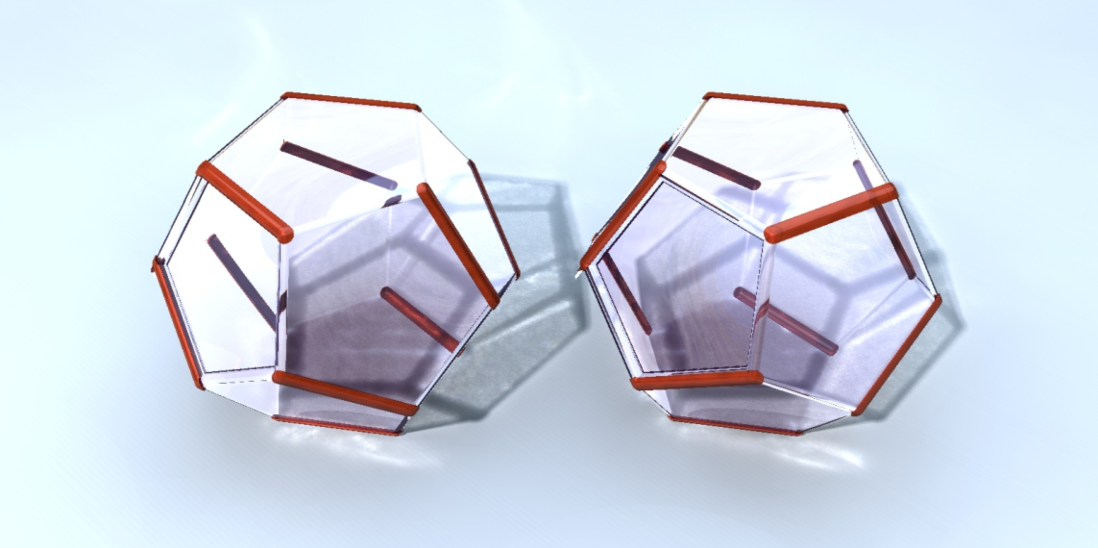
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2020
Letnik 67
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 67 • ŠT. 2 • STR 41-80 • MAREC 2020

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2020, letnik 67, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

PREPOGIBANJE PAPIRJA, PODVOJITEV KOCKE IN SLUSOVA KONHOIDA

MARKO RAZPET IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

S prepogibanjem papirja lahko določimo točko, ki razdeli stranico kvadrata v razmerju $1 : \sqrt[3]{2}$. Ta točka je presečišče stranice kvadrata in Slusove konhoide, ki je tudi nožiščna krivulja parabole.

PAPER FOLDING, DUPLICATION OF CUBE AND CONCHOID OF DE SLUZE

By paper folding we can determine a point that divides the side of a square in ratio $1 : \sqrt[3]{2}$. This point is the intersection of this side and a conchoid of de Sluze which is also the pedal curve of a parabola.

Uvod

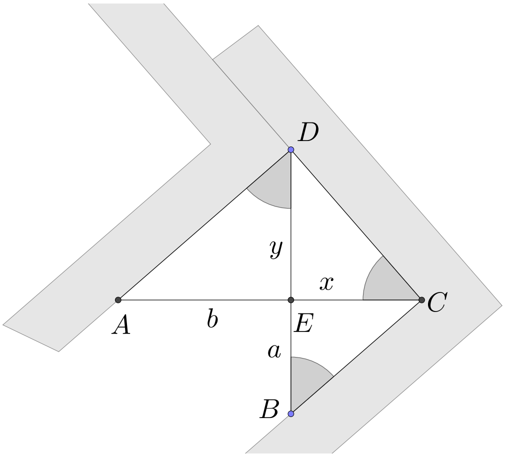
Podvojitev kocke, tretjinjenje kota in kvadratura kroga so trije klasični grški geometrijski problemi, ki se jih ne da rešiti samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, kar so dokazali šele v 19. stoletju. Prvi problem zahteva določiti rob kocke, ki ima prostornino enako dvakratniku prostornine dane kocke. To pomeni, da je treba za dano daljico a konstruirati tako daljico b, za katero je $b = a\sqrt[3]{2}$. Pri drugem problemu je treba dani kot razdeliti na tri enake dele, pri tretjem pa pretvoriti krog v ploščinsko enak kvadrat.

Grki so znali rešiti te tri probleme na poseben način. Problem podvojitve kocke so rešili z Dioklovo cisoido in z uporabo stožnic, kvadraturo kroga z Arhimedovo spiralo ali pa s Hipijevo kvadratriso in tretjinjenje kota z Nikomedovo konhoido. Za risanje nekaterih od teh krivulj so imeli Grki izdelana tudi posebna mehanska orodja.

Poglejmo, kako lahko rešimo problem podvojitve kocke oziroma kako konstruiramo $a\sqrt[3]{2}$ z uporabo dveh kotnikov, kot kaže slika 1. Ustrezno stranico za podvojitev kocke dobimo z višinskim izrekom za pravokotni trikotnik BCD in z razmerjem stranic podobnih trikotnikov AED in CEB:

$$x^2 = ay, \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{b}, \quad ab = xy, \quad x^3 = a^2 b.$$

Če je $b = 2a$, potem je $x = a\sqrt[3]{2}$. To konstrukcijo imenujejo tudi Platonova podvojitev kocke (povzeto po [1]).



Slika 1. Podvojitev kocke z dvema kotnikoma. Če je $b = 2a$, je $x^3 = 2a^3$, torej $x = a\sqrt[3]{2}$.

S prepogibanjem papirja do $\sqrt[3]{2}$

Problem podvojitve kocke pa lahko rešimo tudi s prepogibanjem papirja. Poglejmo, kako to naredimo (več o tem v [2]).

Najprej vzamemo kvadratni list papirja in ga razdelimo na tri skladne dele tako, kot kaže slika 2. Kvadrat najprej prepognemo po navpični simetrali NO, razgrnemo in prepognemo po diagonali DB ter razgrnemo. Nato prepognemo po diagonali NC pravokotnika $NBCO$. Presečišče diagonal NC in DB je točka P.

Naredimo prepogib skozi točko P tako, da točki C in B drsita po vodoravnih stranicah kvadrata. Dobimo pregib GH. Pravokotnik $AGHD$ razpolovimo po njegovi navpični simetrali in dobimo pregib EF. Kvadrat smo s tem razdelili na tri skladne pravokotnike: $AEFD$, $EGHF$ in $GBCH$. To res velja, ker je razdalja točke P od stranice BC (in tudi od AB) enaka $c = a/3$. Da to dokažemo, vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem z izhodiščem v oglišču A, abscisno osjo v smeri stranice AB in ordinatno osjo v smeri stranice AD. Iz slike 2 razberemo enačbi premic skozi D in B ter skozi N in C:

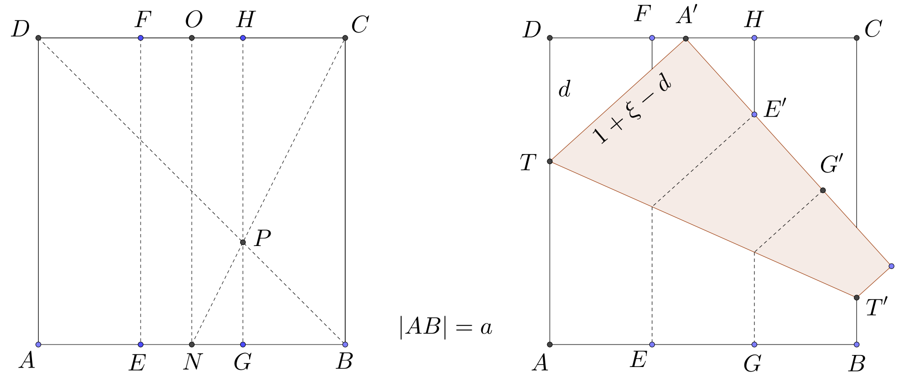
$$x + y = a, \quad y = 2x - a.$$

Njuno presečišče je točka $P(2c, c)$.

Zdaj pa prepognemo kvadrat tako, da pade oglišče A na stranico DC in točka E na daljico GH. Prepogib poteka po daljici TT'. Sliki točk A in

E pri zrcaljenju čez daljico TT' ustrezno imenujemo A' in E'. Trdimo, da tedaj velja $|DA'| : |A'C| = 1 : \sqrt[3]{2}$.

Dokaz ni težak. Da bo hitrejši, vzemimo $|DA'| = 1$, $|TD| = d$ in $|A'C| = \xi$. S tem je stranica kvadrata $a = 1 + \xi$ in $|A'H| = |DC| - |DA'| - |HC| = (2\xi - 1)/3$. Potem veljajo relacije:



Slika 2. Kvadratni list papirja razdelimo na tri skladne dele, potem pa list prepognemo tako, kot kaže desna slika. Velja relacija $|A'C| : |DA'| = \sqrt[3]{2}$.

$$|DA'| = 1, \quad |A'C| = \xi, \quad |A'T| = |AT| = 1 + \xi - d, \quad |A'E'| = \frac{1+\xi}{3}.$$

Iz pravokotnega trikotnika $TA'D$ sledi:

$$d^2 + 1 = (1 + \xi - d)^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\xi^2 + 2\xi}{2\xi + 2}.$$

Iz podobnih trikotnikov DTA' in $HA'E'$ pa dobimo:

$$\frac{d}{1 + \xi - d} = \frac{2\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \frac{\xi^2 + 2\xi}{\xi^2 + 2\xi + 2} = \frac{2\xi - 1}{\xi + 1},$$

$$\xi^3 + 3\xi^2 + 2\xi = 2\xi^3 + 3\xi^2 + 2\xi - 2 \quad \Rightarrow \quad \xi^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt[3]{2}.$$

Torej nam konstrukcija omogoča delitev daljice v razmerju $1 : \sqrt[3]{2}$, pa tudi konstrukcijo daljice dolžine $b = a\sqrt[3]{2}$ za poljubno daljico dolžine a.

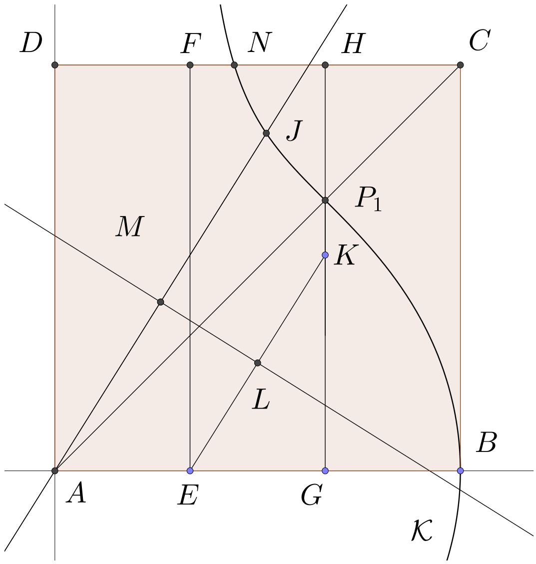
V opisani konstrukciji se število $\sqrt[3]{2}$ pojavi še enkrat. Razmerje med $|GE'| - c$ in c, kjer je $c = a/3$, je

$$\frac{|GE'| - c}{c} = \frac{2\xi^2 + 2}{\xi^2 + 2\xi} = \frac{\xi(2\xi + 2/\xi)}{\xi^2 + 2\xi} = \frac{\xi(2\xi + \xi^2)}{\xi^2 + 2\xi} = \xi.$$

Upoštevali smo zvezo $\xi^3 = 2$ oziroma $2/\xi = \xi^2$. Torej je

$$\frac{|GE'| - c}{c} = \xi = \sqrt[3]{2}.$$

Kako pa tako prepogibanje opišemo analitično? Izračunati moramo koordinati točke A'. Za stranico kvadrata bomo vzeli $a = 3c$, tako da laže kvadrat razdelimo na tri skladne pravokotnike s stranicama a in c (slika 3).



Slika 3. Kvadrat postavimo v prvi kvadrant. Osnovnica kvadrata je $3c$. Ko točka K potuje po premici skozi G in H, točka J opisuje krivuljo $\mathcal{K}$.

Tako kot prej kvadrat $ABCD$ razdelimo z navpičnima daljicama EF in GH na tri skladne dele. Na premici skozi G in H izberemo točko $K(2c, t)$. Središče daljice EK je točka $L(3c/2, t/2)$. Simetrala daljice EK je premica z enačbo

$$y - \frac{t}{2} = -\frac{c}{t}\left(x - \frac{3c}{2}\right). \tag{1}$$

Torej je točka K zrcalna slika točke $E(c, 0)$ prek premice (1). Prek te premice prezrcalimo tudi točko A in njeno sliko imenujmo J. Zrcalni točki K in J ustrezata slikama točk E in A po prepogibanju papirja vzdolž premice (1).

Premica skozi A, na kateri leži točka J, je vzporedna z daljico EK. Torej je njena enačba

$$y = \frac{tx}{c}. \tag{2}$$

Presečišče premic (1) in (2) je točka M. Njeni koordinati sta:

$$x_M = \frac{c(t^2+3c^2)}{2(t^2+c^2)}, \quad y_M = \frac{t(t^2+3c^2)}{2(t^2+c^2)}. \tag{3}$$

Ker je točka M središče daljice AJ, hitro dobimo za točko J koordinati, ki sta dvakratnika koordinat točke M:

$$x_J = \frac{c(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}, \quad y_J = \frac{t(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}. \tag{4}$$

Ko točka K potuje po premici skozi H in G, točka J opisuje krivuljo $\mathcal{K}$, katere parametrični enačbi sta:

$$x = \frac{c(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}, \quad y = \frac{t(t^2+3c^2)}{t^2+c^2}. \tag{5}$$

Hitro najdemo iz enačb (5) asimptoto krivulje $\mathcal{K}$. To je premica $x = c$. Ko namreč $|t|$ narašča prek vseh meja, raste tudi $|y|$ prek vseh meja, x pa se bliža c. Krivulja $\mathcal{K}$ je simetrična glede na stranico AB.

