IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2023
Letnik 70
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 70 • ŠT. 3 • STR. 81-120 • NOVEMBER 2023

C M Y K

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2023, letnik 70, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** tajnik@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664 **Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASI2X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 200 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

UČINEK METULJA IN REKURZIVNA ZAPOREDJA

UROŠ KUZMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2020): 37E05, 39A33

V članku so predstavljena tri preprosta enokoračna rekurzivna zaporedja, ki so občutljiva na začetne podatke. Z njimi ilustriramo fenomen, ki je v teoriji kaosa pogosto poimenovan kot učinek metulja.

BUTTERFLY EFFECT AND RECCURENCE RELATIONS

We present three simple examples of sequences that are given by a first order reccurence relation and are sensitive to the initial conditions. We use them to illustrate a phenomenon from the chaos theory which is often called the butterfly effect.

»It's not what you sell, it's how you sell it!« se je glasil slogan plakata, ki sem ga med nedavnim obiskom Združenih držav Amerike uzrl skozi okno. Zelo ne-akademska misel, ni kaj. Kljub temu se bom uvodoma naslonil nanjo. Znanost kot vsaka dejavnost piše številne zgodbe, od katerih le redke prestopijo meje strokovnih krogov. Številne anekdote, metode in rezultati kljub svojemu potencialu utonejo v pozabo. Obstajajo pa tudi take, ki so na videz nepomembne, a se nato zapišejo v zgodovino in celo v popkulturo. V tem članku predstavljam eno od najbolj znanih te, druge vrste.

V sedemdesetih letih preteklega stoletja je matematik in meteorolog Edward Norton Lorentz razvil model, s katerim je želel napovedovati razvoj vremena. Ker so bile zmogljivosti takratnih računalnikov bistveno šibkejše, je svoje izračune pogosto ponavljal in pri tem v model vstavil vrednost katere izmed kasnejših iteracij. Pri enem od tovrstnih preverjanj je med vnosom napravil zaokrožitveno napako. Ker je ta povzročila odstopanje od pričakovane rešitve, je sprva posumil, da gre za okvaro računalnika. Ko je račun ponovil še nekajkrat, je presenečen ugotovil, da je njegov model močno občutljiv na začetne podatke. Čeprav ta ugotovitev ni bila posebej revolucionarna – primere tovrstnih sistemov je že v 19. stoletuju opisoval Henri Poincaré – se je njen »how you sell it« moment zgodil desetletje kasneje. Po spletu okoliščin je namreč Lorentzovo predavanje o tej temi dobilo naslov v obliki vprašanja »Ali lahko utrip metuljevih kril sredi Brazilije povzroči tornado v Teksasu?« Tako je kljub dejstvu, da je bilo kasneje ugotovljeno, da vreme vendarle ni tako zelo spremenljivo, njegova numerična nespretnost botrovala rojstvu besedne zveze *učinek metulja* (angl. butterfly effect), ki je danes stalnica v teoriji kaosa in jo poznajo celo v Hollywoodu.

Če povzamem, gre za poljuden koncept, o katerem bi vas znali kdaj povprašali tudi vaši znanci ali dijaki. In ker je prav, da smo pedagogi na take trenutke pripravljeni, vam v tem sestavku ponujam nekaj matematičnih modelov tega fenomena. Konkretno, ogledali si ga bomo na primeru rekurzivnih zaporedij, ki jih bomo analizirali s pomočjo dvojiškega sistema in ilustrirali s pajčevinastimi diagrami, izdelanimi v Geogebri. V duhu uvoda pa začnimo z uganko in na filmski način.

Sherlock Holmes predstavi rekurzivna zaporedja

Naloga. Sherlock Holmes prispe na kraj zločina in v jezeru najde truplo. Takoj opravi meritve in ugotovi, da je temperatura jezera 5 °C, telesna temperatura pokojnika pa 9 °C. Po eni uri drugo meritev ponovi in ugotovi, da se je temperatura trupla spustila na 7 °C. Koliko časa pred njegovim prihodom se je zgodil umor?

