zabredli v protislovje, saj je bila soda permutacija σ poljubna in obstajajo neidentitetne sode permutacije, npr. tricikel. Sledi, da polinomske enačbe $p_t(x) = 0$ ne morejo biti rešljive v radikalih. ■

Sklep

Argument, ki smo si ga ogledali, je sicer strogo gledano pokazal zgolj, da polinomi stopnje pet niso rešljivi v radikalih, a ga ne bi bilo težko prirediti tako, da bi enako dokazali za polinome poljubne višje stopnje $n \geq 5$. Le družino polinomov bi spremenili v

$$p_t(x) = x^n - x + t$$

in namesto štirih zank ℓ_j bi jih imeli $n-1$. Pri tem bi primerne zanke ℓ_j dobili tako, da bi isto zanko ℓ_1, kot smo jo opazovali zdaj, po točkah pomnožili z ω^{j-1}, kjer ω tokrat označuje primitiven $(n-1)$-ti koren enote.

Za polinome stopnje $n < 5$ argument ne deluje. To je smiselno, saj vemo, da so v tem primeru polinomske enačbe rešljive v radikalih. Alternativno lahko vzrok vidimo v tem, da trditev 3 ne velja za grupe $A_1, \ldots, A_4$. V sodobnem jeziku teorije grup rečemo, da so grupe A_n za $n < 5$ rešljive, medtem ko za $n \geq 5$ niso. Med nerešljivimi grupami ima A_5 posebno mesto, saj je najmanjša. Seveda je izraz rešljivost za grupe motiviran prav z Abel-Ruffinijevim izrekom, natančneje z rezultati Galoisove teorije. Več o vsem tem je mogoče najti v [3].

LITERATURA

[1] V. B. Alekseev, *Abel's theorem in problems and solutions, Based on the lectures of Professor V. I. Arnold*, Moscow State University, Moskva, 2004.

[2] D. Fuchs in S. Tabachnikov, *Mathematical omnibus: Thirty lectures on classic mathematics*, [ogled 24. avgust 2015], dostopno na `www.math.psu.edu/tabachni/Books/taba.pdf`.

[3] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1962.

[4] G. Harris in C. Martin, *The roots of a polynomial vary continuously as a function of its coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 390–392.

VERJETNOST, DA URINA KAZALCA OKLEPATA DOLOČEN KOT

LUKA GRAHELJ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 60D05

Opazujmo gibanje urnega in minutnega kazalca analogne ure. Kolikšna je verjetnost, da bosta v naključnem trenutku kazalca oklepala kot, ki je manjši ali enak dani vrednosti? Podrobnejši razmislek o nekoliko nenavadni nalogi iz verjetnosti nas pripelje do presenetljivo preproste rešitve.

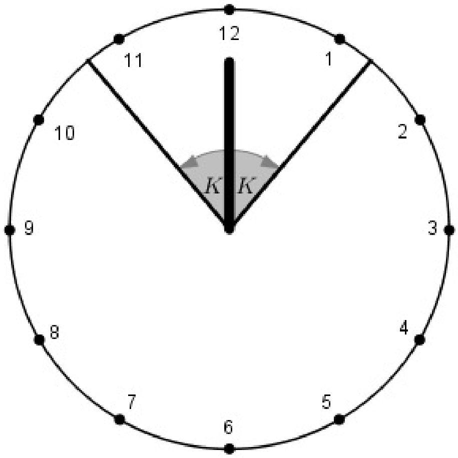
PROBABILITY THAT THE HANDS OF A CLOCK ARE FORMING A SPECIFIED ANGLE

Let us observe the movement of the minute and the hour hand of an analog clock. What is the probability that when looking at it at a random time, they will be forming an angle that is smaller than or equal to a specified size? It turns out this rather nonconventional probability problem has a surprisingly simple solution.

V naključnem trenutku pogledamo na analogno uro. Vprašajmo se, kolikšna je verjetnost, da njena kazalca takrat oklepata kot, ki je manjši ali enak izbrani vrednosti K. Iskana verjetnost navidezno vsebuje elemente pogojnosti, saj se kazalca gibljeta soodvisno: minutni kazalec s štetjem v uri pretečenih minut sorazmerno prispeva k premikanju urnega kazalca od zadnje polne ure proti naslednji. Preden pa se lotimo njenega konkretnega računanja, se za trenutek zadržimo še pri naravi naše spremenljivke »velikost kota«. Kot med kazalcema je zvezna spremenljivka, ki lahko zavzame poljubno vrednost med 0° in 180°. To pomeni, da ugodnih oz. vseh mogočih izidov ne moremo preprosto prešteti – lahko pa primerjamo deleže. Ali bi za začetek znali odgovoriti na vprašanje iz naše naloge v preprostejšem primeru, ko je urni kazalec »zaskočen« na dvanajsti uri, minutni kazalec se pa premika kot običajno? V tem primeru kazalca oklepata ustrezen kot takrat, ko je minutni kazalec od pokončnega položaja v eno ali drugo stran odklonjen za največ kot K. Situacija je ponazorjena na sliki 1.

Iskano verjetnost tako preprosto izračunamo kot delež kroga (merjenega kar s kotom v stopinjah), kjer je minutni kazalec v ugodnih položajih, torej

$$\frac{2K}{360^\circ} = \frac{K}{180^\circ}. \tag{1}$$

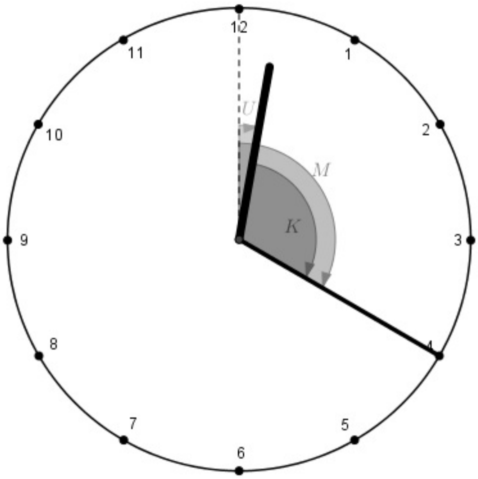


Slika 1. Če urni kazalec miruje v pokončnem položaju, bo minutni kazalec z njim oklepal ustrezen kot takrat, ko bo ležal na osenčenem območju.

Kako pa se izračun spremeni tedaj, ko se kazalca premikata normalno? Čeprav se urni kazalec zdaj premika, je minutni kazalec še vedno tisti, ki je hitrejši, zato bo znova veljalo, da kazalca zahtevan kot oklepata od takrat, ko se minutni kazalec približa urnemu na kot K, do takrat, ko se od njega za enak kot oddalji. Na tem mestu se zato dogovorimo sledeče: ko kazalca oklepata kot, ki je manjši ali enak izbrani vrednosti K, bomo rekli, da *minutni kazalec »prehiteva« urnega.* Verjetnost oklepanja ustreznega kota zato lahko enačimo z verjetnostjo, da minutni kazalec ravno prehiteva urnega.

Če je »pot prehitevanja« pri mirujočem urnem kazalcu znašala $2K$, nas bo v nadaljevanju najprej zanimalo, za koliko se le-ta podaljša tedaj, ko se urni kazalec premika. Situacijo si je najlažje ogledati kar okrog poldneva. Ob dvanajsti uri bosta kazalca točno poravnana, po tem pa hitrejši minutni kazalec pride pred urnega in svojo prednost stalno povečuje, dokler le-ta ne doseže vrednosti K.

S spremenljivkama U oz. M označimo v stopinjah izraženi (pozitivni) odklon urnega oz. minutnega kazalca od navpičnice. S slike 2 vidimo, da na koncu opoldanskega prehitevanja velja zveza $U + K = M$, ki jo z upoštevanjem poznanega razmerja med hitrostma obeh kazalcev prevedemo na enačbo z eno neznanko s končno rešitvijo $M = \frac{12K}{11}$. Ker sta se oba kazalca tudi pred dvanajsto uro premikala z enakima hitrostma, je tudi dohitevanje



Slika 2. Po prehodu dvanajste ure minutni kazalec prehiteva urnega, vse dokler njegova prednost ne doseže vrednosti K.

trajalo popolnoma enako. Celotna (krožna ali kotna) pot prehitevanja (z vidika minutnega kazalca) je torej enaka $2M = \frac{24K}{11}$. Dvanajstkrat počasnejši urni kazalec bo torej med prehitevanjem opravil (krožno ali kotno) pot

$$\frac{2M}{12} = \frac{2K}{11}. \tag{2}$$

Dvanajsta ura seveda ni edina, pri kateri pride do prehitevanja med kazalcema. Ker pa se oba kazalca ves čas gibljeta z enakima hitrostma, prehitevanje traja enako dolgo ne glede na to, kje na številčnici do njega pride. Za popolnejšo sliko »prehitevanj« določimo še njihova točna mesta ter njihovo skupno število v razdobju dvanajstih ur (po tem času se cikel ponovi).