Iz enačb (5) izločimo parameter t, ki mu dovolimo vse realne vrednosti. Ker je v (5) $x \neq 0$, je iz (2) $t = cy/x$, kar vstavimo v prvo enačbo v (5) in dobimo

$$x = \frac{c(3x^2+y^2)}{x^2+y^2}. \tag{6}$$

Našli smo krivuljo z implicitno enačbo

$$x(x^2+y^2) - c(3x^2+y^2) = 0, \tag{7}$$

ki spada v družino *Slusovih*[1] *konhoid*[2]. Splošna Slusova konhoida ima enačbo $x(x^2+y^2) - (\alpha x^2 + \beta y^2) = 0$, kjer sta α in β realni konstanti.

Točka $A(0,0)$ je izolirana točka krivulje (7). Če točko A z nje odstranimo, dobimo krivuljo $\mathcal{K}$.

Kje krivulja $\mathcal{K}$ preseka stranico DC kvadrata $ABCD$? Poiščimo njeno presečišče s stranico CD, to je presečišče s premico $y = 3c$. Iz (7) dobimo za $y = 3c$ kubično enačbo

$$x^3 - 3cx^2 + 9c^2x - 9c^3 = 0,$$

[1]René-François Walter de Sluse (1622–1685), tudi Sluze, latinizirano Renatus Franciscus Slusius, je bil valonski matematik in kanonik.

[2]Iz grške besede *kónche*, kar pomeni školjka.

ki ima edino realno rešitev

$$x_1 = |DN| = c(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = c(\xi^2 - \xi + 1).$$

Dobimo jo s Cardanovimi formulami za korene kubične enačbe. Zato velja $|NC| = 3c - |DN|$. Z upoštevanjem zveze $2/\xi = \xi^2$, dobimo

$$|NC| = c(2+\xi-\xi^2) = c\xi(2/\xi+1-\xi) = c\xi(\xi^2+1-\xi) = |DN|\xi = |DN|\sqrt[3]{2}.$$

Torej točka N deli stranico DC v razmerju $1 : \sqrt[3]{2}$, kar smo želeli pokazati. Za $t = 0$ doseže krivulja $\mathcal{K}$ točko B, kjer ima navpično tangento, točko N in njeno zrcalno sliko N' čez stranico AB pa za $t = \pm c(1 + \xi)$. Za $t = \pm c$ ima krivulja $\mathcal{K}$ prevoja v točkah $P_{1,2}(2c, \pm 2c)$, v katerih sta smerna koeficienta tangent enaka ∓ 1. Prevoj P_1 je v presečišču daljice GH, diagonale AC in konhoide.

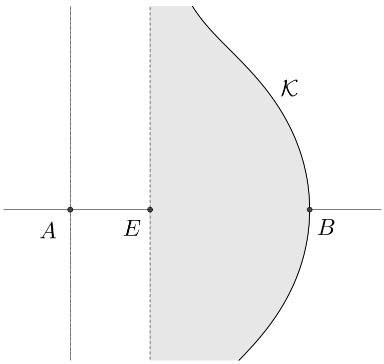
Zapišimo krivuljo $\mathcal{K}$ še v polarni obliki. V ta namen implicitno enačbo (7) preoblikujemo v

$$(x - c)(x^2 + y^2) - 2cx^2 = 0 \tag{8}$$

ter nato z uvedbo polarnih koordinat r in φ v polarno obliko

$$r = c(\sec\varphi + 2\cos\varphi). \tag{9}$$

Pri tem je $\sec\varphi = 1/\cos\varphi$.



Slika 4. Ploščina lika med konhoido in njeno asimptoto je $\pi a^2/3$.

Izračunajmo še ploščino S lika med konhoido (9) in njeno asimptoto $x = c$ (slika 4). Najprej zapišimo

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = c(1 + 2\cos^2\varphi), \\ y &= r\sin\varphi = c(\operatorname{tg}\varphi + \sin 2\varphi), \\ \mathrm{d}x &= -2c\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Ploščina lika je potem

$$S = 2\int_c^{3c} y\,\mathrm{d}x = -4c^2\int_{\pi/2}^{0} (\operatorname{tg}\varphi + \sin 2\varphi)\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 3\pi c^2 = \frac{\pi a^2}{3}.$$

Ploščina lika je torej enaka tretjini ploščine kroga s polmerom a.

Povezava med parabolo in krivuljo $\mathcal{K}$

Nožiščna krivulja dane krivulje $\mathcal{L}$ glede na točko P je, po [3], množica pravokotnih projekcij (nožišč) točke P na vse tangente krivulje $\mathcal{L}$. Dokazali bomo, da je nožiščna krivulja parabole $y^2 = -4c(x-3c)$ glede na oglišče A ravno obravnavana krivulja $\mathcal{K}$. Parabola ima parameter $p = 2c$, gorišče v točki $G(2c, 0)$ in teme v točki $B(3c, 0)$ (slika 5). Najprej v poljubni točki $V(s, 2t)$ parabole konstruiramo tangento. Nato pa spustimo pravokotnico iz točke $A(0,0)$ na to tangento. Dobimo presečišče $T(x,y)$. Ko točka V potuje po paraboli oziroma ko se parameter t spreminja po realnih vrednostih, točka T opisuje krivuljo $\mathcal{K}$ (slika 5).

Ker je za parabolo $y' = -2c/y$, je smerni koeficient tangente na parabolo v točki V enak $-c/t$. Enačba tangente na parabolo v točki $V(s, 2t)$ je:

$$y - 2t = -\frac{c}{t}\left(x - \frac{3c^2 - t^2}{c}\right). \tag{10}$$

Pravokotnica iz točke $A(0,0)$ na tangento pa ima enačbo:

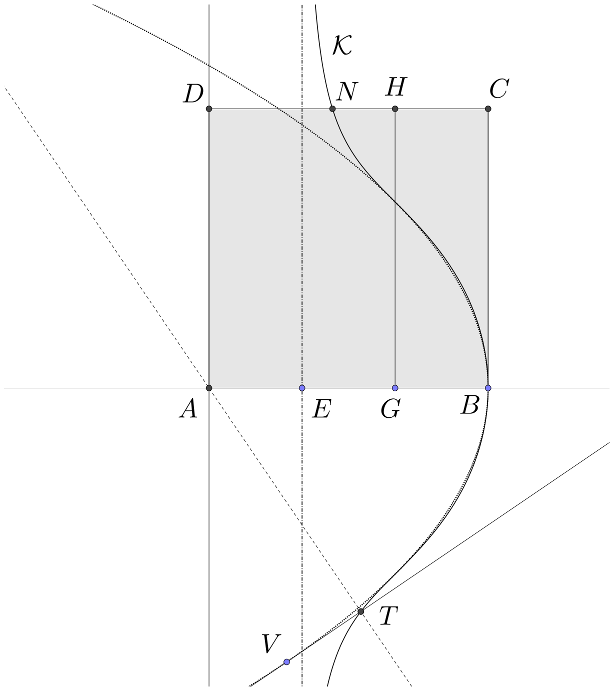
$$y = \frac{tx}{c}. \tag{11}$$

Presečišče premic (10) in (11) je točka T s koordinatama

$$x_T = \frac{c(t^2 + 3c^2)}{t^2 + c^2}, \quad y_T = \frac{t(t^2 + 3c^2)}{t^2 + c^2}. \tag{12}$$

Točka T opisuje krivuljo, ko teče parameter t po realnih vrednostih. Ko primerjamo enačbi (12) z enačbama (5), ugotovimo, da je nožiščna krivulja parabole $y^2 = -4c(x-3c)$ glede na oglišče A krivulja $\mathcal{K}$.

Parabola in krivulja $\mathcal{K}$ imata tri skupne točke: teme $B(3c, 0)$ ter prevoja $P_1(2c, 2c)$ in $P_2(2c, -2c)$. V teh točkah imata $\mathcal{K}$ in parabola skupne tangente.



Slika 5. Ko točka $V(s, 2t)$ potuje po paraboli, točka T opisuje Slusovo konhoido. Nožiščna krivulja parabole je Slusova konhoida.

Inverzija konhoide glede na krožnico

Krožnica naj ima središče v točki $A(0, 0)$ in polmer $a = 3c$. Enačbo krivulje, ki nastane z inverzijo krivulje $\mathcal{K}$ na tej krožnici, dobimo, če izvedemo substitucijo

$$x \to \frac{9c^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y \to \frac{9c^2 y}{x^2 + y^2}$$

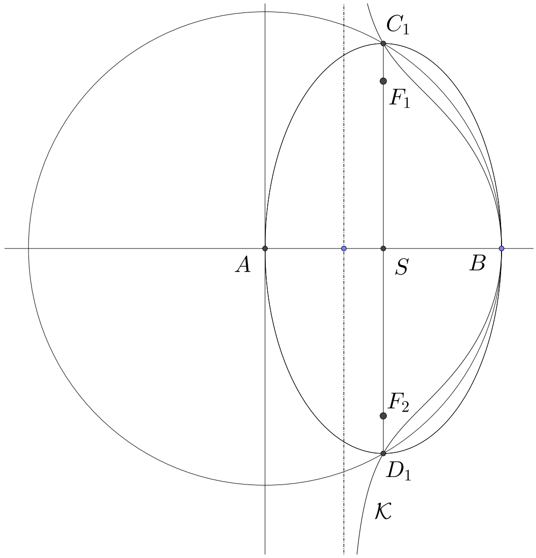
v enačbi (7). Dobimo:

$$3x^2 - 9cx + y^2 = 0. \tag{13}$$

To je enačba elipse, ki je načrtana na sliki 6. Poteka skozi točki A in B. Brez težav poiščemo njeno središče in polosi, če zapišemo enačbo (13) v enakovredni obliki:

$$\left(x - \frac{3c}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{3} = \frac{9c^2}{4}. \tag{14}$$

Središče elipse je točka $S(3c/2, 0)$, polosi pa sta $3c/2$ in $3c\sqrt{3}/2$.



Slika 6. Inverzija Slusove konhoide glede na krožnico je elipsa.

Elipsa, krožnica in konhoida imajo tri skupne točke. To so $C_1(3c/2, 3c\sqrt{3}/2)$, $D_1(3c/2, -3c\sqrt{3}/2)$ in $B(3c, 0)$. Gorišči elipse sta v točkah $F_1(3c/2, 3c\sqrt{2}/2)$ in $F_2(3c/2, -3c\sqrt{2}/2)$.

Slusova konhoida in zlati pravokotnik

Poiščimo presečišče krivulje $\mathcal{K}$ s premico $x = 4c/3$. V kvadratu $ABCD$ dobimo točko $F(4c/3, 4c\sqrt{5}/3)$ (slika 7).

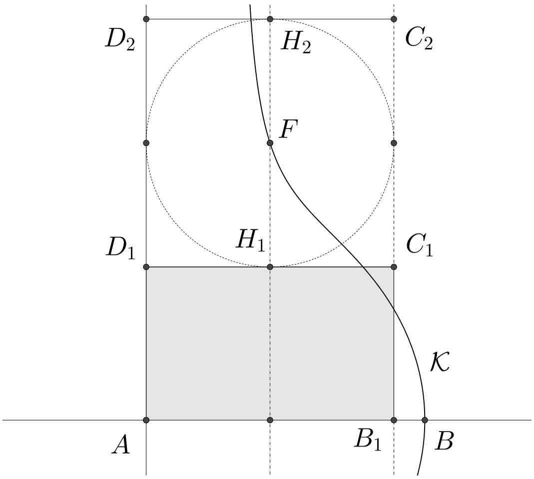
Narišemo krožnico s središčem v F in polmerom $4c/3$. Presečišči krožnice in premice $x = 4c/3$ sta točki $H_1(4c/3, 4c(\sqrt{5}-1)/3)$ in $H_2(4c/3, 4c(\sqrt{5}+1)/3)$. Krožnici očrtamo kvadrat $D_1C_1C_2D_2$, ki ima za eno simetralo premico $x = 4c/3$. Pravokotnik $AB_1C_1D_1$ ima torej stranici

$$|AB_1| = \frac{8c}{3}, \quad |AD_1| = \frac{4c}{3}(\sqrt{5}-1),$$

ki sta v razmerju

$$\frac{|AB_1|}{|AD_1|} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

to se pravi v zlatem razmerju. Zato je štirikotnik $AB_1C_1D_1$ zlati pravokotnik. Prav tako je zlati pravokotnik štirikotnik $AB_1C_2D_2$.



Slika 7. Točka $F(4c/3, 4c\sqrt{5}/3)$ leži na konhoidi. Štirikotnika $AB_1C_1D_1$ in $AB_1C_2D_2$ sta zlata pravokotnika.

Načrtovanje Slusove konhoide po točkah

Za konec si oglejmo, kako pridemo do konhoide z načrtovanjem po točkah. Pri tem nam pomaga polarna oblika (9), če jo zapišemo v obliki

$$r = c\sec\varphi + 2c\cos\varphi.$$

Prvi člen

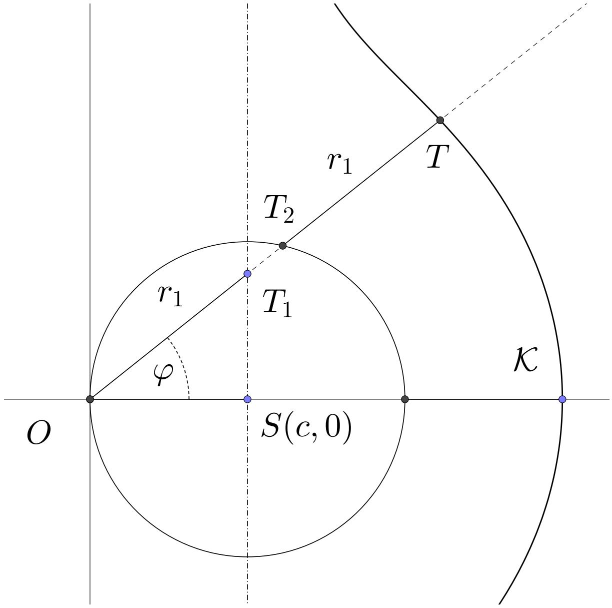
$$r_1 = c\sec\varphi$$

je enačba premice $x = c$ v polarni obliki, drugi člen

$$r_2 = 2c\cos\varphi$$

pa polarna oblika krožnice $(x-c)^2 + y^2 = c^2$. To pomeni, da je Slusova konhoida na neki način vsota premice in krožnice, kar omogoča njeno načrtovanje po točkah.