Rešitev. Telesna temperatura se spreminja sorazmerno s temperaturno razliko med temperaturo trupla in temperaturo jezera. Natančneje, naj bo x_n telesna temperatura pokojnika po $n \in \mathbb{N}_0$ urah in T temperatura jezera. Potem lahko spreminjanje temperature x_n opišemo z zvezo

$$x_{n+1} = x_n - k(x_n - T),$$

kjer je $k > 0$ konstanta, ki je odvisna od fizikalnih lastnosti trupla.

Naj bo $m \in \mathbb{N}$ trenutek, ko je detektiv našel truplo. Glede na njegove meritve velja, da je $x_m = 9$ °C in $x_{m+1} = 7$ °C. Če oba podatka vstavimo v zgornjo zvezo, ugotovimo, da je $k = \frac{1}{2}$. Sedaj upoštevamo, da je začetna telesna temperatura enaka $x_0 = 37$ °C in opazujmo nadaljnje člene zaporedja:

$$\begin{aligned} x_1 &= 37\ {}^\circ\mathrm{C} - \frac{1}{2}(37\ {}^\circ\mathrm{C} - 5\ {}^\circ\mathrm{C}) = 21\ {}^\circ\mathrm{C}, \\ x_2 &= 21\ {}^\circ\mathrm{C} - \frac{1}{2}(21\ {}^\circ\mathrm{C} - 5\ {}^\circ\mathrm{C}) = 13\ {}^\circ\mathrm{C}, \\ x_3 &= 13\ {}^\circ\mathrm{C} - \frac{1}{2}(13\ {}^\circ\mathrm{C} - 5\ {}^\circ\mathrm{C}) = 9\ {}^\circ\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Prišli smo do odgovora, umor se je zgodil 3 ure pred detektivovim prihodom.

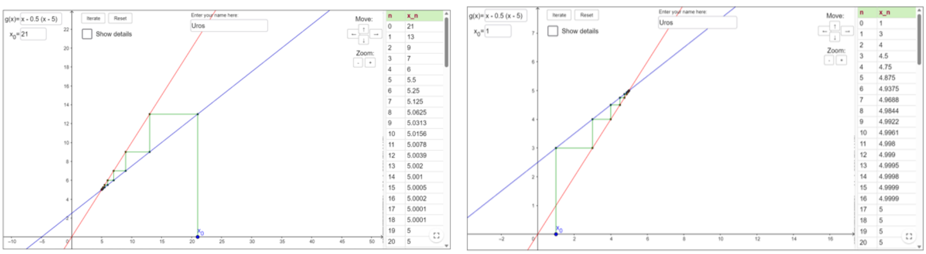
Kot napovedano, bomo uganko uporabili za vpeljavo osnovnih pojmov, ki jih nameravamo obravnavati. Ukvarjali se bomo torej z zaporedji, ki so podana z enokoračno rekurzivno zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$, kjer je $g\colon I \to I$

funkcija, ki interval $I \subseteq \mathbb{R}$ preslika sam vase. Zaloga vrednosti takega zaporedja je odvisna od začetnega člena $x_0 \in I$, naboru števil x_m, ki se za indekse $m \geq 1$ zvrstijo v njej, pa pravimo *orbita točke* x_0 ter jo označimo z $\mathcal{O}_g(x_0)$. Na primer, v zgornji nalogi smo imeli zvezo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n - 5) = g(x_n),$$

ki smo jo obravnavali na intervalu $I = [0, \infty)$, orbito točke $x_0 = 37$ pa so tvorila števila $\mathcal{O}_g(37) = \{21, 13, 9, 7, 6, \ldots\}$.