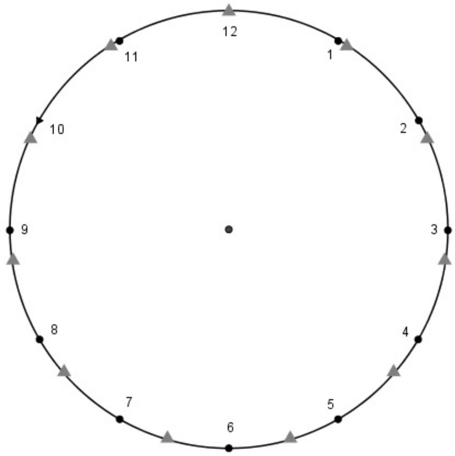
Razmislimo o položaju urnega (U) in minutnega (M) kazalca ob (prvem) prekrivanju po neki izbrani »polni uri« u. Ker se urni kazalec v tekoči uri premakne za dvanajstino toliko kot minutni, dobimo

$$U = u \cdot 30^\circ + \frac{M}{12}.$$

Vemo, da bo ob prekrivanju veljalo $U = M$, iz česar lahko izračunamo

$$U = M = \frac{u \cdot 360^\circ}{11}.$$

Če v izraz vstavljamo zaporedne polne ure u, dobimo točna mesta prekrivanja $P(= U = M)$, ki so predstavljena v tabeli 1 oz. na sliki 3.



Slika 3. Grafični prikaz vseh mest, na katerih se urina kazalca prekrivata.

Polna ura u	**Kot P, pri katerem se kazalca po polni uri u prvič prekrivata**
0	$0°$
1	$\frac{360°}{11}$
2	$\frac{720°}{11}$
...	...
10	$\frac{3600°}{11}$
11	$360° = 0°$

Tabela 1. Koti, ki določajo mesta prekrivanja kazalcev na številčnici.

Med vsakim obhodom urnega kazalca se kazalca torej prekrijeta enajstkrat, zato je v tem času toliko tudi medsebojnih prehitevanj.

Dobljena mesta so torej edina, na katerih bo lahko prišlo do prehitevanja, vendar morata biti za kaj takega tam seveda prisotna oba kazalca hkrati. Premislimo lahko, da bo to veljalo natanko tedaj, ko bo na takem mestu prisoten urni kazalec, saj je z njegovim položajem enolično določen tudi položaj minutnega kazalca. Naš verjetnostni problem se torej prevede na iskanje položajev, v katerih je urni kazalec *prehitevan*.

Čeprav za namene naše prvotne naloge to ni nujno potrebno, poskusimo, če znamo v duhu zgornjega razmisleka trenutni položaj minutnega kazalca ter trenutni kot med kazalcema izraziti s trenutnim položajem urnega kazalca. Z drugimi besedami, položaj minutnega kazalca M in kot med kazalcema poskusimo zapisati kot funkcijo neodvisne spremenljivke U.

Minulo polno uro (pri čemer dvanajsto štejemo za ničto) izračunamo iz spremenljivke U po formuli

$$u = \left\lfloor \frac{U}{30^\circ} \right\rfloor .$$

Od zadnje polne ure se je urni kazalec zasukal za kot

$$U - u \cdot 30^\circ ,$$

minutni pa za

$$M = \frac{U - u \cdot 30^\circ}{30^\circ} \cdot 360^\circ .$$

Razliko med njunima položajema izračunamo kot

$$|M - U| = \left| 11 \cdot U - \left\lfloor \frac{U}{30^\circ} \right\rfloor \cdot 360^\circ \right| ,$$

iz česar končno določimo kot med njima po predpisu

$$\min \left\{ \left| 11 \cdot U - \left\lfloor \frac{U}{30^\circ} \right\rfloor \cdot 360^\circ \right| , 360^\circ - \left| 11 \cdot U - \left\lfloor \frac{U}{30^\circ} \right\rfloor \cdot 360^\circ \right| \right\} .$$

V enačbi (2) smo izračunali, da urni kazalec med posameznim prehitevanjem prepotuje kot $\frac{2K}{11}$. Ker je v dvanajsturnem ciklu enajst prehitevanj, bo skupna pot, ki jo bo urni kazalec opravil med prehitevanji, enaka $2K$. Verjetnost, da bomo ob naključnem pogledu na uro videli kazalca med prehitevanjem (tj. razmaknjena za kot, manjši ali enak vrednosti K), je torej enaka $\frac{2K}{360^\circ} = \frac{K}{180^\circ}$. To je, zanimivo, enaka verjetnost kot v primeru, da bi urni kazalec miroval, kar smo izračunali v enačbi (1).

THOMAS YOUNG IN NJEGOV ZNAMENITI POSKUS

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g, 42.25.Hz, 42.25.Gy

V Wikipediji je pod geslom Thomas Young navedeno (Tony Rothman v delu Everything's Relative and Other Fables from Science and Technology), da obstaja dvom, ali je Young res izvedel svoj znameniti poskus z dvema režama. V članku predstavljam poskuse, narejene doma na Youngov način. Čeprav se sliši neverjetno, da Young svojega znamenitega eksperimenta ne bi tudi postavil, njegova sicer izčrpna dela ta dvom podpirajo.

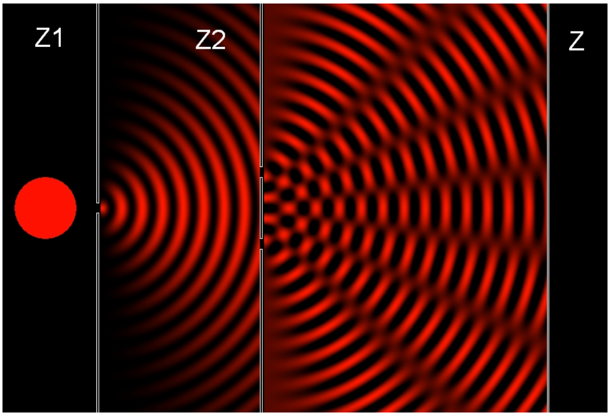
THOMAS YOUNG AND HIS FAMOUS EXPERIMENT

In Wikipedia under entry Thomas Young we find a claim (Tony Rothman in Everything's Relative and the Fables from Science and Technology) that there is no clear evidence that Young actually did the two-slit experiment. In the article we present some experiments made at home in Young's style. Although it seems quite improbable that Young would not perform his famous experiment, his exhaustive works indeed support this claim.

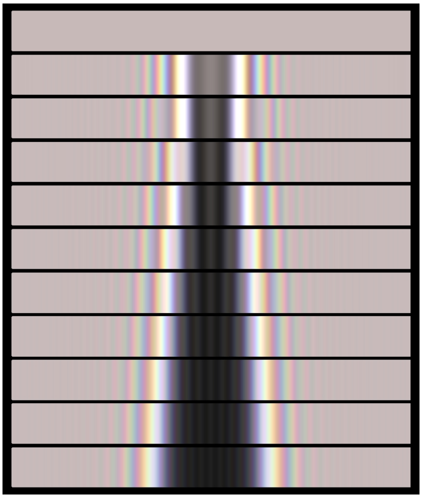
Youngovega poskusa tu ni treba podrobneje opisovati, saj fiziku zadošča že njegova ikona, predstavljena na sliki 1. Torej na kratko: potrebujemo svetilo, ki oddaja monokromatično svetlobo. Zastremo ga z zaslonom (Z1) in skozi drobno navpično režo osvetlimo oddaljen zaslon (Z2) z dvema prav tako navpičnima, a tesno blizu zarezanima ozkima režama. Na oddaljenem zaslonu (Z) vidimo navpične interferenčne proge, neizpodbiten dokaz, da je svetloba valovanje.

Young tega poskusa ni opisal v knjigi z nizom predavanj, ki je izšla leta 1807. Vsi poskusi so v tem delu skrbno oštevilčeni, zato poznavalci menijo, da ni povsem razvidno, da je Young poskus v tej obliki res kdaj naredil. Precej preprostejšo različico pa je prav gotovo izvedel, saj je o njej podrobno poročal v opisu poskusa s številko ena. Na osnovi izida se je trdno postavil na stališče, da je svetloba valovanje. To stališče, ki je danes samoumevno, je bilo v njegovem času prevratniško. Newtonova avtoriteta je takrat že prerasla v mit, njegova slika svetlobe kot roja delcev je bila nedotakljiva. Pri predstavitvi valovne slike svetlobe in poskusov, ki so to sliko podpirali, so Younga v Kraljevi družbi, katere član je bil, malone osmešili.

Potek poskusov je najbolje ponoviti tako, kot jih je opisal sam Young. Pri tem sem pričakoval, da bom nemara naletel na ovire, ki jih tudi Young



Slika 1. Youngov poskus. Reži in valovna dolžina so zaradi preglednosti močno povečane.