V ta namen najprej narišemo krožnico s središčem v točki $S(c, 0)$ in polmerom c ter pravokotnico skozi njeno središče na izbrani premer. Iz krajišča premera $O(0, 0)$ narišemo poltrak pod nekim kotom φ glede na premer. Poiščemo presečišči T_1 in T_2 poltraka s pravokotnico skozi središče krožnice in s krožnico. Nato pa daljico $r_2 = |OT_2|$ podaljšamo z daljico $r_1 = |OT_1|$, tako da dobimo daljico $|OT| = r_1 + r_2$ (slika 8). Točka T je na Slusovi konhoidi. Konstrukcijo ponovimo za več kotov φ in dobljene točke s krivuljnikom povežemo v krivuljo.



Slika 8. Risanje Slusove konhoide po točkah.

Za konec

Od prepogibanja papirja smo prišli do krivulje $\mathcal{K}$, ki ima zanimive lastnosti. Z računanjem se nam ni treba posebej ukvarjati, če imamo na voljo katerega izmed programov za dinamično geometrijo in morda še Derive ali Mathematico, ki hitro rešujeta sisteme enačb in poenostavljata marsikateri izračun. Skoraj vse naštete probleme lahko rešijo srednješolci, saj zahtevajo le osnovna znanja iz geometrije in algebre.

LITERATURA

[1] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, Springer, New York in drugje, 1998.

[2] T. Hull, *Project Origami*, Activities for Exploring Mathematics, Second Edition, CRC Press, 2013.

[3] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

POPOLNA PRIREJANJA PO PRAVILNIH POLIEDRIH

SIMON ČOPAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Ključne besede: popolno prirejanje, pravilni poliedri, teorija grafov, točkovne grupe

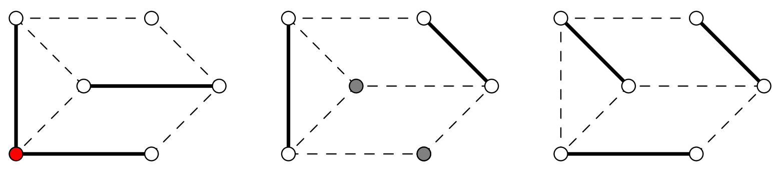
Popolno prirejanje oziroma 1-faktor grafa je razdelitev sosednjih vozlišč grafa v pare, tako da vsako vozlišče uporabimo natanko enkrat, če taka razdelitev sploh obstaja. Ogledali si bomo popolna prirejanja na pravilnih poliedrih ter raziskali število takih prirejanj in njihove simetrije.

PERFECT MATCHING ON REGULAR POLYHEDRA

A perfect matching, or a 1-factor of a graph, is a partitioning of neighbouring graph vertices into pairs, such that each vertex is only used once. We will look into perfect matching of vertices on regular polyhedra and investigate the number of such matchings and their symmetries.

Uvod

Za motivacijo si oglejmo dodekaedra s pobarvanimi robovi na sliki na naslovnici. Sta enaka, le drugače zasukana, ali sta mogoče različna? Na koliko načinov lahko pobarvamo robove, da vsako oglišče pripada natanko enemu pobarvanemu robu? Takšna vprašanja so si zastavljali kemiki pri raziskovanju zgradbe benzena [5], splošnih aromatskih spojin [7] in fulerenov. Ogljikovi atomi so 4-valentni, in če so vezani na tri druge atome, je le ena izmed vezi lahko dvojna. Razporeditvam dvojnih vezi pravimo Kekulejeve[1] strukture [2, 1, 4].



Slika 1. Trije nabori povezav istega grafa. Povezave (a) ne predstavljajo prirejanja, saj je rdeče vozlišče povezano dvakrat. Prirejanje (b) ni popolno, saj sivi vozlišči nista del povezave. Povezave (c) so primer popolnega prirejanja.

[1] Friedrich August Kekulé (1829–1896), nemški kemik

V kontekstu teorije grafov take strukture ustrezajo popolnim prirejanjem [6]. Prirejanje je vsaka razdelitev vozlišč grafa v povezane pare brez skupnih vozlišč. Prirejanje je popolno, če nobeno vozlišče ne ostane nepovezano (glej sliko 1). Na poliedru si iskanje popolnega prirejanja lahko nazorno predstavljamo z izbiranjem povezav med oglišči. V posplošenem smislu bomo iskali tudi popolna prirejanja grafa, ki sestoji iz robov poliedra ter diagonal njegovih ploskev, kar bomo imenovali *ploskovno popolno prirejanje*.

Poliedri niso abstraktni grafi, ki bi vsebovali le informacijo o povezanosti vozlišč, temveč so vpeti v tridimenzionalni prostor in nosijo različne rotacijske simetrije. S simetrijami se ukvarja teorija grup, ki nam daje orodja za opis simetrijskih lastnosti.

Preštevanje in klasifikacija vseh popolnih prirejanj grafa je zahtevno kombinatorično vprašanje. V nadaljevanju si bomo ogledali algoritem za sistematično številčenje in popis različnih popolnih prirejanj na platonskih telesih ter na prisekanem ikozaedru.

Algoritem za številčenje

Popolna prirejanja za izbrani polieder bomo iskali v dveh korakih. V prvem koraku bomo poiskali vsa veljavna popolna prirejanja poliedru prirejenega grafa, ne glede na simetrije. V drugem koraku bomo odstranili prirejanja, ki so podvojena, le različno zasukana.

Za opis prirejanj oglišča označimo s števili od 1 do n. Robovi poliedra so predstavljeni z neurejenimi pari števil, množica vseh robov pa določa graf poliedra. V prirejanju vrstni red parov ni pomemben, prav tako ni pomemben vrstni red oglišč v paru. Da prirejanj ne štejemo večkrat, jih označimo tako, da sta oznaki v vsakem paru urejeni po velikosti, pari med seboj pa po velikosti prve oznake v paru.

Za poln graf (graf, ki ima vsa vozlišča povezana med seboj) je torej prvo vozlišče prvega para vedno 1, drugo izbiramo med preostalimi $n-1$, tretje je spet enolično določeno kot najmanjše izmed preostalih, sledi izbira med $n-3$ ostalimi in tako naprej, kar nas privede do $(n-1)!!$ možnih prirejanj.

Z izjemo tetraedra poliedri niso polni grafi, zato ni vsaka na zgornji način izbrana povezava del grafa. Prirejanja gradimo s postopnim dodajanjem parov vozlišč obstoječim delnim prirejanjem, pri čemer za vsako dodano povezavo sproti preverimo, ali je del grafa. Za grafe poliedrov, ki imajo sorazmerno malo povezav, to močno zmanjša računsko zahtevnost v primerjavi s preverjanjem vseh $(n-1)!!$ množic parov vozlišč. Še vedno pa je delnih prirejanj, ki jih moramo preveriti v vmesnih korakih, več kot na koncu dobljenih popolnih prirejanj. Pri nekaterih delnih prirejanjih, šele ko poskusimo dodati zadnji par vozlišč, ugotovimo, da se ne izide. Maksimalno število delnih prirejanj je zaradi porabe spomina in časovne zahtevnosti ozko grlo algoritma.

Sledi minimalna koda v Pythonu, ki vrne seznam vseh popolnih prirejanj za poljuben graf, podan z množico povezav v obliki parov vozlišč. Oznake vozlišč za graf oktaedra, podan v kodi, so prikazane na sliki 2.

```
# vrača seznam prirejanj iz podanega prirejanja z dodanim parom
def dodaj_rob(prirejanje, n, robovi):
    # poiščemo vozlišča, ki jih še nismo uporabili
    ostali=[ i for i in range(1,n+1) if i not in prirejanje ]
    # dodamo par na vse možne načine,
    # ki so med dovoljenimi robovi
    return [ prirejanje + [ostali[0],i]
             for i in ostali[1:] if (ostali[0],i) in robovi ]

def poisci_prirejanja(n, robovi):
    # začnemo s seznamom enega praznega prirejanja
    prirejanja = [ [] ]
    # dodajamo pare postopoma, potrebujemo n/2 parov
    for _ in range(n//2):
        # p teče po starih prirejanjih
        # q teče po novih z dodanim enim parom
        prirejanja = [ q for p in prirejanja
                       for q in dodaj_rob(p, n, robovi) ]
    return prirejanja

# primer klica za oktaeder (oznake v sliki 2)
robovi={(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,5),
        (2,6),(3,4),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)}
poisci_prirejanja(6,robovi)
```

Prirejanja, ki jih simetrijske operacije poliedra preslikajo drugo v drugega, štejemo v isti ekvivalenčni razred. Simetrijske preslikave pravilnih poliedrov sestavljajo točkovno grupo G_0, popolna prirejanja pa imajo praviloma nižjo simetrijo – eno izmed podgrup $G \subset G_0$ simetrijske grupe prvotnega poliedra. Enoličnost oštevilčenja zagotovimo tako, da na vsakem prirejanju uporabimo vse preslikave iz simetrijske grupe G_0 prvotnega poliedra, ter izberemo oštevilčenje z leksikografsko najnižjo vrednostjo. Hkrati zabeležimo vse preslikave, ki prirejanje preslikajo samo vase, s čimer dobimo simetrijsko grupo posameznega prirejanja G. Red podgrupe $|G|$ nam pove število nerazločljivih orientacij prirejanja, kvocient $|G_0|/|G|$ pa govori o številu *različnih* orientacij vsakega prirejanja.

Pomembna je tudi kiralnost oziroma simetričnost na neprave rotacije. Zrcaljenja ne moremo izvesti s fizično rotacijo v prostoru, zato prirejanja, ki niso ekvivalentna svoji zrcalni sliki, nastopajo v zrcalnih parih. Simetrijo tistih prirejanj, ki so ekvivalentna svoji zrcalni sliki, opisujejo grupe rotacij z zrcaljenji, ki imajo dvakrat večji red kot pripadajoča grupa pravih rotacij. Grupe z nepravimi rotacijami bomo označevali z G^*.

Ko ogliščem priredimo oznake, lahko simetrijske operacije, v tem primeru prave rotacije in rotacije z zrcaljenjem, predstavimo z bijektivnimi preslikavami med oznakami. Preslikava $\{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4\}$ na primer predstavlja rotacijo tetraedra za $120°$ okrog oglišča 4. Ročno generiranje preslikav bi bilo dolgotrajno, predvsem za grupo simetrij ikozaedra, ki ima 60 elementov. Dovolj je, da določimo preslikavi za generatorja grupe. Celotno grupo potem dobimo tako, da z generatorji delujemo na že znane elemente grupe, vse dokler postopek ne privede do nobenega novega elementa več.

Zaradi večje kompleksnosti implementacijo simetrijskega koraka prepustimo bralcu.

Tetraeder, oktaeder in ikozaeder

Najenostavnejši polieder v treh dimenzijah je simpleks – tetraeder. V dogovorjenem oštevilčenju obstajajo le tri različna popolna prirejanja,

$$(1,2)(3,4) \quad (1,3)(2,4) \quad (1,4)(2,3),$$

ki jih z rotacijami lahko preslikamo drug v drugega. Za tetraeder je enolično oštevilčenje edinega stanja $(1,2)(3,4)$, z diedrsko simetrijsko grupo D_{2d}, ki ima red 8 (4 brez zrcaljenj).

Za graf oktaedra, ki ima 6 vozlišč, dobimo 8 popolnih prirejanj. Rotacije iz simetrijske grupe oktaedra pokažejo, da imamo le dve različni stanji, $(1,2)(3,4)(5,6)$ ter $(1,2)(3,6)(4,5)$ (za oznake oglišč glej sliko 2), ki sestavljata zrcalni par. Stanji imata diedrsko simetrijo D_3 reda 6.

Zadnji izmed trikotniških platonskih poliedrov je ikozaeder, ki ima 12 oglišč. Opisani algoritem obišče maksimalno 273 delnih prirejanj, na koncu pa dobimo 125 veljavnih popolnih prirejanj, kar je občutno manj od $11!! = 10395$ »surovih« oštevilčenj, ki bi jih dobili s slepim pregledom vseh možnih množic parov oglišč.

Simetrijska grupa ikozaedra vsebuje 60 rotacij. Po eliminaciji simetrijsko identičnih prirejanj na ikozaedru jih ostane 8: trije zrcalni pari in dve prirejanji, ki sta sami po sebi zrcalno simetrični. V tabeli 1 so zbrana vsa popolna prirejanja skupaj s podatki o simetriji.

Nobeno izmed popolnih prirejanj ne ohrani polne ikozaedrične simetrije. Najbolj simetrično stanje, prvo v tabeli 1, ima simetrijo tetraedra in spomni na konstrukcijo ikozaedra iz treh medsebojno pravokotnih zlatih pravokotnikov.