Kadar je zaporedje podano z enokoračno rekurzivno zvezo, lahko orbito poljubne točke ponazorimo tudi s t. i. *pajčevinastim diagramom* (angl. cobweb diagram). Postopek za njegovo konstrukcijo je naslednji: V koordinatni sistem narišemo graf funkcije g in simetralo lihih kvadrantov. Na abscisni osi označimo vrednost x_0 in jo z navpično črto povežemo z grafom funkcije. Višina, ki jo pri tem dosežemo, je enaka $x_1 = g(x_0)$. To vrednost z ordinatne prenesemo na abscisno os, tako da točko $(x_0, g(x_0))$ z vodoravno črto povežemo s simetralo. Projekcija presečišča na abscisno os podaja vrednost x_1. S ponavljanjem tega postopka lahko skiciramo tudi nadaljnje člene zaporedja, kar je prikazano na spodnjih slikah.



Slika 1. Orbiti zaporedja iz naloge pri začetnem pogoju $x_0 = 21$ in $x_0 = 1$.

Sliki prikazujeta člene zaporedja iz začetne naloge ob dveh različnih začetnih pogojih. Opazimo, da je za $x_0 < 5$ zaporedje naraščajoče, za $x_0 > 5$ pa padajoče, v obeh primerih pa je njegova limita enaka 5, kar lahko tudi računsko preverimo. To pomeni, da je razvoj orbit v tem primeru »zelo predvidljiv«, kar je ravno v nasprotju s fenomenom, ki ga želimo izpostaviti.

Učinek metulja in dvojiški decimalni zapis

Sedaj, ko smo uvedli osnovne pojme, podajmo formalno definicijo pojava, ki ga obravnavamo. Ker je to slogovno bolj primerno, bomo za zaporedja, ki ilustrirajo učinek metulja, rekli, da so *občutljiva na začetne podatke*.

Definicija 1. *Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ interval in $g\colon I \to I$ funkcija. Rekurzivno zaporedje, ki je podano z zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$,* je občutljivo na začetne podatke*, če obstaja $\beta > 0$, da za poljuben začetni pogoj $x_0 \in I$ in poljubno število $\epsilon > 0$ obstajata začetni pogoj $\widehat{x}_0 \in I$ in indeks $m \in \mathbb{N}$, da zanju in za m-ta elementa orbit $x_m \in \mathcal{O}_g(x_0)$ in $\widehat{x}_m \in \mathcal{O}_g(\widehat{x}_0)$ velja*

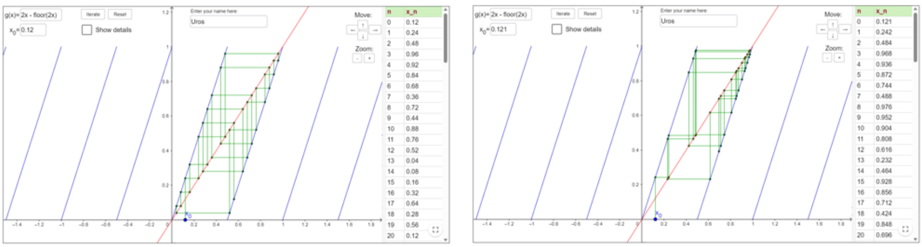
$$|x_0 - \widehat{x}_0| < \epsilon \ \text{ in } \ |x_m - \widehat{x}_m| \geq \beta.$$

Definicija pove, da je mogoče s »poljubno majhno« motnjo začetnega pogoja doseči »veliko spremembo« orbite, kar lahko interpretiramo kot tornado, ki nastane zaradi zamaha metuljevih kril. Oglejmo si dva primera zaporedij s to lastnostjo.