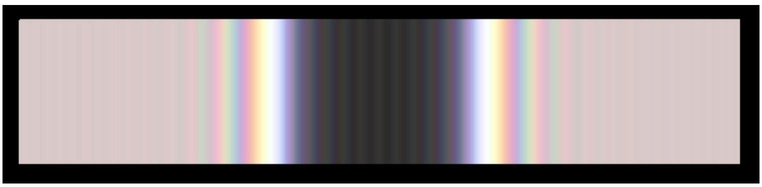


Slika 2. Senca kartic z različno debelino.

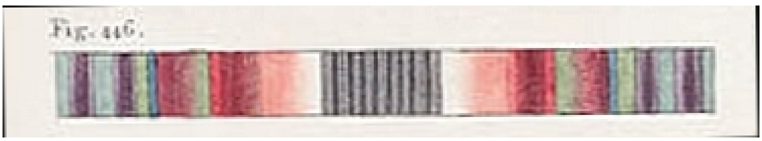
ne bi mogel preskočiti in ki bi upravičile sum, da samega eksperimenta, ki nosi njegovo ime, ni zares izvedel. Na oviro te vrste nisem naletel, res pa je, da terja poskus izdelavo precej ozkih rež. Teh pri poskusih, ki jih je Young podrobno opisal, ni treba izdelati. Celo zimska sončna svetloba je za izvedbo poskusov povsem zadoščala, interferenčne proge so bile pri poskusu z dvema režama dobro vidne. Če Young poskusa res ni naredil, je to pripisati zgolj dejstvu, da z njegovo izvedbo ne bi prav dosti pridobil, saj je dobro vedel, kakšen bo njegov izid.

Preprosta različica poskusa ni terjala izdelave dvojne reže, posrečila pa se je le s sončno svetlobo. Young je uporabil zaslon z drobno luknjico, na katerega je sijalo sonce. V pramen prepuščene svetlobe je postavil kartico z debelino okrog 1 mm (1/30 palca, kot sam poroča v podrobnem opisu poskusa), da je pramen zadel rob in le oplazil njeni površini. Na oddaljeni steni je potem opazoval senco. Poskus je mnogokrat ponovil z ostrinama dveh nožev, ki sta tvorili reže z različnimi širinami, z žico in še z nekim neopredeljenim predmetom.

Na sliki 2 smo izračunali interferenčno sliko ovir z različno debelino – od slike brez ovire (zgornji bel trak), do slike z oviro z debelino 2 mm. Pri zaporednih vmesnih trakovih debelina enakomerno narašča za 0,2 mm. Vidimo, da je v geometrijski senci res moč opaziti šibke interferenčne proge. Te smo lahko posneli tudi s kamero, glej sliko na naslovnici. S slike 2 razberemo dvoje pomembnih lastnosti teh prog. Na pretanki oviri, na primer pri lasu, se pokaže le ena svetla proga, pri predebeli pa so slabo vidne. Pri debelini 2 mm in pri razdalji do zaslona 1 m, je izračunana interferenčna slika posebej prikazana na sliki 3. Youngova slika iz omenjene knjige kaže enako število prog v geometrijski senci, kot smo jih izračunali, glej sliko 4. Ko zastremo pot svetlobi na eni strani ovire, proge seveda izginejo.

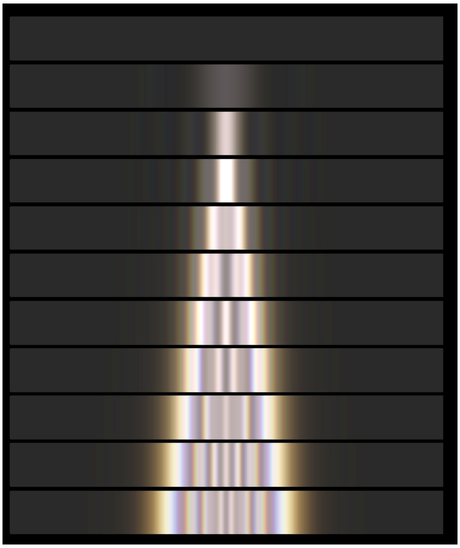


Slika 3. Izračunana interferenčna slika.



Slika 4. Youngova skica interferenčne slike, kot jo najdemo v njegovi knjigi iz leta 1807.

Young omenja poskus z ostrinama nožev, s katerima je oblikoval režo. Slika 5 povzema izračunane interferenčne slike pri režah z različnimi širinami od povsem zaprte reže (temen pas zgoraj) do reže s širino 4 mm. Tudi tu se pojavijo interferenčne črte, iz katerih je sklepal na valovno dolžino svetlobe.

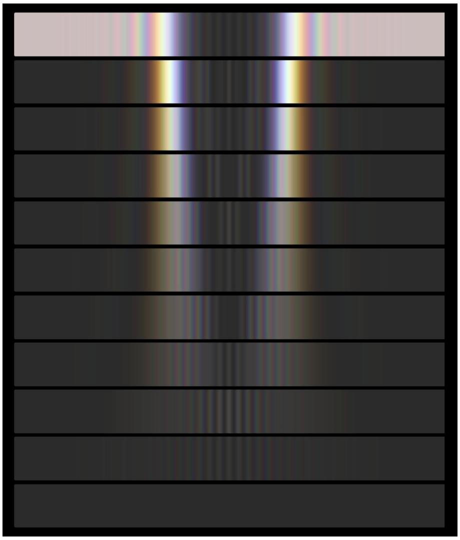


Slika 5. Interferenčne slike širokih rež, ki jih je Young oblikoval z ostrinama dveh nožev.

Poskus je res preprost, zanj zadoščajo stvari, ki so vedno pri roki. To je trdil tudi Young pri svojem predavanju na Kraljevi družbi. Da bi podkrepil valovno sliko svetlobe, je izdelal valovno kad in z njo prikazal interferenčne proge valovanja na vodni gladini. Poskus s svetlobo in prikaz valovanja na vodni gladini pa nista povsem analogna. Pri svetlobi bi se Young moral približati razmeram v valovni kadi tako, da bi naredil poskus, ki ga danes imenujemo Youngov poskus, torej poskus z dvema režama.

Ali ga je res naredil? Seveda Young ni dvomil, kakšen bi bil njegov izid. V zbranih predavanjih s komentarji, ki so izšla leta 1845, šestnajst let po njegovi smrti, najdemo zapis o poskusu z dvojno režo, iz katerega se da razumeti, da je šlo le za miselni poskus. Ali je to res, seveda ne bomo nikoli izvedeli, zanimivo pa je vprašanje, ali je tak poskus prav tako izvedljiv v »domači« postavitvi.

Najprej z računom preverimo, kaj se dogaja, ko h kartici z obeh strani približujemo zaslonki. Na sliki 6 smo prikazali faze takega približevanja od trenutka, ko rež ni (zgornji trak), do trenutka, ko je pot svetlobi do zaslona povsem zaprta (temni trak spodaj). Debelina kartice je tu 2 mm, razdalja do zaslona 1 m, zaslonki pa se zapirata po korakih 0,1 mm. Strah, da se izrazitost interferenčnih prog pri tem drastično zmanjšuje, je neutemeljen. Res je prav obratno – interferenčne proge postajajo vse bolj izrazite do trenutka, ko sta reži tako ozki, da je prepuščene svetlobe preprosto premalo. Čista interferenčna slika pa se pokaže šele proti koncu, ko je vsaka od rež široka le 2 desetinki milimetra. Poskus je bilo torej možno narediti s sredstvi, ki so bila Youngu pri roki, terjal pa je bistveno več priprav v primerjavi s prvotnim poskusom. Young sicer podrobno omenja poskus, kjer je postopoma zapiral pot svetlobi na eni strani ovire. Interferenčni vzorec je izginil šele pri skoraj zaprti poti. A tega poskusa ne moremo šteti za Youngov poskus z dvema režama.



Slika 6. Od ovire do rež.

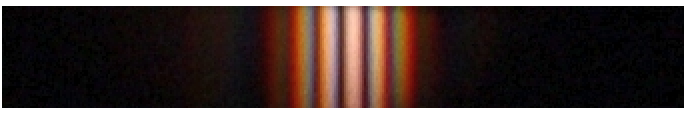
Treba je bilo torej izdelati reži. Drobni odprtinici v zaslonu Z2 verjetno ne bi prepustili dovolj svetlobe, da bi bile interferenčne proge vidne. Še z laserskim kazalnikom prog ni lahko opaziti. Navedba, da je Young tako prišel do prog na zaslonu, gotovo ne drži. Z nekoliko potrpljenja ni težko doma izdelati ustreznih rež. Da sem pridobil izkušnjo o zahtevnosti izdelave, sem lasu z debelino 60 μm z obeh strani približal britvici, da sta bili širini rež enaki debelini lasu. Pri tem sem si moral pomagati z močnejšo lupo. Ustrezna interferenčna slika je v sončni svetlobi zelo izrazita, glej sliko 7.