Če moč grupe poliedra, v tem primeru je to grupa ikozaedra, delimo z močjo njene podgrupe, ki opisuje simetrijo posameznega prirejanja, dobimo

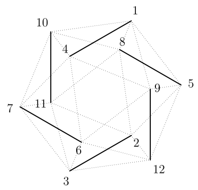
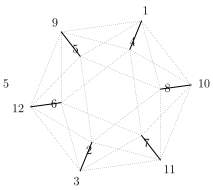
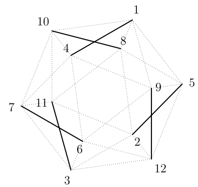
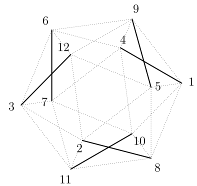
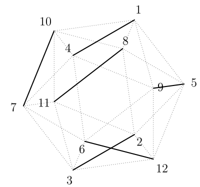
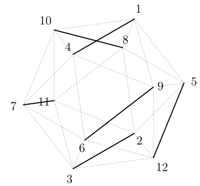
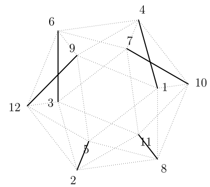
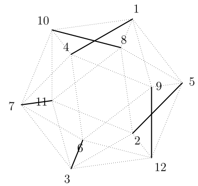
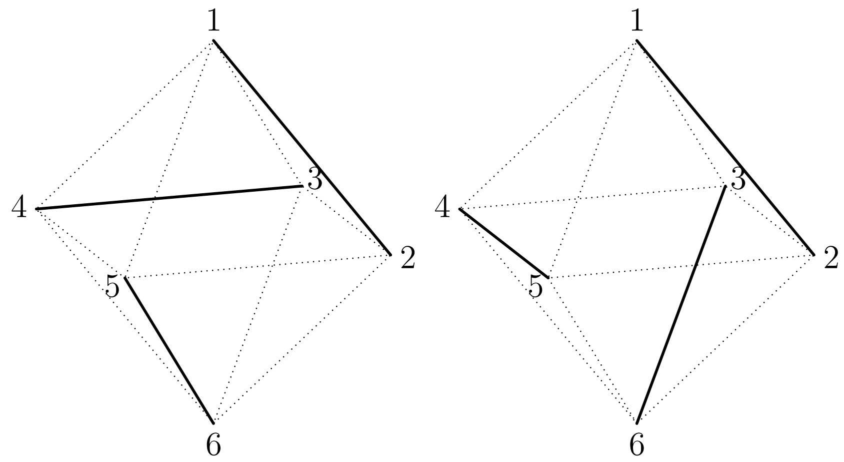
	Nekiralna prirejanja		Kiralna prirejanja		
			 	 	 
G (G^*)	T (T_h)	D_3 (D_{3d})	D_3	D_2	C_2
$\lvert G\rvert$	12	6	6	4	2

Tabela 1. Popolna prirejanja na ikozaedru, razvrščena po padajoči simetriji. Dve stanji imata zrcalno simetrijo, preostala pa so kiralna in nastopajo v zrcalnih parih. Stanja so orientirana tako, da nazorno prikazujejo simetrijo. Navedene so grupe pravih rotacij G, z grupo posplošenih rotacij G^* navedeno v oklepaju v primerih nekiralnih prirejanj. Moči grup $|G|$ nam povedo število orientacij, v katerih prirejanja izgledajo enako. Moč grupe ikozaedra (60), deljena z močjo podgrupe pravih rotacij $|G|$, nam pove število *različnih* orientacij istega prirejanja.



Slika 2. Edini različni popolni prirejanji na oktaedru. Prirejanji sta zrcalni, v prikazani projekciji ravnino zrcaljenja napenjajo vozlišča $(1, 2, 6, 4)$.

število *različnih orientacij* tega prirejanja. Vseh 125 veljavnih prirejanj je torej razdeljeno na različno orientirane različice 8 različnih prirejanj iz tabele 1 na način $125 = 60/12 + 60/6 + 2 \times 60/6 + 2 \times 60/4 + 2 \times 60/2$.

Kocka, dodekaeder in nogometna žoga

Osnovne ploskve tetraedra, oktaedra in ikozaedra so trikotniki, zato lahko njihova oglišča povežemo le z robovi samega poliedra ali pa skozi njegovo notranjost, ki nas zaradi težke predstavljivosti in računske zahtevnosti ne zanimajo. Za poliedre z drugačnimi osnovnimi ploskvami pa imamo na voljo tudi diagonale ploskev. Graf povezav v tem primeru ni planaren, ampak vsebuje vozlišča višje stopnje.

Zastavimo posplošen problem, pri katerem dovolimo robove ter ploskovne diagonale poliedra pod pogojem, da se povezave ne sekajo. Te rešitve bomo imenovali *ploskovna popolna prirejanja* in zahtevajo dodaten računski korak, ki odstrani prirejanja, pri katerih se povezave na površini poliedra sekajo.

S tem pogojem kljub neplanarnosti grafa ohranimo planarnost prirejanj, kar pomeni, da jih lahko vložimo na površino poliedra. Ploskovna popolna prirejanja torej lahko iščemo s flomastrom in papirnatimi poliedri.

Za kocko najdemo 45 veljavnih ploskovnih popolnih prirejanj, od tega 7 različnih (tabela 2), ko upoštevamo učinek vseh 24 simetrij kocke. Tri prirejanja so nekiralna, dve pa nastopata v kiralnih parih. Prvi dve prirejanji v tabeli 2 vsebujeta le povezave vzdolž robov kocke in sta torej tudi popolni

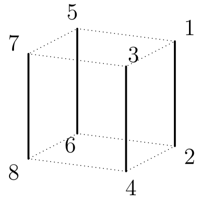
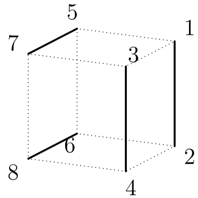
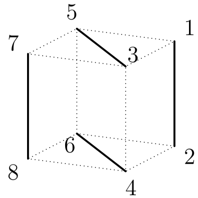
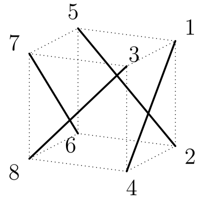
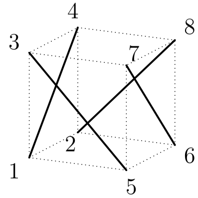
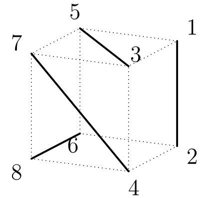
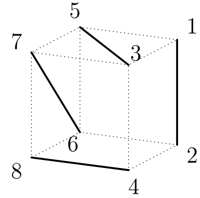
	Nekiralna prirejanja			Kiralna prirejanja	
				 	 
G (G^*)	D_4 (D_{4h})	D_2 (D_{2d})	D_2 (D_{2h})	D_4	C_2
$\lvert G\rvert$	8	4	4	8	2

Tabela 2. Ploskovna popolna prirejanja na kocki. Prvi dve vsebujeta le robove kocke, preostala pa tudi diagonale. Za nekiralna prirejanja sta navedeni grupa pravih rotacij G in v oklepaju grupa rotacij z zrcaljenji.

prirejanji grafa kocke brez diagonal. Nobeno izmed prirejanj ne ohrani polne simetrije kocke, prav tako pa nobeno ne izgubi vseh simetrij – najnižjo simetrijo ima zadnje stanje v tabeli, ki ima zgolj eno dvoštevno os rotacije. Rešitve za kocko so med drugim relevantne tudi kot načini povezovanja defektov v tekočekristalnih koloidih [3].

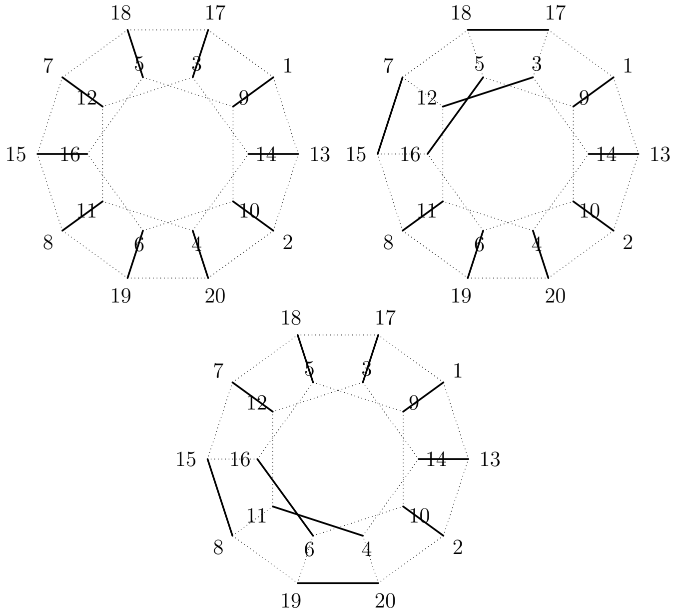
Ploskovna prirejanja dodekaedra predstavljajo občutno večji računski izziv. Skupaj s ploskovnimi diagonalami graf vsebuje 20 vozlišč, povezanih s 90 povezavami. Maksimalno število delnih prirejanj med izvajanjem algoritma je 406817, ki nato vrne 139083 dovoljenih popolnih prirejanj.

Končno število različnih popolnih prirejanj je bilo do sedaj razmeroma majhno. Pri dodekaedru, ki si deli simetrijsko grupo z ikozaedrom, pa tudi po upoštevanju simetrij ostane 2476 ploskovnih popolnih prirejanj, od tega 42 zrcalno simetričnih, preostala pa nastopajo v zrcalnih parih. Razvrstitev prirejanj po simetriji je navedena v tabeli 3. Le tri izmed njih (slika 3) vsebujejo samo robove dodekaedra in rešijo problem popolnih prirejanj za graf dodekaedra.

S podrobno primerjavo ugotovimo, da sta dodekaedra na sliki na naslovnici dejansko različna. Čeprav smo dobili seznam vseh različnih prirejanj, je naivna primerjava vzorčnega prirejanja s tem seznamom še vedno lahko zamudna, saj v principu zahteva rotacijo strukture v vseh 60 orientacij in primerjavo enakosti povezav v dani orientaciji. Da se temu izognemo, si pomagamo z enostavno določljivimi invariantami. Invariante so količine, neodvisne od orientacije – če imata dve konfiguraciji, v našem primeru dve prirejanji, različni invarianti, sta zagotovo različni, s čimer si lahko zelo zmanjšamo število potrebnih primerjav. Za popolna prirejanja na dodekaedru je ena izmed invariant število ploskev, ki nimajo nobenega roba v prirejanju. Levi dodekaeder na sliki na naslovnici ima dve taki ploskvi, desni pa nobene, kar dokaže, da sta različna.

V primeru kocke (tabela 2) sta prikladni invarianti število diagonal ter število različnih smeri povezav, ki zadostujeta za ločevanje vseh prirejanj, z izjemo razločevanja pripadnikov zrcalnih parov, za kar bi potrebovali še kiralno invarianto.

Za konec si oglejmo še rezultate za prisekani ikozaeder (tradicionalna nogometna žoga). Ta primer je tudi relevanten za Kekulejeve strukture buckminsterfulerena C_{60} [1]. Ta graf ima 60 vozlišč in 90 povezav, diagonal pa ne bomo upoštevali, saj groba ocena pokaže, da bi bilo število možnosti v tem primeru astronomskih razsežnosti. Algoritem vrne 12500 popolnih prirejanj, ob upoštevanju simetrije 260 različnih, klasificiranih v 16 različnih grup, kot kaže tabela 4. Med njimi je tudi eno popolno prirejanje s polno ikozaedrično simetrijo, o katerem lahko bralec razmisli sam.



Slika 3. Edina tri popolna prirejanja na dodekaedru brez diagonal. Prvo ima maksimalno simetrijo (5-števna diedrska simetrija z zrcaljenji, D_{5d}), preostali dve pa sta zrcalni par z minimalno simetrijo C_2.

Nekiralna prirejanja			Kiralna prirejanja		
$\lvert G \rvert$	G^*	število	$\lvert G \rvert$	G	število
10	D_{5d}	1	10	D_5	2×2
5	S_{10}	2	5	C_5	1×2
4	D_{2h}	1	4	D_2	6×2
2	C_{2h}	6	2	C_2	136×2
2	C_{2v}	3			
1	C_s	29	1	C_1	1072×2

Tabela 3. Ploskovna popolna prirejanja na dodekaedru lahko razvrstimo v 11 različnih simetrijskih grup, od najbolj simetričnih s petštevno simetrijo v prvi vrstici, do povsem nesimetričnih v spodnji. V levem stolpcu so prirejanja z zrcalno simetrijo, v desnem pa tista, ki nastopajo v dveh zrcalnih različicah. Pri nekiralnih prirejanjih je v stolpcu G^* navedena grupa z zrcaljenji vred, ker podaja več informacij o simetriji, v stolpcu $|G|$ pa so, podobno kot v prejšnjih tabelah, štete le prave rotacije, saj rotacij z zrcaljenjem ne moremo doseči s fizičnim obračanjem telesa.

Nekiralna prirejanja			Kiralna prirejanja		
$\lvert G\rvert$	G^*	število	$\lvert G\rvert$	G	število
60	I_h	1			
12	T_h	1	12	T	1×2
10	D_{5d}	2			
6	D_{3d}	3	6	D_3	2×2
5	C_{5v}	1	4	D_2	3×2
3	C_{3v}	3	3	C_3	7×2
3	S_6	1			
2	C_{2h}	4	2	C_2	19×2
2	C_{2v}	4			
1	C_s	36	1	C_1	70×2

Tabela 4. Ploskovna popolna prirejanja na nogometni žogi zajamejo 16 različnih simetrijskih grup.