Primer 2. Naj bo $g\colon [0,1) \to [0,1)$ funkcija, ki je podana s predpisom

$$g(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor .$$

Geometrijsko to pomeni, da oddaljenost števila x od koordinatnega izhodišča najprej podvojimo, nato pa ji, v primeru, da smo pri tem zapustili interval $[0,1)$, odštejemo število 1. V literaturi g pogosto najdemo pod imenom *podvojitvena preslikava* (angl. doubling map). Zaporedje, podano z zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$, je občutljivo na začetne podatke, kar lepo ilustrirata že spodnji sliki. Vseeno poskrbimo še za formalni dokaz tega dejstva z uporabo dvojiškega decimalnega zapisa.



Slika 2. Orbiti podvojitvene preslikave pri začetnih pogojih $x_0 = 0{,}12$ in $x_0 = 0{,}121$.

Vsako število $x_0 \in [0,1)$ lahko zapišemo z naslednjo konvergentno vrsto:

$$x_0 = 0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)} = c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{4} + c_3 \cdot \frac{1}{8} + \cdots ,$$

kjer je $c_j \in \{0,1\}$. Tovrsten zapis ni enoličen, saj lahko števila s končnim decimalnim zapisom podamo na dva načina. Na primer $\frac{1}{2} = 0{,}1_{(2)} = 0{,}0\overline{1}_{(2)}$.

Naj bo število $x_0 \in [0,1)$ zapisano brez ponavljajočih se enic. Oglejmo si, kam ga slika g. Množenje s številom 2 pomeni, da se decimalna pika v dvojiškem zapisu premakne za eno mesto v desno, oz. da je

$$2x_0 = c_1{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,.$$

Celi del tega števila je torej enak številu c_1, kar pomeni, da je

$$g(x_0) = 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,.$$

Preslikava g iz dvojiškega zapisa števila x_0 torej izpusti prvo decimalko. Taki preslikavi rečemo tudi *operator zamika* (angl. shift map).

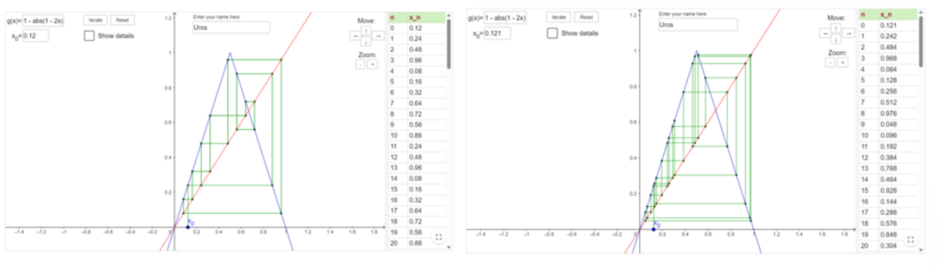
Sedaj poiščimo število $\widehat{x}_0 \in [0,1)$, ki bo lahko poljubno blizu števila x_0, hkrati pa bo njegova orbita po zadostnem številu korakov daleč stran od orbite števila x_0. Na primer,

$$\widehat{x}_0 = 0{,}c_1c_2\ldots c_m\tilde{c}_{m+1}c_{m+2}\ldots_{(2)}\,,$$

kjer je $\tilde{c}_{m+1} \neq c_{m+1}$ edina števka, ki se v zapisu števila $\widehat{x}_0$ ne ujema s števkami iz zapisa števila x_0. Razdalja med x_0 in $\widehat{x}_0$ je enaka $2^{-(m+1)}$ oz. poljubno majhna za dovolj velik $m \in \mathbb{N}$. Hkrati pa se, ko v m korakih izpustimo prvih m decimalk, člena x_m in $\widehat{x}_m$ ujemata povsod razen v prvi decimalki. Torej se razlikujeta za konstanto $\beta = \frac{1}{2}$. V geometrijskem smislu to pomeni, da smo na točkah x_0 in $\widehat{x}_0$ uporabljali funkcijo g toliko časa, da sta se istoležna člena obeh orbit znašla vsak v svoji polovici intervala $[0,1)$.