Izdelava rež bi od Younga torej terjala nekaj spretnosti in potrpežljivosti, saj njuna širina ni smela biti večja od dveh desetink milimetra. Kljub temu da se zdi povsem neverjetno, da tega eksperimentalnega koraka Young ne bi napravil in bi se zadovoljil le z miselnim poskusom, njegova dela ne dajejo nikakršne opore, da je poskus res izvedel. V primerjavi z izredno podrobnim poročanjem o poskusih, ki jih je naredil, o poskusu z dvema režama v delih ne najdemo nikakršnega poročila. Danes se zdi, da bi do ocene o velikosti valovne dolžine mogel priti le na ta način. Za večino avtorjev, ki pišejo o razvoju fizike, je to neizpodbitno dejstvo. Menijo, da je le tako mogel z barvastimi stekli dovolj zanesljivo opazovati razliko interferenčnega vzorca pri rdeči in modri svetlobi in tako priti do za tedanje čase zelo dobrih ocen za njuni valovni dolžini. A pri navajanju tega podatka se Young sklicuje na različne vire, pri čemer ne omenja poskusa z dvojno režo. Pač pa je zelo podrobno analiziral meritve pri ovirah, kjer je tabelarično navedel prav vse podatke o legi zaslonov in o razmikih interferenčnih črt. To je bil en vir podatkov, drugi pa je sledil iz opazovanja Newtonovih kolobarjev.

Še se lahko čudimo: pri poskusu z režama je matematična analiza interferenčne slike, torej zveza med mesti s svetlimi in temnimi progami in valovno dolžino svetlobe, preprosta, pozna jo vsak srednješolec. Ni dvoma, da bi Young lahko zanesljivo določil valovni dolžini rdeče in modre svetlobe prav z merjenjem leg svetlih in temnih interferenčnih prog. A za natančna merjenja ni bilo prav nobene nuje, grobe ocene so povsem zadoščale. Povsem novo je bilo razmerje valovnih dolžin rdeče in vijolične svetlobe, pa tudi rdeče in ultravijolične, ki je bila takrat ravno odkrita. Monokromatičnih virov ni bilo, pri opazovanju je Young uporabljal barvna stekla, katerih prepustnost je določal z belo svetlobo in prizmo.

Trdno podlago za izračun interferenčnih prog za ovirami je podal šele Fresnel, ki je gradil na Youngovih temeljih in Huygensovem principu širjenja valovanja. V tem sestavku sem pri izračunih slik uporabil njegove enačbe.

Torej končajmo z ugotovitvijo, da obstaja dvom, ali je Young res izvedel svoj znameniti poskus. A poskus kljub temu upravičeno imenujemo po njem, saj ga prvi povsem jasno omenja. Zanimivo, da ga tudi Fresnel ni izvedel, raje je uporabil svoj način prikaza interference z dvema zrcaloma. Tako se je izognil dvomom glede učinka ovire na svetlobo, ki je takrat begal poznavalce, predvsem zaradi vpliva tedaj aktualne Newtonove delčne slike.



Slika 7. Interferenčna slika na zaslonu v beli svetlobi z doma narejenima režama.

Da bomo nekoliko bolj na Youngovi strani, si oglejmo izračunano interferenčno sliko bele svetlobe iz dveh zelo ozkih rež, glej sliko 8. Proge so obarvane kot milni mehurčki z nespektralnimi barvami. Kako je Young opisal te barve? Takole: »Ko se srečata dva curka bele svetlobe, pride do interference in iz velike razdalje opazimo nekaj belih in temnih prog, pri podrobnejšem ogledu pa, ker se prekriva neskončno obarvanih prog, vidimo čudovito paleto barvnih odtenkov, ki se prelivajo drug v drugega. Središčna belina se sprva obarva rumenkasto, nato pa v rjavkasto rumeno, ki ji sledi škrlatna barva, potem pa vijolična in modra, ki je iz velike oddaljenosti videti temna; nato zeleni svetlobi sledi temnejši pas škrlatne barve. Naslednji pasovi so bolj ali manj zeleni s temnejšimi škrlatnimi in rožnatimi odtenki. . . «

Ali ta opis ustreza naši sliki? Da! Je torej Young vseeno naredil reži? Podobno prelivanje barv vidimo tudi na robovih senc in pri milnih mehurčkih. Youngov opis barv sega precej daleč od središčne proge, kar lahko opazimo le pri zelo ozkih režah. Te prepuščajo malo svetlobe, kar za opazovanje barv ni ugodno. Torej?

Slika 8. Obarvane interferenčne proge pri Youngovem poskusu z belo svetlobo.

LITERATURA

[1] T. Rothman, *Everything's Relative and Other Fables from Science and Technology*, John Wiley & Sons, 2003.

[2] T. Young, *A Course of Lectures in Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, 1845, dostopno na `books.google.si/books?id=fGMSAAAAIAAJ&pg=RA1-PR29&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false` (tudi preko gesla Thomas Young (scientist) v Wikipediji).

[3] J. Strnad, *Razvoj fizike*, DZS, 2003.

BOJAN MOHAR JE PREJEMNIK EULERJEVE MEDALJE

Bojan Mohar je letošnji prejemnik Eulerjeve medalje – prestižnega mednarodnega priznanja za življenjsko delo na področju kombinatorike. Te medalje od leta 1993 dalje podeljuje znanstvena organizacija »Institute of Combinatorics and its Applications« s sedežem v Kanadi. Vsako leto podeli največ dve medalji. Eden izmed razlogov za poimenovanje medalje po slavnem Leonhardu Eulerju je, da je leta 1736, ko je razrešil problem sedmih königsbergških mostov, zaoral ledino v teorijo grafov, ki je eno osrednjih področij sodobne kombinatorike. In prav teorija grafov je tisto področje matematike, na katerem je prejemnik medalje dosegel najodmevnejše rezultate.

Kolega Mohar je raziskovalno razpet med Kanado, kjer deluje na Simon Fraser University, in med Slovenijo, kjer v okviru programske skupine »Teorija grafov« in projektnih skupin raziskovalno deluje na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko ter na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Iz utemeljitve priznanja za Eulerjevo medaljo povzemimo naslednji navedek: »Izjemno raziskovanje v obdobju treh desetletij Bojana Moharja uvršča med najpomembnejše svetovne diskretne matematike. Njegovi globoki in pomembni prispevki so dramatično izboljšali naše razumevanje strukturnih lastnosti grafov. Njegov opus med drugim obsega topološko teorijo grafov, grafovske minorje, neskončne grafe, spektralno teorijo grafov, algebraično teorijo grafov in računsko geometrijo«. Glede topološke teorije grafov poudarimo, da osrednje sodobno delo te teorije predstavlja monografija »Graphs on Surfaces«, ki jo je leta 2001 Bojan Mohar skupaj s Carstenom Thomassenom izdal pri založbi Johns Hopkins University Press. Prejemnik medalje je trenutno glavni urednik prestižne revije Journal of Combinatorial Theory Series B, hkrati pa tudi glavni urednik za področje teorije grafov pri reviji Electronic Journal of Combinatorics. Leta 1990 je prejel Kidričevo nagrado (sedaj Zoisova nagrada) za vrhunske dosežke pri proučevanju spektralnih lastnosti in izoperimetričnega števila končnih in neskončnih grafov, leta 2009 pa je postal ambasador Republike Slovenije v znanosti.

Podelitev Eulerjeve medalje Bojanu Moharju je novo pomembno priznanje slovenski šoli teorije grafov, katere najvidnejši predstavnik je prav Bojan Mohar. Naša šola teorije grafov je izjemno cenjena in prepoznavna v svetu. V potrditev te trditve naj navedemo le podatek, da je junija 2015 v Kranjski Gori potekala »Osma slovenska konferenca iz teorije grafov«, ki se je je udeležilo 287 udeležencev iz 40 držav in na kateri je bilo izvedenih 247 predavanj. Dogodek je v letu 2015 pomenil največjo in najpomembnejšo svetovno konferenco, posvečeno teoriji grafov, o njej smo podrobneje poročali v 4. številki Obzornika 2015.

Profesorju Moharju iskreno čestitamo ob prejemu Eulerjeve medalje.

Sandi Klavžar

IZREDNI, 69. OBČNI ZBOR DMFA, LJUBLJANA, FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO, 28. 11. 2016

Na 68. rednem občnem zboru 14. 10. 2016 v Mariboru je bil sprejet sklep o dopolnitvi statuta DMFA Slovenije. Razlogi za predlog sprememb so bili:

- zahteva (banke), da se pridobitne dejavnosti opredeli v skladu s standardno klasifikacijo dejavnosti;
- sklep o razširitvi upravnega odbora s predstavnikom študentske sekcije;
- potreba po poenostavitvi sprejemanja *tehničnih pravilnikov*.

Z Upravne enote Ljubljana smo 28. 10. 2016 prejeli obvestilo, da na 68. občnem zboru sprejete spremembe statuta niso povsem v skladu z določbami Zdru-1. Nedvoumno je treba razmejiti dejavnosti, ki jih društvo opravlja na pridobitni podlagi, od tistih, ki jih opravlja na nepridobitni. Neskladna določila pravil društva je treba uskladiti na občnem zboru društva. Rok za uskladitev je bil 45 dni od prejema obvestila.