Sklep

Svet okoli nas je poln zanimivosti, ki lahko zaživijo svoja življenja kot povsem samostojna matematična vprašanja. Naloga, ki se je v organski kemiji in fiziki kompleksnih materialov porodila iz nuje, lahko služi kot lekcija iz geometrije in teoretične obravnave simetrij. V tem prispevku smo si ogledali popolna prirejanja na grafih najenostavnejših poliedrov, nihče pa nam ne brani, da bi si ne izbrali grafov drugačnih simetrij in vprašanje popolnih prirejanj reševali kot programerski izziv ali konjiček za preživljanje prostega časa.

LITERATURA

[1] S. J. Austin, P. W. Fowler, P. Hansen, P. D. E. Monolopoulos in M. Zheng, Chemical Physics Letters **228** (1994) 478–484.

[2] D. Babić in N. Trinajstić, Fullerene Science and Technology **2** (1994), 343–356.

[3] S. Čopar, N. A. Clark, M. Ravnik in S. Žumer, *Soft Matter* **9** (2013), 8203–8209.

[4] T. Došlić, J. Math. Chem. **41** (2007), 183–192.

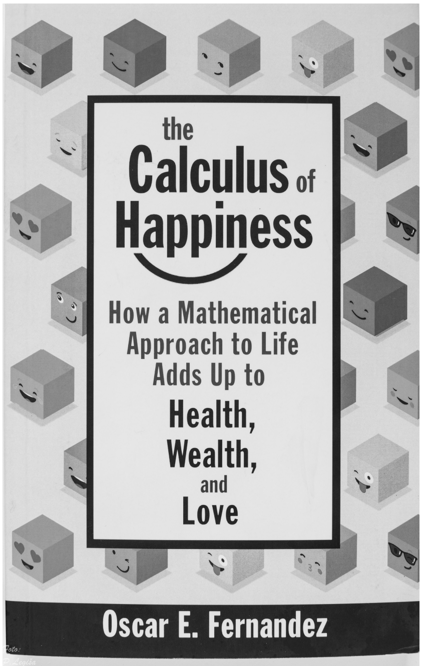
[5] A. Kekulé, *Über die Constitution des Benzols*, Berichte Der Deutschen Chemischen Gesellschaft **2** (1869), 362–365.

[6] L. Lovász in M. D. Plummer, *Matching theory*, North-Holland, 1986.

[7] M. Randić, *Journal of Chemical Information and Modeling* **44** (2004), 365–372.

NOVE KNJIGE

Oscar E. Fernandez, The Calculus of Happiness, How a Mathematical Approach to Life Adds Up to Health, Wealth, and Love, Princeton University Press, Princeton in Oxford 2017, 159 str.



Avtor je izredni profesor na Wellesley College v ZDA. Raziskovalno deluje na področjih mehanike in topologije.

Naslov knjige spominja na oglasno sporočilo. Knjiga je sicer zelo čitljiva, napisana korektno in vsebuje čisto pametne nasvete. Številne med njimi že vsaj približno poznamo. Knjiga te nasvete poveže ali skuša povezati z matematiko. Ima tudi bibliografijo, ki z znanstveno in strokovno literaturo podpira avtorjeve trditve. Matematika je večinoma srednješolska. Avtor, ki skuša zadostiti širši publiki, na začetku razlaga tudi take stvari, kot je linearna funkcija. Lahko bi rekli, da je v knjigi nekaj repetitorija srednješolske snovi. Kasneje je nivo podoben ali malo višji od revije Presek. Računi na tem elementarnem nivoju so lepo razloženi v posebnem razdelku na koncu knjige. Tam sem našel le dva minimalna spodrsljaja. Verjetno bi del snovi bil zanimiv za popestritev srednješolske matematike.

Knjiga začne s prehrano in vadbo. Prvo poglavje nosi naslov: *Koliko kalorij naj bi pojedli vsak dan?*. Telo potrebuje hrano tudi takrat, ko počivamo. Avtor pravi, da se je za oceno teh osnovnih potreb najbolj uveljavila enačba iz leta 1990, imenovana *enačba Mifflin-St Jeor* po avtorjih. Po Wikipediji ta osnovna dnevna poraba znaša naslednje število kilokalorij:

$$P = 10m + 6{,}25h - 5a + s.$$

Tu je m masa v kilogramih, h višina v centimetrih in a starost v letih. Parameter s je 5 za moške in -161 za ženske.

Koliko je maksimalni srčni utrip, ki ga zdravi ljudje lahko ohranjajo ob daljši telesni aktivnosti? Včasih je veljala groba formula

$$220 - a,$$

kjer je a starost. Novejši eksperimenti pravijo, da naj bi bila boljša formula

$$192 - 0{,}007a^2.$$

Stara preprostejša formula očitno daje prevelike vrednosti za mlade ljudi (in nekoliko premajhne za stare). Podanih je še več podobnih formul za porabo energije pri telesni aktivnosti itd. Vsako poglavje se zaključi z matematičnim povzetkom, nematematičnim povzetkom in bonusom: praktičnimi nasveti. Podobno kot pri naslovih avtor torej tudi pri tem uporablja preizkušene in še zmeraj učinkovite ameriške prodajne metode.

Drugo poglavje se ukvarja s hrano in problemom debelosti. Če smo predebeli, se v povprečju naša življenjska doba skrajša. To še posebej velja za moške (in za mlajše osebe, ki bi sicer pred sabo imele še veliko let). Pri nas je popularno merilo za debelost *indeks telesne mase (ITM)*, ki ga izračunamo po formuli

$$ITM = \frac{m}{v^2},$$

kjer je m masa v kg in v višina v metrih. Avtor pledira, da je boljše merilo število r, ki je obseg pasu, deljen z višino. Po priporočilu v knjigi naj bi si vsi prizadevali, da je r čim bliže 0,5. Pri tem se avtor sklicuje na članek [1], ki sloni na britanskih statističnih podatkih. Impresivni stolpični diagrami v članku, ki je prosto dostopen, kažejo število izgubljenih let za precej gost nabor vrednosti za r in za ITM. Iz diagramov hitro vidimo, da je, ne glede na starost, za moške optimalen ITM med 21 in 24, razmerje r pa med 0,46 in 0,54. Za ženske je optimalni ITM višji, med 23 in 29, optimalno razmerje r pa je med 0,38 in 0,54. Ti podatki se zdijo na prvi pogled nekoliko protislovni. Vendar se moškim, za razliko od žensk, odvečna maščoba navadno nalaga prav okrog pasu, kar škodi delovanju notranjih organov.

V obravnavani knjigi so narisani kar grafi za število izgubljenih let kot funkcija parametra r, za starosti 30, 50 in 70 let, vendar le za $r \geq 0{,}5$. Fernandez trdi, da te grafe lahko dobro aproksimiramo s kubičnimi polinomi spremenljivke r. Koeficiente teh prav nič lepih polinomov daje na 5 mest! (Ta pretirana natančnost je gotovo zasluga kakega »best fit« programa.) Ko narišemo graf enega od teh polinomov iz knjige in to primerjamo s podatki v članku, je jasno, da je Fernandez to aproksimacijo naredil le za $r \geq 0{,}5$. Njegova aproksimacija je za $r < 0{,}5$ povsem napačna. Skratka, ta uporaba polinomov je neprepričljiva. Res pa je, da če smo presuhi, naj bi to po članku [1] pri moških skrajšalo življenjsko dobo za največ dve leti, pri ženskah pa za manj kot eno leto. Avtorjeva omejitev na $r \geq 0{,}5$ je tako deloma razumljiva.

Naslednje poglavje je *Matematikov vodič po upravljanju z denarjem.* Tu obravnava obrestno-obrestni račun, logaritme, zmanjševanje dolgov itd. Že zdrava pamet pove, da moramo najprej odplačati posojilo z največjo obrestno mero. Tu so še strategije vlaganja, ki pa so uporabne bolj za ameriške razmere.

Zadnje poglavje prodaja matematiko kot sredstvo, s katerim najdemo ljubezen in formiramo stabilne pare. Tu je seveda »najboljša« strategija za iskanje partnerjev, pa metode organiziranja zmenkov itd. Partnerstvo prikaže celo kot dinamični sistem in to poveže z Nashevim ravnovesjem. Dinamični sistemi so seveda višji nivo, a so razloženi zelo poljudno.

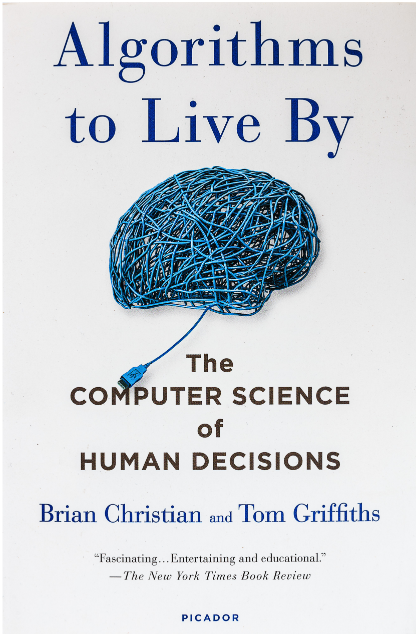
Knjiga opiše še raziskavo, ki sta jo leta 1999 na 130 parih novoporočencev naredila psihologa John Gottman in Catherine Swanson. Petnajst minut sta snemala razgovor para o žgočih temah, kot je politika. Iz tega naj bi z več kot 90-odstotno zanesljivostjo ugotovila, kateri zakoni se bodo obdržali. Fernandez tudi to poveže z dinamičnimi sistemi. Če je vsak od obeh zakoncev že pri manjših stvareh, ki mu niso bile všeč, dal to vedeti drugemu, je bil to dober obet za stabilen zakon. Seveda pa mora biti reakcija spoštljiva, premišljena in ne bliskovita. Zavijanje z očmi ob partnerjevih izjavah ali tiho nalaganje zamer ne prispevajo k trdnosti zveze. Fernandez malo dvomi, da sta bila psihologa tako silno uspešna v napovedih. Vzorec je bil tudi sorazmerno majhen. Ampak ugotovitve se zdijo blizu resnici.

LITERATURA

[1] M. Ashwell, L. Mayhew, J. Richardson in B. Rickayzen, *Waist-to-Height Ratio Is More Predictive of Years of Life Lost than Body Mass Index*, PLoS One 9(9), 8. sep. 2014, dostopno na `journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0103483n`, ogled 6. 8. 2020.

Peter Legiša

Brian Christian in Tom Griffiths, Algorithms to Live by, The Computer Science of Human Decisions, Picador, Henry Holt and Company, New York 2017, 351 str.



Prvi avtor je pisec poljudnoznanstvene literature (in tudi pesnik) z izobrazbo iz računalništva in filozofije. Je tudi gostujoči strokovnjak na kalifornijski univerzi v Berkeleyju. Drugi avtor je profesor psihologije in kognitivne znanosti na omenjeni univerzi. Vodi *Računalniški laboratorij za področje kognitivne znanosti.*

V knjigi ne boste našli matematičnih formul. Računalniški algoritmi so deloma razloženi, a na zelo poljuden način. Poudarek pa je predvsem na komentiranju teh algoritmov in povezavi z vsakdanjim življenjem ter odločanjem in organiziranjem na raznih nivojih družbe. Navedena je zgodovina algoritmov in na kratko so predstavljeni njihovi avtorji. Knjiga je lepo napisana in snovi je ogromno.

Prvo poglavje nosi naslov *Optimalna zaustavitev* in je eno od najbolj dostopnih in zanimivih. Ko je astronomu in matematiku Johannesu Keplerju leta 1611 umrla prva žena, je iskal novo in v izbor vzel enajst žensk. Četrta mu je bila privlačna, ker je bila visoka in atletske postave. Vendar je iskal naprej in naslednja, Susanna Reuttinger mu je bila zelo všeč, ker je bila mila in prijazna, marljiva in naklonjena Keplerjevim otrokom iz prvega zakona. Vendar je Kepler obiskal za vsak primer na hitro še preostale kandidatke. Na koncu se je vrnil k Suzani, ki je sprejela njegovo dvorjenje. Zakon je bil srečen in imela sta še šest otrok. Večkrat Keplerjeva metoda ne deluje dobro, ker že obravnavane priložnosti niso več na voljo. Kot pravi slovenski pregovor: *Priložnost zamujena ne vrne se nobena.* V tem primeru nima smisla pregledovati do konca, približno v skladu z rekom: *Kdor preveč (i)zbira, zbirk dobi*, se pravi, dobi tisto, česar drugi niso hoteli vzeti. Matematiki in računalnikarji so analizirali, kdaj se splača zaustaviti iskanje pri raznih pogojih. Odločitev za prvo ponudbo večinoma ni pametna, razen če obstaja objektiven kriterij, po katerem je očitno odlična. To razloži, zakaj recimo brezposelni pogosto ne želijo vzeti prve službe, ki je na voljo. Knjiga vsebuje veliko informacij o reševanju tovrstnih problemov.

Donald Shoup je profesor urbanega načrtovanja na znani kalifornijski univerzi UCLA. Znan je po raziskavah parkiranja. Njegov najpreprostejši recept je, da naj bo cena vsaj tako visoka, da je zmeraj na voljo kako mesto. Še bolje, zasedenost naj ne presega kakih 85 %. Sicer namreč vozniki izgubljajo čas s kroženjem in povzročajo zastoje in onesnaženje. San Francisco je po njegovih nasvetih uvedel cene parkiranja, ki rastejo s povpraševanjem.