Dne 8. 11. 2016 je bila na DMFA Slovenije naslovljena pobuda Karin Cvetko Vah in še trinajstih podpisnic za ustanovitev *Odbora za ženske* po zgledu tovrstnih odborov sorodnih društev.

Zato je upravni odbor na svoji redni seji 8. 11. 2016 sprejel naslednje sklepe:

- skliče se izredni, 69. občni zbor društva v ponedeljek, 28. 11. 2016, ob 16.15 na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani;
- občni zbor je namenjen zgolj obravnavi predloga sprememb statuta;
- novemu predlogu sprememb se k z Zdru-1 usklajenim določilom iz prejšnjega predloga dodajo še členi, ki urejajo delovanje Odbora za ženske DMFA.

Izrednega občnega zbora se je udeležilo 40 članov DMFA Slovenije (od tega 6 članov upravnega odbora).

Ker je bilo ob 16.15 prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, je predsednik društva Dragan Mihailović v skladu s 15. členom Pravil DMFA Slovenije odredil čakanje in občni zbor je pričel z delom ob 17.00. Med čakanjem je imel prof. Hiroyuki Yoshida predavanje: *Patterned liquid crystal alignment for the manipulation of colloidal particles and light.*

V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: predsednik Mitja Rosina, člana Maja Remškar in Peter Petek, zapisnikar Janez Krušič, za overovatelja zapisnika pa Marko Razpet in Matjaž Željko.

O predlaganih spremembah statuta je poročal Janez Krušič.

Občni zbor je potrdil predlagane dopolnitve in soglasno sprejel Pravila Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije[1] v taki obliki, kot so objavljena na društveni spletni strani na naslovu: `http://www.dmfa.si/ODrustvu/PravilaDMFA.aspx?id=DMFA`.

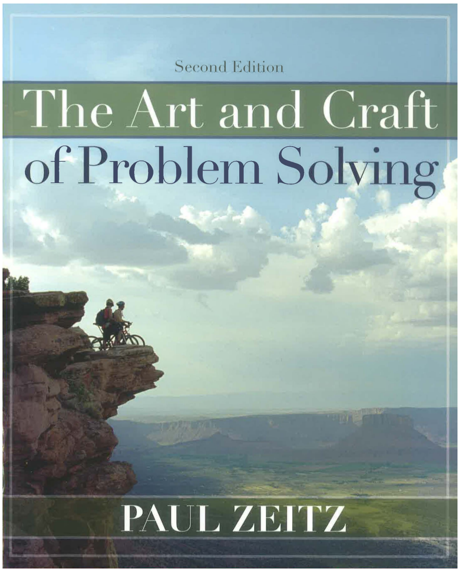
Soglasno je bil sprejet tudi predlog, da je predstavnica Odbora za ženske v upravnem odboru Karin Cvetko Vah.

Občni zbor se je končal ob 17. uri in 20 minut.

Janez Krušič in Nada Razpet

[1] 5. 12. 2016 je društvo prejelo odločbo Upravne enote Ljubljana o registraciji sprememb statuta

Paul Zeitz, The Art and Craft of Problem Solving, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2007, 366 strani.



Knjiga je predvsem namenjena brucem, ki želijo izboljšati svoje sposobnosti reševanja matematičnih problemov, zanimiva pa bo tudi za tekmovalce (srednješolce in študente), pa tudi za vsakega matematika, ki se želi dodatno, bolj sistematično, izpopolniti tudi na tem področju.

Seveda so matematični problemi zelo različnih težavnostnih stopenj, najtežji se celo izmikajo vsem doslej znanim metodam in pristopom, pa vendar je tudi pri najtežjih problemih dobro poznati in upoštevati nekaj osnovnih načel »umetnosti in veščine reševanja problemov«, ki nam pomagajo v raznih fazah reševanja problema.

Ta načela avtor najprej razloži teoretično, v drugem delu knjige pa še ob primerih iz *algebre*, *kombinatorike*, *teorije števil* in *geometrije*. Vsega skupaj je v knjigi obravnavanih 660 problemov.

Svojo teorijo treh ravni reševanja problemov (1. strategija, 2. taktika in 3. uporaba orodij) Zeitz zelo lepo ponazori z *metaforo vzpenjanja na goro*: tako kot se najprej orientiramo po vznožju gore in iščemo možne smeri vzpona, nato se odločimo za določeno smer, nazadnje pa med samim plezanjem premagujemo nekatere konkretne ovire, tako gremo tudi pri reševanju matematičnega problema skozi podobne faze priprave, odločitve za smer in realizacije načrta. *Problem* (za razliko od *vaje* ali *naloge*, ki jo lahko rešimo rutinsko, po znanem protokolu ali algoritmu) zahteva vsaj eno (lahko pa tudi več) *ključnih potez*, s katerimi premagamo ključne ovire danega problema (bodisi plezalnega bodisi matematičnega).

Avtor vpelje tudi klasifikacijo oziroma razdelitev matematičnih problemov na 3×2 razredov: *rekreativni* (razvedrilni), *tekmovalni* in *ohlapno* *definirani* (kjer tudi ni vnaprej povsem jasno, ali sploh imajo rešitev); vsak od teh problemov lahko nastopa v dveh različicah: bodisi kot *problem dokazovanja* ali kot *problem iskanja* (ti dve kategoriji problemov je identificiral že George Polya v znani knjižici *Kako rešujemo matematične probleme*).

Rekreativni problemi (kot jih najdemo npr. v knjigah Martina Gardnerja, dolgoletnega urednika rubirke »*Mathematical Games*« v reviji *Scientific American*), zahtevajo le malo formalnega matematičnega znanja; njihova uspešna rešitev temelji na kreativni uporabi osnovnih strateških načel. So dobra priprava na zahtevnejše matematične probleme. Včasih imajo več kot eno samo rešitev, najti pa jih moramo vse (ali vsaj čim več).

Tekmovalni problemi (v to kategorijo sodijo tudi izpitni problemi) zahtevajo rešitev v okviru določenih časovnih meja, pogosto zahtevajo uporabo posebnih orodij, pa tudi bistrega razmisleka. Rešiti kakšnega od teh zahtevnih problemov je dostikrat težko celo brez časovnih omejitev. Primer takšnega problema z mednarodne matematične olimpijade 1976 je npr.: *Poišči največje naravno število, ki je produkt pozitivnih celih števil, katerih vsota je 1976, in svoj odgovor utemelji.*

Ohlapno definirani problemi (ki jih lahko primerjamo z ekspedicijo v neznano deželo) od reševalca zahtevajo kreativen prispevek v smislu specifikacije problema, saj pri njih ni vnaprej jasno, kaj bomo odkrili. Morda bomo dobili samo delno rešitev. Primer takšnega problema je naslednji: *V Pascalovem trikotniku odkrij čim več vzorcev in relacij ter jih tudi čim več dokaži!* Neizčrpen vir takšnih problemov je tudi Fibonaccijevo zaporedje, definirano z začetnima vrednostma $f_0 = 0$ in $f_1 = 1$ ter z rekurzivno zvezo $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Knjigo, zasnovano tako, da bralcu pomaga simultano študirati dve področji: metodologijo reševanja problemov (poglavja 1–3) in specifične matematične ideje (poglavja 5–9), avtor bralcem svetuje brati »s svinčnikom in papirjem« (torej aktivno reševati probleme) ter na »ne-linearen« način. Vmesno, četrto poglavje je namenjeno nekaterim taktikam (uporabi teorije grafov, kompleksnih števil in rodovnih funkcij), ki povezujejo različne veje matematike. Vsako stran knjige naj bi prebrali vsaj dvakrat in po možnosti rešili vse probleme v njej. Rešitev marsikaterega od njih zahteva veliko mero *ustvarjalnosti* (ki jo avtor definira kot odprtost za nove ideje). Marsikateri problem je mogoče rešiti na več načinov, z uporabo različnih idej.

Čeprav je večina knjige posvečena osvajanju *veščine* reševanja problemov, pa so na koncu vsakega poglavja obravnavani tudi nekateri težji, »klasični« problemi, ki jih začetnik ne bi zmogel rešiti sam (ali vsaj ne v razumnem času). Za te probleme (pri reševanju katerih razlikuje več faz: raziskovanje, delno rešitev in formalno rešitev) avtor meni, da ilustrirajo pomembne ideje in da bi morali soditi v »repertoar« vsakega mladega matematika ter da predstavljajo čudovita umetniška dela, sposobna vzbujati močna estetska doživetja. To svojo misel ponazori z naslednjo lepo primerjavo: reševanje matematičnih problemov ima tudi svojo *umetniško* dimenzijo. Če bi se npr. učili jazzovske improvizacije na klavirju, bi morali vaditi lestvice in se uriti v lastnih improvizacijah, prav tako pa bi potrebovali tudi vodstvo in navdih, ki prihajata iz poslušanja posnetkov igranja mojstrov; na podoben način je nujno, da se umetnosti reševanja problemov učimo tudi s preučevanjem mojstrskih zgledov te umetnosti.

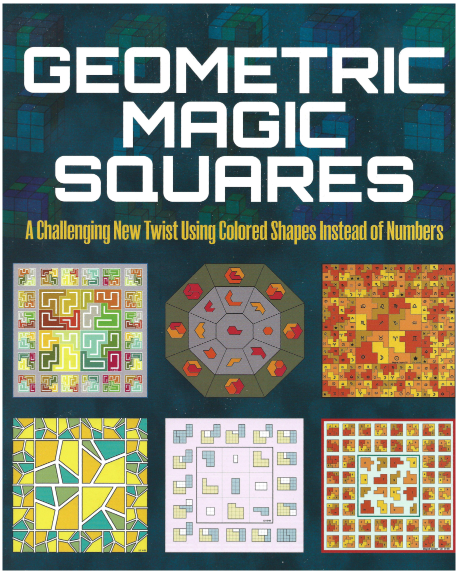
Kdor se – v želji, da kolikor mogoče izpopolni svojo »veščino in umetnost« reševanja matematičnih problemov – zanima ne le za posamezne rešitve problemov, ampak svojo pozornost sistematično namenja tudi spoznavanju različnih metod, bo ob študiju te knjige avtorju hvaležen ne le za opis »univerzalnih« metod, trikov in konceptov, uporabnih na različnih področjih matematike (npr. uporaba simetrij, parnosti, kompleksnih števil, invariant, Dirichletovega načela, risanje slik, poenostavljanje izrazov, definiranje funkcij, ki pomagajo rešiti problem, itd.), ampak tudi za konkretne opise splošne strategije in taktik ter navedbe fundamentalnih izrekov z določenih področij, uporabnih za prav določene vrste problemov (npr. za diofantske enačbe se lahko vprašamo, ali rešitve obstajajo ali ne, ali lahko najdemo vse rešitve itd.). Za probleme v teoriji števil pa avtor priporoča, da začnemo svoje raziskave najprej s primeri, ko so spremenljivke praštevila ali vsaj tuja si števila, saj se da splošni primer pogosto prevesti na praštevilskega le z nekaj »tehničnimi« detajli. Za geometrijske probleme predlaga poleg standardnih trikov (primerjava ploščin, uporaba podobnosti trikotnikov, iskanje pravokotnih trikotnikov, vzporednih premic in konciklčnih točk itd.) tudi vpeljavo »fantomskih točk« (z zaželeno lastnostjo ali lokacijo).

Knjiga je dragocena tudi za učitelje matematike, ki iščejo privlačne probeme, s katerimi bi še bolj motivirali svoje učence.

Priročniki te vrste so vedno koristni.

Jurij Kovič

Lee C. F. Sallows, Geometric Magic Squares, A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2013, jezik angleščina, 135 strani.



Številske magične kvadrate pogosto najdemo v različnih publikacijah. Z njimi se je na primer ukvarjal francoski matematik François Édouard Anatole Lucas (1842–1891), najdemo pa jih tudi na znamenitih stavbah (Sagrada Familia v Barceloni) in na umetniških upodobitvah (Albrecht Dürer na sliki Melanholija iz leta 1514). Manj znani pa so geometrijski magični kvadrati.

Avtor knjige Lee C. F. Sallows, inženir elektronike, je že v času šolanja v Londonu rad prebiral strip za otroke *The Eagle*, ki je prinašal tudi kratke prispevke iz rekreacijske matematike. Že zgodaj je sam sestavljal palindrome, to so besede ali povedi, ki se enako berejo naprej in nazaj. Sestavljal je tudi take magične kvadrate, ki so namesto števil v sredini celic imeli uteži, razporejene tako, da je bil kvadrat, podprt v sredini, v ravnovesju.

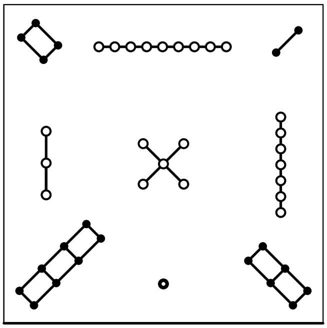
Ko se je pri 26. letih kot inženir elektronike zaposlil na univerzi v Nijmegenu (Nizozemska), je v univerzitetni knjižnici z veseljem prebiral rubriko *Mathematical Games*, ki jo je v reviji *Scientific American* urejal Martin Gardner, in se navdušil nad rekreacijsko matematiko.

Na idejo, da bi sestavil geometrijske magične kvadrate, je prišel že leta 2001. Trajalo je nekaj časa, da je zamisel tudi izpeljal in prve magične kvadrate objavil na spletu. Obisk spletne strani je presegel vsa pričakovanja. Zanimanje zanje so odkrili tudi v reviji *The Mathematical Intelligencer*, in prosili Sallowsa, naj za rubriko *Mathematical Entertainments* napiše nekaj o geometrijskih magičnih kvadratih. Članek je bil objavljen leta 2011 (v četrti številki 23. letnika). Velik odziv na objavljeni članek ga je vzpodbudil k pisanju knjige.

Kaj so geometrijski magični kvadrati (v nadaljevanju GMK)? Navedimo najpreprostejšo definicijo. V celicah magičnega kvadrata so namesto številk črte, geometrijski liki ali telesa razporejeni tako, da iz njih po vrsticah, stolpcih in diagonalah sestavimo nove črte, like ali telesa. Pri manj strogih zahtevah morajo imeti sestavljene črte, liki ali telesa enake dolžine, ploščine oziroma prostornine, kakšen element GMK pa se lahko tudi ponovi. Pri strožjih zahtevah pa morajo biti sestavljene črte, liki oziroma telesa med seboj skladni. Pri tem lahko pri sestavi posamezne elemente zavrtimo, ne smejo pa se prekrivati in se morajo med seboj stikati brez vrzeli. Elementi v posameznih celicah morajo biti različni.

Knjiga je razdeljena na tri poglavja, vsebuje 5 dodatkov, slovar pojmov in seznam literature.

Navadno so elementi, ki jih avtor postavlja v celice kvadratov, narisani na kvadratni mreži, lahko pa tudi na trikotni oziroma šestkotni mreži, tako da lahko hitro izračunamo ustrezne ploščine. Sestavljeni elementi imajo različne oblike: polni kvadrati ali pravokotniki, kvadrati ali pravokotniki z manjkajočimi vogalnimi enotskimi kvadratki ali manjkajočimi kvadratki v samem liku (luknje), lahko so krogi, zvezde itd.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Slika 1. Magični kvadrat »Lo šu« in ustrezni številski magični kvadrat.

Prvo poglavje obravnava kvadrat z devetimi celicami (3×3 kvadrat). Ima 8 podpoglavij. V *uvodu* avtor najprej pove nekaj o zgodovini magičnih kvadratov in prikaže kitajski magični kvadrat »Lo šu« in njegovo *številsko* različico. Sledi geometrijska verzija tega magičnega kvadrata, pri čemer so elementi v celicah ustrezno dolge daljice. Nato na kratko opredeli geometrijski magični kvadrat in uvede kasneje uporabljene pojme. In na koncu pokaže, kako si lahko pri konstrukciji GMK pomagamo z Lucasovo formulo. Kot je razvidno iz tabele 1, moramo le najti tri like (telesa) a, b, c, potem pa narisati ustrezne razlike oziroma vsote vseh treh likov (teles). Pri tem se nam seveda lahko zgodi, da so vsote ploščin (prostornin) v vrsticah oziroma

$c+a$	$c-a-b$	$c+b$
$c-a+b$	c	$c+a-b$
$c-b$	$c+a+b$	$c-a$

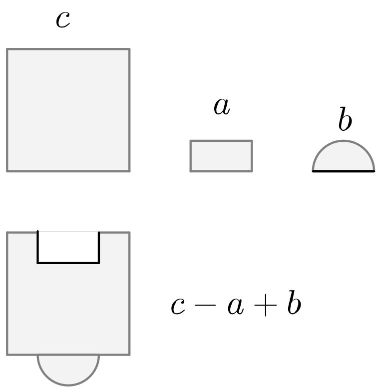


Tabela 1. Lucasova formula za konstrukcijo 3×3 GMK in konstrukcija enega od geometrijskih elementov.

stolpcih enake, nastali liki (telesa) pa med seboj niso skladni. Torej likov (teles) ne moremo povsem poljubno izbirati.

V naslednjih podpoglavjih avtor opiše 5 tipov GMK 3×3, sledijo konstrukcije GMK po zamenjavi številk z ustreznimi geometrijskimi liki. Pri tem pokaže tudi take, ki imajo le 3 različne elemente (trivialni GMK), konstrukcije GMK z računalnikom, pa GMK, katerih elementi se po vrsticah oziroma stolpcih sestavijo v poln kvadrat 4×4 oziroma v kvadrate 4×4, ki jim manjka en enotski kvadrat (ploščina sestavljenega lika je 15 enot). Sledijo GMK, katerih sestavljeni liki so pravokotniki 4×5 in jim manjkata dva enotska kvadratka. Poglavje se konča s posebnimi primeri 3×3 GMK. Mimogrede vmes še razloži, kako si pomagamo s shemami, grafi, grupami pri sestavljanju GMK in kako dobimo GMK, ki ima iste elemente, le drugače razporejene po celicah. Včasih doda tudi, kako izračunamo število možnih GMK iz danih elementov.