V knjigi so še poglavja o *raziskovanju in izkoriščanju, sortiranju, predpomnilnikih, časovnem načrtovanju opravil, Bayesovem pravilu v statistiki.*

V poglavju o *pretiranem prilagajanju podatkom* imamo neko statistiko o zadovoljstvu z življenjem po n letih, preteklih od poroke ($n = 1, 2, \dots, 10$). Številska mera za zadovoljstvo v tej statistiki rahlo niha: dol – gor – dol – gor, z vrednostmi med približno 7,8 in 7,4. Podatke (deset točk) lahko aproksimiramo z rahlo padajočo linearno funkcijo časa t, merjenega v letih. Knjiga kaže tudi aproksimacijo s kvadratno funkcijo, čeprav se matematik za kaj takega ne bi odločil. Nazadnje knjiga skozi deset točk napelje interpolacijski polinom devete stopnje, ki daje povsem noro ekstrapolacijo za vrednosti $t > 11$. Že pri $t = 11$ naj bi zadovoljstvo padlo na vrednost pod 6! Zanimivo je, če podatkom dodamo nekoliko šuma. Simuliranih je deset takih različnih motenj. Na linearno aproksimacijo to vpliva minimalno. Pri kvadratni aproksimaciji se ekstrapolacije za $t > 12$ lahko že bolj in bolj razhajajo. Pri interpolacijskem polinomu devete stopnje pa šum lahko povzroči močne nihaje na intervalu $1 < t < 10$. Že tako čudno ekstrapolacijo pa vrže povsem iz tira. Tako naj bi pri $t = 11$ v treh primerih (od desetih naključno izbranih malih motenj začetnih podatkov) zadovoljstvo poskočilo na več kot 9, v štirih pa padlo na manj kot 6! Interpolacija s polinomi visokih stopenj je torej slabo pogojena. Kljub nekoliko nenavadni uporabljeni terminologiji so ti grafi v knjigi res zanimivi in odlična ilustracija nesmisla pretiranega prilagajanja podatkom. Menda je v ZDA v napovedovanju razširjenosti zadnje epidemije nekdo uporabil »kubični« model, ki je dal optimistične napovedi po želji oblasti.

Sledi poglavje o *relaksacijskih metodah*, s katerimi se lotevamo problema trgovskega potnika in podobnih nalog, pri katerih optimalna rešitev zahteva preveč računanja. Mimogrede, relaksacijo že dolgo poznajo fiziki, ki uporabljajo izraz »zanemarimo« ...

Poglavje *Slučajnost* razloži med drugim, kako se številnih težkih problemov lahko lotimo z metodo Monte Carlo.

Zanimiv pa je tudi vpliv slučajnosti na raziskovanje. Italijanski mikrobiolog Salvador Luria, ki je pred fašizmom pobegnil v ZDA, je leta 1943 opazoval kolega na igralnem avtomatu. Sam se je ukvarjal z vprašanjem, kako bakterije razvijejo odpornost proti bakteriofagom. Ali so, kot je sam verjel, zaradi slučajnih mutacij – kot so slučajni izidi hazardiranja – nekatere bakterije bolj odporne na te viruse? Takrat še dejavni lamarkisti so imeli drugačne teorije.

Zamislil si je poskus, ki sta ga izvedla s kolegom Maxom Delbrückom. Ločeno sta vzgajala več linij iste vrste bakterij in jih po več generacijah, ko so se genetsko že malce razlikovale, izpostavila bakteriofagom. Izkazalo se je, da je bil delež odpornih bakterij v različnih linijah različen. Slučajne mutacije in naravna selekcija uspešnih mutacij so torej tisto, kar privede do odpornosti. Slučajnost v tej zgodbi je dvojna: k odkritju je pomagalo slučajno opazovanje hazardiranja.

Oba mikrobiologa sta dobila, skupaj z Alfredom Hersheyjem, leta 1969 Nobelovo nagrado za fiziologijo ali medicino. Mimogrede, bakteriofagi zdaj postajajo spet zanimivi zaradi odpornosti bakterij na antibiotike. Bakteriofagi so izredno specializirani, posamezna vrsta navadno deluje le proti eni vrsti bakterij.

V poglavju o *mrežah* imamo razložen *eksponentni umik*, ki igra veliko vlogo pri konfliktih v komunikacijskih in računalniških omrežjih. Če recimo računalnik ne more doseči določene strani na medmrežju, večinoma ne bo poskušal znova v enakih časovnih razmikih. Prvič bo poskusil po času t, ob neuspehu čez $2t$, ob ponovnem neuspehu čez $4t$ ... Tako ne preobremenjujemo po nepotrebnem omrežja, saj je morda strežnik na drugi strani izpadel in traja dalj časa, da začne spet delovati. Tudi pri vnašanju gesla nekateri sistemi delujejo podobno in tako onemogočajo dolgo poskušanje nepooblaščenih. Pozabljivemu lastniku pa omogočijo, da najde geslo, ki ga je, upajmo, zabeležil na varnem mestu. Knjiga pravi, da tako lahko ravnamo tudi v odnosih s težavnimi prijatelji, ki ne pridejo na povabilo. S tem si prihranimo precej razočaranj, vendar ohranimo možnost ponovnega stika.

Na Havajih so uvedli podoben sistem za pogojno izpuščene kriminalce, odvisne od droge. Kazni za kršitve so vnaprej jasne, takojšnje in eksponentno naraščajo. Najprej dan zapora čez vikend, pri ponovitvi dva dni čez vikend ... Datumi testov za prisotnost mamil so slučajni. Na Havajih je to imelo zelo dobre rezultate – veliko boljše od stare prakse dolgotrajnega gledanja skozi prste in nato drastičnih zapornih kazni.

Knjiga povleče tudi vzporednice med računalniškim komuniciranjem in lingvistiko. Pisca pravita, da so sredi dvajsetega stoletja v lingvistiki prevladovale teorije Noama Chomskega, ki so predpostavljale popoln, slovnično pravilen govor v celih stavkih. V šestdesetih in sedemdesetih letih so lingvisti ugotovili, da je to večinoma daleč od dejanskega stanja. Tudi računalniški strokovnjaki, ki se ukvarjajo s pretvarjanjem govora v pisno obliko, imajo probleme z nedokončanimi stavki.

Pogovor je zapletena stvar in bistvena je interakcija med osebama (osebami). Za govorca so zelo pomembni odzivi poslušalca (morda samo »ja«, »hm«, »aha«) in mimika obraza. Temu se prilagaja komunikacija. Računalniška omrežja prav tako sporočajo pošiljatelju, ali so poslani paketi podatkov prispeli. Če pa pripovedujemo zanimivo zgodbo in poslušalec začne gledati v telefon, bosta naša zgodba in še posebej njen zaključek postala klavrna. Vsi, ki smo kdaj predavali, vemo, da nezainteresiranost poslušalcev ubija voljo in poslabša kakovost prezentacije. (To seveda manj prizadene tiste, ki samo berejo ali projicirajo svoje zapiske.)

Zadnje poglavje je *Teorija iger*. Zanimivo je, da centralizirano optimiranje avtomobilskega prometa ni bistveno boljše od običajne anarhije, ko vsak želi priti čim prej na cilj in se ne ozira na druge. Prihranek na času naj bi bil največ 25 %.

Lepo je razložen v anglosaških debatah pogosto uporabljen izraz *žaloigra na gmajni*, angleško *tragedy of the commons*. Z njim je leta 1968 ekolog Garrett Hardin opisal stanje, ko skupni pašnik uporablja več kmetov. Vsak bi moral pasti le toliko živali, da bi ostalo dovolj trave za preostale. Človeška narava pa je taka, da pogosto posameznik pase več živali, kot bi smel. Kršenje pravil igre opravičuje z: »Meni pomeni veliko, za vsakega drugega udeleženca pa je nastali primanjkljaj majhen.« Če večina premišljuje tako, je pašnik kmalu neuporaben.

Knjiga trdi, da je glavni razlog za to, da si številni Američani ne vzamejo dopusta ali le nekaj dni na leto, ta, da želijo pokazati lojalnost podjetju in tako napredovati ali vsaj ne izgubiti službe. Če večina premišljuje tako, so tudi preostali praktično prisiljeni, da skoparijo z dopustom. In to kljub statistikam, ki kažejo, da dva ali trije tedni dopusta letno pomenijo boljše zdravje in daljše življenje. Podobno je s pridobivanjem in porabo fosilnih goriv. Pomaga lahko le zavezujoč dogovor ali sprememba pravil.

Navedimo še primer (ki ni iz knjige), ko je sprememba pravil skupaj z inovativnimi idejami odpravila posledice »žaloigre na gmajni«. Pretirana paša in posek sta v Sahelu savano marsikje spremenila v polpuščavo s posameznimi grmički. Avstralski agronom Tony Rinaudo je opazil, da ti grmički poganjajo iz korenin že pred leti ali celo desetletji posekanih dreves. V zameno za hrano, potrebno zaradi katastrofalne suše, so domači lastniki zemljišč po njegovih navodilih zredčili grmičke na le nekaj vej, ki so jih potem varovali in le izrezovali odvečne poganjke. Ključna je bila tudi sprememba pravil. Prepovedali so staro prakso, da si lahko posekal pri sosedu, če je zmanjkalo na tvojem. V nekaj letih so zrasla lepa drevesca. Ko je potreba po hrani izginila, so sicer številni svoja debla takoj požagali. Bolj daljnovidni, sprva v manjšini, pa so drevesa ohranjali in vzgajali nova, ker so v njihovi bližini bolje uspevale tudi druge poljedelske kulture. Neškodljivo obrezovanje drevesa da neprimerno več krme za živali, kot bi sekanje grmička, iz katerega je zraslo drevo. Sčasoma je dobra praksa dobivala vse več posnemovalcev. Rinaudo je iz Avstralije prinesel tudi akacije z užitnimi stroki, ki so se dobro obnesle. Tako so samo v državi Niger pogozdili 50 tisoč kvadratnih kilometrov, se pravi več kot za dve Sloveniji.

Mimogrede, francoski pisatelj Jean Giono je leta 1953 napisal čudovito knjižico *Mož, ki je sadil drevesa.* Opisuje samotarskega pastirja, ki s pogozdovanjem spremeni pokrajino. Prevedena je bila v številne jezike, tudi v slovenščino. Mnogi so prišli v Francijo, celo z drugega konca sveta zaradi te resnično zelo prepričljivo napisane zgodbe – in bili strašno razočarani ter večkrat jezni, ker je izmišljena.

Gornja afriška zgodba pa je resnična in mnogo mnogo večja, a še zdaleč ni deležna take popularnosti. Je pa Rinaudo leta 2018 za svoje več desetletno delo dobil *The Right Livelihood Award.* Ta nagrada je nastala po neuspešnem poskusu, da bi Nobelovo nagrado za ekonomijo dopolnili z nagrado za varstvo okolja in trajnostne rešitve.

V spletni trgovini *Amazon Marketplace* včasih najdemo noro visoke cene drugih ponudnikov za kak artikel, ki ni več v redni prodaji. Knjiga razloži, da je to navadno posledica računalniških algoritmov. V enem primeru je program nekega ponudnika avtomatično postavil ceno, ki je bila 99,8 odstotka cene drugega ponudnika. Program drugega pa je nato ceno nastavil na 127 odstotkov cene prvega. Očitno je ponudnik poznal algoritem prvega in vedel, da lahko tako tudi konkurentovo ceno potisne v višave. Verjetno je tudi upal, da ima prvi ponudnik na zalogi samo en kos. Kaj se zgodi po več ponovitvah teh algoritmov, če ne prvi ne drugi nimata vgrajene kake varovalke, si ni težko predstavljati. Eksponentna rast je zelo hitra. V danem primeru je cena starega učbenika razvojne biologije zrasla na dobrih 23 milijonov dolarjev (plus 3,99 dolarja za poštnino).

Velike anomalije lahko nastanejo tudi pri dražbah in so zato neizčrpna tema nekaterih televizijskih serij.

Knjiga dela reklamo za sistem, ki ga je uvedel ekonomist William Vickrey, dobitnik Nobelove nagrade. Udeleženci dražbe oddajo zaprte ponudbe. Zmaga tisti, ki je ponudil največ. Plačati pa mora toliko, kot je bila druga najvišja ponudba. To naj bi pomagalo k bolj realnim cenam.

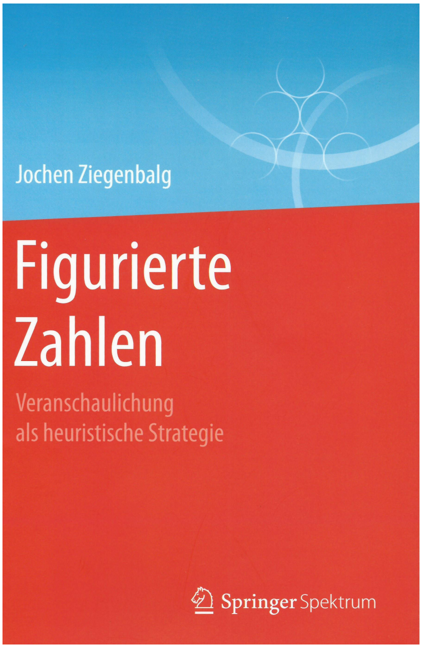
Knjiga pravi, da je ugibanje o namerah drugih in ustrezno izbiranje strategije zelo naporno in večkrat vodi k plazu slabih odločitev. To se recimo kaže v nastanku in poku finančnih balonov. Številni investitorji so namreč pripravljeni plačati za delnice malo manj, kot ocenjujejo, da bodo v bližnji prihodnosti pripravljeni plačati drugi na borzi. Realna vrednost podjetij je večkrat v drugem planu ali pa sploh ni upoštevana. Množično špekuliranje se včasih izkaže kot kolektivna zabloda. (Eden izmed najhujših primerov katastrofalnih odzivov na domnevne namere in nato poteze nasprotnika je nenadzorovana eskalacija, ki je privedla do prve svetovne vojne.)