Drugo poglavje obravnava GMK 4×4 in ima 10 podpoglavij. Začne se z latinskim križem, ki ima le 4 različne elemente (tabela 2), in ga z dodanima a in b spremeni tako, da imajo vse celice različne elemente.

Obravnava GMK, katerih elementi so sestavljeni iz enotskih kvadratov (pentomini, heksomini), delov krogov, sestavnih delov grba itd., in jih lahko sestavimo s pravilom v tabeli 2. Sledi prikaz 12 tipov Dudeneyevih številskih magičnih kvadratov. Dudeney je znan angleški sestavljalec različnih puzzlov, ki je 1910. leta pokazal, kako 880 magičnih kvadratov s števili 1, 2, 3, . . . , 16 razvrstimo v 12 kategorij.

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

A+a	B-a	C+b	D-b
C-b	D+b	A-a	B+a
D-a	C+a	B-b	A+b
B+b	A-b	D+a	C-a

Tabela 2. Levo: Primer diagonalnega latinskega 4×4 kvadrata. Desno: z dodanima a in b so elementi v celicah različni.

V preostalih podpoglavjih se avtor ukvarja z GMK, pri katerih se lahko elemente med seboj stakne (tako kot pri sestavljanju puzzlov), sledijo kvadrati s krivuljami, ki jih dobi tako, da poveže sredine enotskih kvadratov, ki sestavljajo posamezne elemente. Vedno doda še navodilo, kako izbrati elemente in kako iz njih sestaviti GMK.

Tretje poglavje obravnava posebne kategorije GMK dimenzij $N \times N$, pri čemer je $N = 2, 3, 4$, katerih elementi so sestavljeni iz šestkotnikov, krožnih izsekov, pretrgane verižice biserov ali delov igralnih kart. Zanimivi so tudi GMK, katerih elementi so sestavljeni iz enotskih kvadratov, na katerih so napisane številke. Ko sestavimo elemente po vrsticah (stolpcih), pa je vsota števil po vrsticah (stolpcih) konstantna. V tem poglavju je omenjenih tudi nekaj GMK, ki to pravzaprav niso, saj so elementi razporejeni v trikotnik, šestkotno ali osemkotno zvezdo oziroma so elementi sestavljeni iz enotskih kock itd. Dodana je tudi dovolj obsežna teoretična razlaga, kako sestaviti nove GMK.

V vsakem poglavju najdemo tudi nekaj imen ljudi, ki so se v preteklosti ukvarjali z magičnimi kvadrati, in naslove člankov s podatki, kje so bili objavljeni.

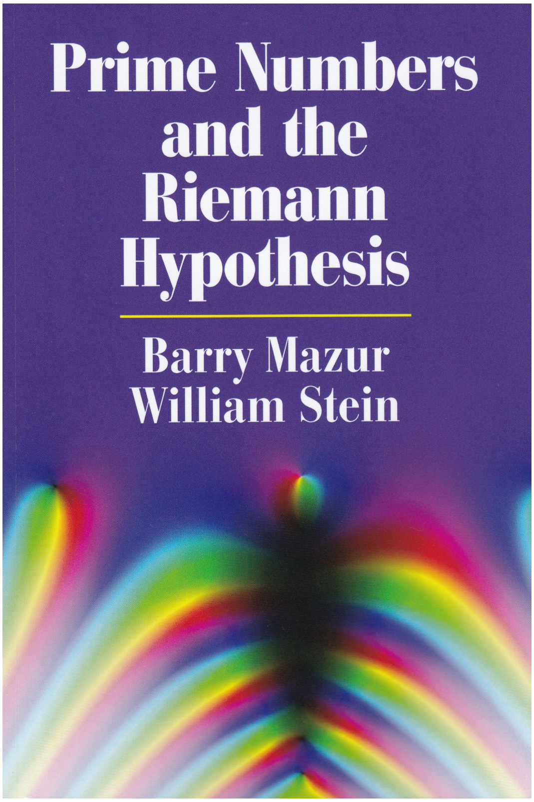
Dodatki so namenjeni tistim, ki jih zanimajo tudi matematične osnove sestavljanja GMK, saj vsebujejo dovolj natančno razložene osnovne uporabljene pojme, navodila za uporabo obrazcev, grafov in tabel in dokaj obširen komentar o magičnem kvadratu »Lo šu« in njegovih posplošitvah.

Knjiga je pregledno oblikovana, napisana je v preprostem in razumljivem jeziku. Kupimo lahko tudi verzijo, ki ima dodane na tršem papirju perforirane elemente za sestavo v knjigi omenjenih magičnih kvadratov.

Knjigo priporočamo vsem ljubiteljem rekreacijske matematike, pa tudi učiteljem kot dodaten vir idej za poučevanje geometrije tako pri rednem kot pri dopolnilnem in dodatnem pouku ter krožkih.

Nada Razpet

Barry Mazur in William Stein, Prime numbers and the Riemann hypothesis, Cambridge University Press, 2016, 142 strani.



Riemannova hipoteza spada med najpomembnejše matematične probleme, po mnenju mnogih je celo najpomembnejši. Zasledimo jo v raznih seznamih odprtih problemov, kot sta npr. Hilbertov in Smaleov. Leta 2000 je bila uvrščena na prestižni seznam *problemov tisočletja* matematičnega inštituta Clay z denarno nagrado milijon ameriških dolarjev. Takšno popularnost Riemannove hipoteze lahko pripišemo njeni odločilni vlogi na najrazličnejših področjih, omenimo samo teorijo števil, kriptografijo in kvantno teorijo polja. Osrednje mesto ima prav v teoriji števil, saj je neposredno povezana s porazdelitvijo praštevil. Razumevanje te povezave zahteva precej orodij iz matematične analize, predvsem kompleksne in Fourierove. Mehko vezana knjižica priznanih matematikov predstavi te ideje z minimalnim številom matematičnih formul in maksimalnim številom barvnih grafičnih prikazov. Toda knjiga ne izgubi ustrezne matematične natančnosti, še več, z nekaterimi opombami na koncu knjige preseneti tudi izkušenega matematika. V tem pogledu se razlikuje od drugih popularnih knjig s podobno tematiko, kar avtorja oznanita že v uvodu. Vendar to ne pomeni, da ni nikjer zgodovinskih opomb, slik pomembnih matematikov ali izsekov iz znamenitih rokopisov. Nasprotno, ti dodatki so natančno premišljeni in lepo zaokrožujejo matematično vsebino. Kljub temu da je knjiga v prvi vrsti namenjena dodiplomskim študentom matematike, bi morda bila zanimiva tudi širšemu krogu naravoslovcev. Primerna je tudi za matematično nadarjene srednješolce in ponuja vrsto idej za izdelavo raziskovalnih nalog ali delo v krožku.

Na kratko preglejmo njeno vsebino. Knjiga se deli na štiri poglavja: *Riemannova hipoteza*, *Distribucije*, *Riemannov spekter praštevil* in *Nazaj k Riemannu*. Na koncu je opremljena še z beležkami, ki zainteresiranemu bralcu pomagajo pri razumevanju zahtevnejših delov knjige, in s stvarnim kazalom. Posebnega poglavja za literaturo ni, so pa reference navedene med samim besedilom. Pogosto so to povezave na spletne strani. Težavnost narašča iz poglavja v poglavje, ki jih povezuje rdeča nit pripovedi, zato preskakovanje razdelkov ni priporočljivo.

Prvo poglavje obravnava praštevila: kaj so praštevila, tehnike iskanja, Mersennova praštevila, iskanje asimptotičnih ocen za število praštevil in praštevilski izrek. Tako spoznamo, da je Riemannova hipoteza pravzaprav vprašanje o oceni razlike med logaritemskim integralom $\mathrm{Li}\,(x) = \int_2^x \mathrm{d}y/\log y$ in številom praštevil $\pi(x)$, ki ne presegajo pozitivnega realnega števila x. Beležka k temu vprašanju nas poduči, da je Riemannova hipoteza ekvivalentna trditvi $|\mathrm{Li}\,(x) - \pi(x)| \leq \sqrt{x}\log x$ za vse $x \geq 2{,}01$. Spoznamo še eno ekvivalentno formulacijo Riemannove hipoteze v jeziku *von Mangoldtove funkcije* Λ. Ta pomembna funkcija, definirana za naravna števila, je različna od nič le pri potencah praštevil, za potenco praštevila p pa je enaka $\log p$. Zadnji razdelki na poljuden način razložijo, zakaj so Fourierove vrste in Fourierove transformacije pomembne. To poglavje bi moralo biti razumljivo vsakemu radovednemu srednješolcu.

Osrednji poglavji tudi po vsebini tvorita jedro knjige in sta morda najzahtevnejši. Drugo poglavje nas poskuša s provokativnim vprašanjem o izračunu odvoda stopničaste funkcije popeljati v teorijo distribucij. Spoznamo Diracovo δ-funkcijo in celo izračunamo njeno Fourierovo transformiranko. Če malo poenostavimo, je osnovna ideja tega dela teorije ta, da sta Diracov glavnik na imaginarnih delih netrivialnih ničel Riemannove funkcije zeta (*Riemannov spekter*) in Diracov glavnik na potencah praštevil povezana preko Fourierove transformacije. Natančneje, v ozadju so razne eksplicitne formule, ki povezujejo netrivialne ničle in von Mangoldtovo funkcijo, kar nam razkrijejo ustrezne opombe na koncu knjige.

Zadnje poglavje je namenjeno vizualizaciji *Riemannove eksplicitne formule*

$$\langle\Pi\rangle^\flat(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \frac{\mu(n)}{n}\left(\mathrm{li}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - \sum_\rho \mathrm{li}\left(x^{\frac{\rho}{n}}\right) + \int_{x^{\frac{1}{n}}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)\,t\log t} - \log 2\right),$$

najpomembnejšega, toda danes že nekoliko pozabljenega Riemannovega prispevka k analitični teoriji števil. Integralni logaritem $\mathrm{li}\,(x) = \int_0^x \mathrm{d}y/\log y$ je za $x > 1$ definiran kot

$$\mathrm{li}\,(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}y}{\log y} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\mathrm{d}y}{\log y}\right)$$

in velja $\mathrm{Li}\,(x) = \mathrm{li}\,(x) - \mathrm{li}\,(2)$. Funkcija $\langle\Pi\rangle^\flat(x)$ šteje praštevila, manjša od x, kjer po dogovoru prištejemo $1/2$, če je x praštevilo. Notranja vsota teče po netrivialnih ničlah ρ Riemannove funkcije zeta. V težnji po aproksimaciji namesto te neskončne vrste vzamemo končno vsoto po ničlah $|\Im\{\rho\}| < T$ za neki $T > 0$. Iz grafov je lepo razvidno, kako se oscilirajoča krivulja z večanjem števila T približuje *praštevilskemu stopnišču*. Zadnja razdelka tega poglavja z bolj standardnim »analitičnim« pogledom razkrijeta »krivca« za prej opisane pojave, torej Riemannovo funkcijo zeta $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ in zvezo

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

obe veljavni za $\Re\{s\} > 1$. Ob koncu knjige se avtorja dotakneta podobnih vprašanj še za druga števila, kot so *Gaussova števila* in pripadajoča praštevila.

Avtorja sta izbrala eksperimentalno pot k temeljnim idejam tega področja, podkrepljeno z numeričnimi izračuni in prikazano na številnih grafih. Grafika je narejena z odprtokodnim programom SageMath, katerega avtor je prav William Stein. Po besedah avtorjev je teorija števil veda, ki lahko ponudi pravi užitek ob numeričnem eksperimentiranju in odkrivanju znanih in neznanih zakonitosti, kar je po zaslugi razvoja računalnikov dostopno praktično vsakomur. Knjiga je tako namenjena kot uvod k samostojnemu raziskovanju prej omenjenih fenomenov.

Aleksander Simonič

Janez Strnad, Mala zgodovina Dopplerjevega pojava, 1. izdaja, DMFA – založništvo, 2017, 120 strani.

Pri založbi DMFA – založništvo je izšla »Mala zgodovina Dopplerjevega pojava«, ki jo je napisal prof. Janez Strnad. Knjiga opisuje Dopplerjev pojav, zgodovinski razvoj, prve poskuse, nasprotovanja in pomisleke stroke ter široko paleto izkoriščanja pojava v tehnologiji.

Dopplerjev pojav je del naših življenjskih izkušenj, čeprav se marsikdo tega niti ne zaveda. Vsakdo je že poslušal avtomobil, kako se njegov zvok iz višjega spremeni v nižjega, ko zapelje mimo in se začne oddaljevati. Pojav v okviru fizike prvič spoznamo v srednji šoli.

Zgodovinski oris v prvem delu knjižice nazorno opiše znanstveno metodo in razvoj poznavanja nekega fizikalnega pojava. Kaže, kako je lahko priznanje stroke zamuden in včasih tudi mučen proces, poln življenjskih zgodb. Pojav je prvič omenil Christian Doppler leta 1842. Zvok in svetlobo so tedaj obravnavali enako, saj so svetlobo imeli za mehanično valovanje etra. Doppler je s pojavom pojasnjeval barvo dvojnih zvezd in nekaterih drugih zvezd, kar se je kasneje izkazalo za napačno. Z vztrajanjem pri razlagi, čeprav so ji nasprotovali že od začetka, si je nakopal vrsto težav.

Eksperimentalno so pojav najprej opazovali pri zvoku. To so bili nerodni in organizacijsko zapleteni poskusi, kjer so sodelovali subjektivni poslušalci, in opis jasno pokaže težave takratnih raziskovalcev z nezanesljivimi načini opazovanja.

V prvem delu knjižice nato sledi opis začetnega razvoja in raziskovalcev, ki so sodelovali pri njem. V glavnem je posvečen zvoku. Pozneje so pojav opazovali tudi pri svetlobi. Dopplerjev pojav pri svetlobi obravnavamo drugače kot pri zvoku. Hitrost svetlobe je veliko večja od hitrosti zvoka, zato je

Dopplerjev pojav pri svetlobi težje opazovati. Opazimo ga npr. po premiku črt v spektru zvezd. Dopplerjevemu pojavu pri svetlobi je posvečen drugi del knjižice.

Dopplerjev pojav uporabljajo v številnih vejah fizike in zunaj nje. Tretji del zajame uporabo Dopplerjevega pojava. Opis vpliva pojava na tehnologijo je obsežen in temeljit. Tako lahko spoznamo, kako celo temeljna znanost sčasoma in z razvojem idej pripelje do množice tehnoloških izboljšav. V astrofiziki je Dopplerjev pojav pripeljal do novih spoznanj. Z delci iz sveta atomov so preizkusili enačbe za Dopplerjev pojav pri svetlobi. Pojav uporabljajo med drugim vremenski in policijski radarji. Z njim merijo tudi hitrost tekočin v toku, na primer hitrost vetra. Izkoriščajo ga tudi pri ultrazvoku v medicini. Z raziskovanjem Dopplerjevega pojava se ukvarjajo še dandanes. Nazadnje knjižica obdela tak primer.

Prvi del je nezahteven in vsebuje malo enačb. Nekaj več enačb je v drugem in tretjem delu. Zahtevnejše je mogoče preskočiti, ne da bi to bralce oviralo pri nadaljnjem branju. Nekatere dele snovi je pisec obdelal tudi v drugih knjižicah in člankih. To kaže, kako so deli fizike med seboj tesno prepleteni. Dopplerjev pojav, ki se je začel z golim razmišljanjem, je povezal dele fizike, pripomogel k razvoju fizike in astrofizike ter poskrbel za številne možnosti za uporabo v njej in zunaj nje. Navedeni viri so dveh vrst. Večina virov navaja originalna dela, preostali pa bralcem omogočajo, da preberejo kaj več tudi v domačih knjigah in revijah, če jih to zanima. Poglavja so odlično grafično podprta.

Menim, da sta vsebina in zasnova knjige dobri in je knjiga primerna za bralce Obzornika.

Knjigo je avtor dokončal v zadnjih tednih svojega življenja, kar kaže njegovo izjemno predanost fiziki.

Omenjeno knjižico lahko kupite pri DMFA – založništvu po ceni 15,50 EUR.

Aleš Mohorič

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2016
Letnik 63, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

Abel-Ruffinijev izrek preko zank in permutacij (Rok Gregorič) 161–174
Verjetnost, da urina kazalca oklepata določen kot (Luka Grahelj) 175–179
Thomas Young in njegov znameniti poskus (Andrej Likar) 180–186

Vesti

Bojan Mohar je prejemnik Eulerjeve medalje (Sandi Klavžar) 187–188
Izredni, 69. občni zbor DMFA (Nada Razpet in Janez Krušič) 188–189

Nove knjige

Paul Zeitz, The Art and Craft of Problem Solving (Jurij Kovič) 190–192
Lee C. F. Sallows, Geometric Magic Squares, A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers (Nada Razpet) . . 193–196
Barry Mazur in William Stein, Prime numbers and the Riemann hypothesis (Aleksander Simonič) 197–199
Janez Strnad, Mala zgodovina Dopplerjevega pojava (Aleš Mohorič) 200–XIX

CONTENTS

Articles **Pages**

The Abel-Ruffini Theorem via Loops and Permutations (Rok Gregorič) 161–174
Probability that the hands of a clock are forming a spacified angle (Luka Grahelj) 175–179
Thomas Young and his famous experiment (Andrej Likar) 180–186
News 187–189
New books 190–XIX

Na naslovnici je posnetek interferenčnih prog na zaslonu v geometrijski senci ovire (glej članek na straneh 180–186).