Na koncu imamo nekaj zaključkov. Določene optimizacije so pretežke celo za računalnike. Zato bodimo zadovoljni z »dovolj dobrimi« rešitvami. Knjiga pravi, da si ne želimo preveč premišljevanja. Pisca sta želela intervjuje z mnogimi strokovnjaki in ugotovila, da laže prideta do njih, če začneta z vprašanjem: »Ali imate čas naslednji torek med 12. in 13. uro«, kot z »Kdaj naslednji teden bi imeli čas?« Bodimo »kognitivno prijazni« in ne povzročajmo stanj, v katerih morajo drugi ugibati o naših željah in namerah. Vljudno povejmo, kaj bi si sami želeli. Za skupni izlet ali druženje predlagajmo le nekaj možnosti. Morda to ni »fino vedenje«, je pa za vse lažje in bolj produktivno.

Navedli smo le nekaj bolj dostopnih in manj tehničnih zgodb te vsebinsko bogate knjige. Samo besedilo se konča na strani 262. Nato imamo še obsežne *Opombe* z referencami in bibiliografijo.

Peter Legiša

Jochen Ziegenbalg, Figurierte Zahlen, Springer Spectrum, Wiesbaden, 2018, 136 strani.



Knjiga daje vpogled v elementarne metode, ki imajo izvor v matematičnih figurah in slikah, ki jih najdemo že pri pitagorejcih, ki so poznali liha in soda ter trikotniška števila. Njen naslov pove, da je posvečena figurativnim številom, kamor na primer spadajo dobro znana trikotniška in večkotniška števila. Figurativno število je, kot vemo, število enakih predmetov, razporejenih v neki geometrijski red, bodisi v ravnini ali v prostoru (pri tem imamo v mislih prostor $\mathbb{R}^3$).

Knjigo odlikujejo jasnost, nazornost, elementarnost in konkretnost izbranih zgledov, v vsebino pa je vključen tudi primerno izbran zgodovinski pogled. Pristop je v nekaterih primerih algoritemski in bralca usmerja v uporabo računalniških programov za simbolno računanje. Namenjena je študentom in učiteljem pri elementarni matematiki, pa tudi vsem tistim ljubiteljem matematike, ki niso vpeti v izobraževalni sistem, a jih zanima obravnavana tematika.

Knjiga je razdeljena na deset krajših poglavij, ki jim sledijo še dodatki, ki vsebujejo seštevanje zaporednih lihih števil, Fibonaccijeva števila kot vsote določenih elementov Pascalovega trikotnika, vsote zaporednih kubov naravnih števil, seznam literature, seznam s svetovnega spleta uporabljenih slik in stvarno kazalo.

Prvi dve poglavji prikažeta kratek zgodovinski razvoj pojma figurativnih števil od antike naprej. Omenjena sta Pitagora in Nikomah iz Gerase ter njun pomen na področju teh števil. Za zelo pripraven matematični pripomoček se je izkazal gnomon, figura v obliki kotnika. Gnomon je tudi sestavni del sončne ure. Avtor se na tem mestu spomni na Eratostena in njegovo genialno metodo za določitev velikosti Zemlje.

V tretjem poglavju srečamo trikotniška, kvadratna in kubična števila ter nekatere vsote, ki so z njimi povezane in jih lahko obravnavamo geometrijsko, z uporabo primernih slik. Četrto poglavje uvede večkotniška ali poligonalna in piramidna števila, ki jih nato v petem poglavju razlaga z vidika diferenčnega računa. V šesto, sedmo in osmo poglavje so tako ali drugače vpletena Fibonaccijeva števila in zlato razmerje $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Glavne teme so: definicija Fibonaccijevih števil, nazorna predstavitev njihove rekurzivne relacije, kvadrati in pravokotniki v zvezi z njimi, Binetova formula, ki eksplicitno izraža vsako Fibonaccijevo število, matrike, ki imajo za svoje elemente Fibonaccijeva števila, in filotaksa, ki v biologiji pomeni nauk o pravilni razporeditvi listov, popkov, vejic in poganjkov rastlin. Deveto poglavje pokaže, kako rešujemo homogene linearne diferenčne enačbe prvega in drugega reda. Zadnje, deseto poglavje, je namenjeno naravnim številom in dokazovanju z metodo popolne indukcije. Navedenih je nekaj primerov uporabe iz geometrije in teorije množic.

Avtor knjige, prof. Jochen Ziegenbalg, rojen leta 1944, je študiral matematiko na Univerzi v Tübingenu, nato predaval matematiko in informatiko na Pedagoški visoki šoli v Karlsruheju, po upokojitvi pa sodeluje pri poletni šoli *Lust auf Mathematik*, kar pomeni *veselje (strast) za matematiko*, v Berlinu.

Marko Razpet

Dörte Haftendorn, Kurven erkunden und verstehen, Springer Spectrum, Wiesbaden, 2017, 355 strani.

Knjiga poskuša vzbuditi ponovno zanimanje za matematične krivulje pri učencih, dijakih in študentih, pa tudi pri vseh tistih, ki jim je všeč ta tematika. Konec prejšnjega stoletja so se namreč učni načrti, kar se krivulj tiče, v glavnem skrčili na premice in stožnice, bolj zapletene krivulje pa niso bile vključene. S prihodom zmogljivih in hitrih računalnikov ter programov za dinamično geometrijo pa so nastali pogoji, da se krivulje lahko udobno raziskujejo in da se laže razume njihov pomen. Pri tem imamo nešteto možnosti za spreminjanje parametrov krivulj, tako da je raziskav na pretek. Za vsako krivuljo pa imamo možnost, da jo obdelamo po strogih matematičnih kriterijih. Knjiga za študij krivulj večinoma priporoča GeoGebro, tu in tam pa tudi druga tovrstna orodja.

Knjiga je ilustrirana z več sto, večinoma barvnimi slikami. Ob nekaterih krivuljah spoznamo tudi nekaj zgodovine matematike. Je zgledno urejena, vsebuje sprotne naloge z navodili za samostojno reševanje, dodan pa ji je tudi obširen spisek dodatne literature in stvarno kazalo. Snov v knjigi je smiselno razdeljena na enajst poglavij, od katerih ima vsako po več razdelkov s podrazdelki. Zaželeno je seveda, da bralec sam ob računalniku ponovi v knjigi opisane postopke.

Prvemu poglavju, ki v glavnem opisuje cilje in zgradbo knjige, sledi obširnejše drugo poglavje. V njem se seznanimo z osnovami analitične geometrije, pravokotnimi kartezičnimi in polarnimi koordinatami, s hitrim risanjem krivulj, s parametriziranimi krivuljami in osnovno razdelitvijo ravninskih krivulj na algebrske in transcendentne. Obravnavane so tudi ploskve in krivulje v prostoru. Poglavje zaključijo opisi nekaterih računalniških programov za dinamično geometrijo.

Tretje in četrto poglavje se lotita konkretnih krivulj: konhoid, strofoid, trisektris, cisoid, Cassinijevih ovalov in lemniskat. Pri slednjih uporablja tudi pojem bipolarnih koordinat. Na koncu četrtega poglavja srečamo tudi nekaj zglobnih mehanizmov, pri katerih izbrane točke opisujejo zanimive krivulje, med njimi tudi take za risanje stožnic.

Peto poglavje pokaže, kako lahko sami z zapisom implicitnih enačb ali posebnih geometrijskih konstrukcij točk odkrivamo nove krivulje in ploskve. Včasih je dovolj nekoliko modificirati znano krivuljo ali ploskev s primerno substitucijo, da dobimo novo. Lahko pa iz dveh krivulj ali ploskev sestavimo novo.

Šesto poglavje se ukvarja z nekaterimi antičnimi geometrijskimi problemi: podvojitvijo kocke, tretjinjenjem kota, kvadraturo kroga in konstrukcijo pravilnega sedemkotnika. Med drugim pojasni možnost tretjinjenja kota s konhoido, podvojitev kocke s cisoido, kvadraturo kroga s kvadratriso in konstrukcijo pravilnega sedemkotnika s strofoido.

Sedmo poglavje je v celoti namenjeno stožnicam kot najbolj znani družini krivulj. Razloži, od kod njihovo ime, kako nastanejo, kje se pojavljajo, kako se uporabljajo, kako jih rišemo po točkah, kako jih rišemo približno itd.

Osmo poglavje obravnava spirale, rozete, cikloide, trohoide, kamor so uvrščene tudi epi- in hipocikloide, in verižnico. Verižnico opisuje gorišče parabole, ko se le-ta brez drsenja kotali po premici. Na koncu pa najdemo še sinusno nihanje, sinusoide in Lissajousove krivulje.

V devetem poglavju spoznamo posebne načine tvorbe novih krivulj iz znanih krivulj. Govora je o nožiščnih krivuljah, ogrinjačah, evolutah, involutah, evolventah, katakavstikah, zrcaljenju na krožnici, naravnih enačbah krivulj, klotoidi, traktrisi in še enkrat verižnici.

Deseto poglavje predstavlja didaktični vidik študija krivulj z modernimi orodji: predznanje, vzpodbuda za začetek študija krivulj, pomembnost zgodovine matematike pri tem, odkrivanje nadarjenih, vloga učiteljev.

Zadnje, enajsto poglavje, je zbirka osnovnih pripomočkov matematične analize za študij krivulj: odvod, tangenta, normala, ploščina, prostornina rotacijskih teles, ločna dolžina, ukrivljenost.

Avtorica knjige, prof. Dörte Haftendorn, rojena leta 1948, je študirala matematiko in fiziko na tehniški univerzi v Clausthalu (Spodnja Saška). Po doktoratu (algebra) je poučevala na gimnaziji in predavala bodočim učiteljem, inženirjem in informatikom na strokovni visoki šoli ter na Univerzi Leuphana v Lüneburgu (Spodnja Saška). Leta 2013 se je upokojila, a z univerzo še vedno sodeluje.

Marko Razpet

Mariji Vencelj v spomin

Sredi junija nas je v osemdesetem letu življenja nepričakovano zapustila naša kolegica, upokojena višja predavateljica mag. Marija Vencelj. Za sabo je pustila globoko sled, ne samo na oddelku za matematiko ljubljanske univerze, kjer je bila zaposlena, temveč tudi v širši slovenski matematični družini. Ker je bila zadolžena za izobraževanje in vzgojo bodočih srednješolskih profesorjev matematike, je bila v šolskih krogih med najbolj znanimi predavatelji matematike na ljubljanski univerzi. Obenem so jo zaradi njenega nezanemarljivega prispevka k popularizaciji matematike med mladimi poznali tudi drugi ljubitelji matematike, zlasti člani DMFA Slovenije, in dijaki. Slednje je s svojimi prispevki v *Preseku* in drugje vrsto let navduševala za matematiko, tako da so se mnogi med njimi tudi po njeni zaslugi odločili za študij matematike.

Marija Vencelj se je rodila v Kranju 3. januarja 1941, tam obiskovala osnovno šolo in si pridobila tudi srednješolsko izobrazbo. Jeseni 1959 se je na Naravoslovni fakulteti ljubljanske univerze vpisala na študij matematike, na pedagoški program matematika-fizika, ki je izobraževal bodoče srednješolske profesorje. Ko se je po enem letu pojavila nova možnost nepedagoškega študija, je svoj študij nadaljevala v drugem letniku t. i. tehnične matematike. Vsa leta je bila odlična študentka in tudi diplomirala je oktobra 1963 kot druga v svoji generaciji slušateljev matematike.

Že pred diplomo je z Jožetom Vrabcem in Egonom Zakrajškom sodelovala pri raziskovalni nalogi na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) v zvezi s sestavljanjem zbirke podprogramov za takratni prvi (in edini) dostopni računalnik Zuse Z-23, za kar je skupina prejela študentsko Prešernovo nagrado. Kot diplomirana tehnična matematičarka je postala članica programerske ekipe, ki je pripravljala aplikacije numerične matematike in algoritme za elektronski računalnik. V letih 1965 in 1966 je sodelovala pri dveh podobnih raziskovalnih nalogah na IMFM, v osemdesetih letih pa še pri več drugih dveletnih projektih (o vektorskem pristopu h geometriji, o uvajanju učencev k raziskovalnemu delu v srednji šoli ter o zanimivih matematičnih problemih v srednješolski matematiki).

Po diplomi je po kratki zaposlitvi na Inštitutu Jožef Stefan z marcem postala prva in poleg peščice asistentskih kolegov edina asistentka na katedri za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani. S svojimi študenti je na vajah utrjevala njihovo matematično znanje in jih pripravljala na izpite; snov, ki je niso razumeli, je znala razložiti preprosto in jasno. Poleg tega je študente tudi vzgajala v urejenosti in oblikovanju pisnih izdelkov ter v poštenem odnosu do dela in soljudi.

V študijskem letu 1965/66 se je na univerzi v Nancyju strokovno izpopolnjevala v algebri. Nato sta jo začeli zanimati topologija in analiza, kasneje pa zlasti elementarna geometrija. Ker v Ljubljani v šestdesetih letih še ni bilo podiplomskega študija matematike, se je (tako kot še nekateri drugi ljubljanski matematični diplomanti) vpisala na 3. stopnjo zagrebške univerze. Pri profesorju dr. Sibetu Mardešiću je magistrirala leta 1970 z delom *Hiperprostori podkontinuov in zaprtih podmnožic*. Iz topologije je pripravljala tudi doktorat, ki pa ga ni zaključila, ker je rešitev istega problema medtem že objavil nekdo drug.

Leta 1975 je ob sodelovanju več avtorjev izšel prenovljeni drugi del Vidavove *Višje matematike*. Mag. Marija Vencelj je vanjo prispevala poglavje o vektorski analizi. Istega leta je bila izvoljena za predavateljico matematike, nekaj let kasneje pa za višjo predavateljico. Na pedagoški smeri je potem bodočim učiteljem in profesorjem matematike do upokojitve v začetku januarja 2001 predavala elementarno matematiko z metodiko. Od leta 1982 je zanje vodila tudi poseben seminar. Pripravljala jih je na učiteljsko poslanstvo in jim posredovala svoje bogate pedagoške izkušnje. Pri njej je od leta 1978 do leta 2000 diplomsko delo na drugi stopnji naredilo šestnajst študentov, diplomsko nalogo za prvo stopnjo pa v letih 1985 do 1988 še šest. Z diplomanti in tudi drugimi svojimi bivšimi študenti je obdržala stike tudi kasneje, ko so bili že srednješolski profesorji, in je v njihove razrede vodila nove študente na hospitacije in nastope. Poleg te svoje osnovne pedagoške dejavnosti je učila osnovno matematiko še na različnih drugih študijskih programih: na agronomiji, farmaciji, montanistiki, tekstilni tehnologiji in psihologiji.

Metodiko matematike je svojim študentom in učiteljem prenašala ne le teoretično, s predavanji, temveč tudi praktično, s pisanjem učbenikov. Konec devetdesetih let prejšnjega stoletja, tik pred njeno upokojitvijo, so namreč v zaporednih letih 1997, 1998 in 1999 izšli njeni učbeniki za triletne poklicne šole (za vsako leto šolanja eden); kasneje sta bila prva dva predelana in namenjena za poklicno-tehnično izobraževanje. Zaradi svoje matematične korektnosti in obenem izredno preproste razlage, prilagojene dijakom poklicnih šol, so doživeli ugoden sprejem in več ponatisov v prvih dveh desetletjih 21. stoletja; uporabljajo jih še danes.

Morda največji prispevek mag. Vencljeve pomeni njeno delo na področju popularizacije matematike. Nekaj strokovnih člankov je objavila v *Obzorniku za matematiko in fiziko* že v šestdesetih in osemdesetih letih 20. stoletja, za *Presek*, list za mlade matematike, pa je začela intenzivno pisati prispevke konec osemdesetih let. Tedaj je tudi postala članica uredniškega odbora *Preseka*, od leta 1991 do 2003 pa je bila njegova zelo prizadevna odgovorna urednica in obenem urednica za matematiko. Tako rekoč živela je za to revijo. Skrbela je za primerno vsebino in kljub občasnim kritikam, da je časopis za mladino pretežak oziroma da je primeren bolj za dijake kot za osnovnošolske učence, je vzdrževala njegovo strokovno raven ter ohranjala njegovo vsebinsko podobo. Imela je posluh za slovenski jezik in je avtorjem člankov svetovala glede pravilne rabe besed in lepšega izražanja. Poglabljala se je celo v čisto tehnična vprašanja urejanja revije. Kot urednica in drugače je sodelovala še pri *Zbirki testnih nalog druge mednarodne raziskave znanja matematike*, pri urejanju in izdajanju nekaterih društvenih knjig (npr. *Altius, citius, fortius*), prevedla za objavo v Knjižnici Sigma *Matematični leksikon za nematematike* Zlatka Šporerja. Vsako svoje delo je opravljala zelo vestno in prizadevno, tako v službi kot v okviru društva, za katerega je po upokojitvi delala od doma.

Predvsem pa je tudi sama veliko pisala. Poleg prvega članka, ki je bil objavljen leta 1981, je v *Preseku* objavljala brez prekinitve vsa leta od 1988 do 2010, v letih 2012, 2013 in 2015 pa je objavila še zadnje tri prispevke. Lastnih besedil se ji je (poleg 13 prevodov) v tem času nabralo 216, približno tretjina od njih po upokojitvi. Med njimi je seveda veliko kratkih tekstov, ugank, zanimivih igric in matematično pobarvanih zgodbic, posameznih domiselnih nalog in njihovih rešitev, nekaj ocen slovenskih knjig, a prispevala je tudi daljše (za srednješolce primerne) razprave, nekatere med njimi v več delih (npr. o topologiji, filotaksi, mavrici, matematiki in glasbi, velikih matematikih pretekle dobe), in poročila o aktualnih dogodkih, pomembnih za slovensko ali svetovno matematiko. Poleg objav v *Preseku* je o različnih matematičnih temah objavljala prispevke še v *Obzorniku za matematiko in fiziko* (14 zapisov), nekaj tudi v časopisu *Matematika v šoli* in v reviji *Gea*.

V biltenih Društva matematikov, fizikov in astronomov (DMFA) Slovenije so bili natisnjeni povzetki njenih predavanj, ki jih je po letu 2000 imela na strokovnih srečanjih ob občnih zborih društva. Seveda je tudi prej občasno predavala tako učiteljem kot dijakom, vendar njena predavanja niso bila nikjer objavljena. Za svoje pedagoško delo, usmerjeno v veliki meri v vzgojo bodočih učiteljev, in za svoj trud na področju popularizacije matematike je leta 1999 prejela društveno priznanje, leta 2002 pa je postala častna članica DMFA Slovenije. Strokovno pomoč je rada nudila tudi zasebno. Še v poznih letih so se nanjo npr. z raznimi geometrijskimi konstrukcijskimi nalogami obračali ljudje, ki so jo poznali.

Med kolegi je veljala za prijazno in prijetno sogovornico. Bila je zelo zgovorna; za pomenek z njo si si moral vzeti dovolj časa. Poleg matematike se je zanimala tudi za različne druge stvari, od drobnih vsakodnevnih opravil do strokovnih zadev, in o njih veliko vedela. O marsičem je imela izoblikovano mnenje, ki ga je znala vljudno in utemeljeno zagovarjati. Tisti, ki smo jo pobliže poznali, smo vedeli, da ji v življenju ni bilo lahko; pravzaprav si je svojo izobrazbo in položaj na univerzi izborila sama. Poleg službe je skrbela za dom in odraščajočega sina Matjaža; v prostem času pa je rada pletla, zase in za druge. Neizmerno je bila zadovoljna, ko si je pridobila lastno napol zgrajeno stanovanje s koščkom vrta v hiši v Spodnjih Gameljnah, čeprav je imela z njegovim dokončanjem še veliko dela. Največje veselje je imela z urejanjem vrta, na katerega je bila prav ponosna. Sploh je vse življenje imela rada naravo, dokler je mogla, je vsako leto hodila v gore in poleti taborit na morje. Ko je dobila vnuka in kmalu za njim še vnukinjo, pa je seveda velik del svojega časa in ljubeče pozornosti posvečala njima in njuni vzgoji. Tudi po upokojitvi je ostala delavna in matematično aktivna, saj je še vedno predavala na seminarjih in pisala članke. Tesnejše stike pa je obdržala le z nekaterimi svojimi kolegi z oddelka za matematiko in nekaterimi drugimi prijatelji. V poznih letih je sicer imela različne zdravstvene težave, ki jih je vdano prenašala, vendar njene smrti 16. junija 2020 ni pričakoval nihče. Poleg svojcev in sorodnikov je njeno nenadno dokončno slovo zelo prizadelo tudi mnoge njene kolege, prijatelje in znance.

Mag. Marija Vencelj ni sodila med vrhunske matematične raziskovalce in ni producirala pomembnih znanstvenih člankov, zato pa je z veliko ljubeznijo opravljala nujno potrebno delo pri prenašanju osnovnega matematičnega znanja na bodoče rodove, zlasti na bodoče generacije učiteljev.

Brez požrtvovalnih učiteljev, ki znajo približati matematiko in navdušenje za matematično misel učeči se mladini, ne more uspešno opravljati svojega osnovnega poslanstva nobena matematična šola, in visokošolska ni pri tem nobena izjema. To svojo nalogo je pokojna kolegica Vencljeva izpolnila v največji možni meri, za kar si zasluži vse naše priznanje.

Milan Hladnik

MaRS 2020

Od 28. do 30. julija letos je potekal že petnajsti tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje). Prvič je potekal preko spleta, za kar se lahko zahvalimo virusu COVID-19. Čeprav smo še dober teden pred začetkom tabora imeli vse pripravljeno za izvedbo v živo, so se plani po nasvetu zaposlenih na Nacionalnem inštitutu za javno zdravje in po pogovorih s predstavniki Ministrstva za notranje zadeve spremenili. V enem tednu smo na novo zasnovali tridnevni tabor in ga izvedli z veliko mero strokovnosti in entuziazma.

Slika 1. Posnetek zaslona pred večernim predavanjem dr. Lucijana Plevnika.

Pri organizaciji spletnega tabora je sodelovalo sedem mentorjev: dr. David Gajser, profesor matematike na II. gimnaziji Maribor in docent na FNM UM, Rok Havlas, doktorski študent matematike na Georg-August-Universität Göttingen, Žan Hafner Petrovski, magistrski študent IŠRM na FMF in FRI UL, Klara Drofenik, dodiplomska študentka IŠRM na FMF in FRI UL, Petra Podlogar in Nejc Zajc, dodiplomska študenta matematike na FMF UL, ter David Opalič, dodiplomski študent matematike na University of Cambridge. Pri organizaciji izvedbe v živo sta aktivno sodelovala še Jakob Svetina, dodiplomski študent finančne matematike na FMF UL, ter Simon Brezovnik, asistent in doktorski študent matematike na FNM UM. Tabora se je udeležilo 18 dijakinj in dijakov, žal pa zaradi spletne izvedbe niso vsi prisostvovali pri vseh aktivnostih.

Osrednja aktivnost tabora so bili, kot vsa leta doslej, MaRSovski projekti. Letos sta bila, če smo natančnejši, le dva projekta. Prvi z naslovom Preštevalna geometrija in drugi z naslovom Požrešni algoritmi. Delo na projektih je potekalo ob dopoldnevih, vsak dan približno tri šolske ure. Spoznavala se je teorija, reševale naloge, pogledali so se zanimivi primeri, odgovarjalo se je na vprašanja. Dijaki so pri tem aktivno sodelovali. Pri projektu Preštevalna geometrija se je obravnaval Schubertov račun, ki nam pomaga odgovoriti na vprašanja tipa: »Koliko premic seka dane 4 premice v prostoru?« Če so premice v splošni legi, je odgovor 2. Bralca, ki bi želel o tem vedeti več, vabimo na `mars.dmfa.si/povzetki-projektov/`, kjer lahko poišče članek Schubertov račun iz MaRSa 2018. Pri projektu Požrešni algoritmi so dijaki najprej spoznali osnove teorije grafov, nato pa Primov in Kruskalov algoritem za iskanje najcenejšega vpetega drevesa ter Dijkstrov algoritem za iskanje najkrajše poti med dvema vozliščema v danem grafu s pozitivno uteženimi povezavami. Delo na projektih smo zaključili na sklepnem dogodku imenovanem pristanek, kjer so skupine predstavile svoje delo.

Poleg projektov smo udeležencem pripravili tudi večerni predavanji. S Srbske akademije znanosti in umetnosti smo gostili dr. Đorđa Baralića, ki je predstavil več posplošitev Pascalovega izreka, ki pravi, da če v odsek stožnice narišemo šestkotnik v splošni legi, potem se trije pari nosilk nasprotnih stranic sekajo v (treh) točkah, ki so kolinearne. Premici skozi te tri točke pravimo Pascalova premica začetnega šestkotnika. Če točke šestkotnika permutiramo, lahko dobimo drugačen, morda izrojen šestkotnik, ki lahko ima drugačno Pascalovo premico. Popolna slika iz vseh 60 Pascalovih premic ima zelo zanimive lastnosti in je poznana kot Hexagrammum Mysticum. Predavatelj je omenil tudi Octagrammum Mysticum in več konstrukcij demonstriral v programu Cinderella.

Drugo predavanje z naslovom Matematični opis Rubikove kocke je pripravil dr. Lucijan Plevnik s FMF UL. Glavno vprašanje, na katerega je avtor odgovoril, je bilo: »Kako bi matematično opisali množico vseh možnih potez Rubikove kocke?« Kaj hitro lahko vidimo, da ima ta množica strukturo grupe. Najprej je predstavil osnove teorije grup in predstavil nekaj primerov, nato pa opisal grupno strukturo množice vseh možnih potez.

Na koncu smo ugotovili, do katerih postavitev Rubikove kocke je možno priti z veljavnimi potezami in poračunali center grupe vseh možnih potez (ki ni trivialen!). Po zaključku predavanja smo omenili možnosti študija matematike na FMF UL, FNM UM in FaMNIT UP.

Na urniku sta poleg dela na projektih in večernih predavanj bila še vzlet in pristanek. Na vzletu, uvodni aktivnosti tabora, smo se predstavili, prav tako pa smo predstavili potek dela, urnik in se razdelili po skupinah za projekte. Na pristanku smo predstavili delo na projektih in se zahvalili podpornikom. Uvod v pristanek, ki sta ga spisala udeleženca Alen in Vid, je poskrbel za prijeten začetek večernega programa. Na tem mestu omenimo še vsakodnevno neformalno nočno spletno druženje dijakov, ki se ga je z veseljem udeležila tudi večina posadke.

Odzivi po taboru so bili v glavnem pozitivni. Vsem je bilo zelo, zelo žal, da je tabor v živo odpadel. Organizatorji smo veseli, da smo izpeljali vsaj spletno verzijo in tako pridobili izkušnje dela z nadarjenimi preko spleta, vsak udeleženec pa je s seboj gotovo odnesel nekaj zase.

MaRS 2020 je imel finančno podporo v projektih RaST in SKOZ, ki ju financirata Republika Slovenija in Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada. Projekt RaST izvaja II. gimnazija Maribor za dijakinje in dijake kohezijske regije Vzhodna Slovenija, projekt SKOZ pa izvaja Gimnazija Vič za dijakinje in dijake kohezijske regije Zahodna Slovenija. Finančno nas je podprla tudi FNM UM, predavatelja je prispevala FMF UL. Zahvala gre seveda tudi DMFA Slovenije za logistično in finančno podporo.

David Gajser

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2020
Letnik 67, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Dodekaedra s pobarvanimi robovi – različna ali le zasukana (glej članek na straneh 52–61)?