Primer 3. Naj bo $g\colon [0,1] \to [0,1]$ funkcija, ki je podana s predpisom

$$g(x) = 1 - |1-2x| = \min\{2x, 2-2x\}\,.$$



Slika 3. Orbiti šotorske preslikave pri začetnih pogojih $x_0 = 0{,}12$ in $x_0 = 0{,}121$.

Zaradi oblike njenega grafa ji pravimo *šotorska preslikava* (angl. tent map). Spodnji grafični prikaz dveh orbit znova namiguje, da je z njo podano zaporedje, ki je občutljivo na začetne podatke. Dokažimo tudi to dejstvo!

Naj bo število $x_0 \in [0,1)$ podano na enak način kot v predhodnem primeru. Potem sta števili, ki se pojavita v zgornjem minimumu, enaki:

$$2x_0 = c_1{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,,$$

$$2 - 2x_0 = \tilde{c}_1{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\ldots_{(2)}\,,$$

kjer za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja $c_j \neq \tilde{c}_j$ oz. se v drugem zapisu na vseh mestih pojavijo spremenjene števke. V primeru, da je $c_1 = 0$, je manjše prvo izmed obeh števil, sicer pa drugo. To pomeni, da je

$$g(x_0) = \begin{cases} 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,, & c_1 = 0, \\ 0{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\ldots_{(2)}\,, & c_1 = 1. \end{cases}$$

Funkcija g torej znova izpusti prvo decimalko, vendar pa v primeru, ko je ta enaka 1, dodatno spremeni še vse druge.

V primeru, ko je decimalni zapis števila $x_0 \in [0,1)$ končen in prva cifra enaka $c_1 = 1$, zgornji predpis vrne število, ki je podano z neskončnim nizom ponavljajočih se enic. Ker želimo g iterirati večkrat in ga uporabiti tudi za števila s tovrstno predstavitvijo, preverimo, da velja

$$g(0{,}c_1c_2\ldots c_{k-1}1_{(2)}) = \begin{cases} 0{,}c_2c_3\ldots c_{k-1}1_{(2)}, & c_1 = 0, \\ 0{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\ldots\tilde{c}_{k-1}0\overline{1}_{(2)}, & c_1 = 1. \end{cases}$$

$$g(0{,}c_1c_2\ldots c_{k-1}0\overline{1}_{(2)}) = \begin{cases} 0{,}c_2c_3\ldots c_{k-1}0\overline{1}_{(2)}, & c_1 = 0, \\ 0{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\ldots\tilde{c}_{k-1}1_{(2)}, & c_1 = 1. \end{cases}$$

Predpis za g je torej dobro definiran tudi v primeru neenoličnega decimalnega zapisa. To nam ustreza tudi zato, ker interval I vsebuje enico, ki jo predstavimo z nizom $1 = 0{,}\overline{1}_{(2)}$.

Sedaj potrdimo, da je zaporedje občutljivo na začetne podatke. Naj bo $x_0 \in [0,1]$ predstavljen z decimalkami c_j, $j \in \mathbb{N}$. Primerna motnja je

$$\widehat{x}_0 = 0{,}c_1c_2c_3\ldots c_{m-1}\tilde{c}_m c_{m+1}\tilde{c}_{m+2}\tilde{c}_{m+3}\ldots_{(2)}\,,$$

kjer je $\tilde{c}_j \neq c_j$ za $j \geq m$. Ker se števili x_0 in $\widehat{x}_0$ v prvih $m-1$ decimalkah ujemata, funkcija g v prvih $m-1$ iteracijah na njih deluje usklajeno. Ko jo nato uporabimo še enkrat, v orbiti dobimo števili, katerih decimalni zapis se razlikuje le v prvi števki. Razlika takih števil je enaka $\beta = \frac{1}{2}$, torej lahko to vrednost znova izberemo za občutljivostno konstanto. Ker je razlika med x_0 in $\widehat{x}_0$ kvečjemu 2^{-m+1} in s tem poljubno majhna, je dokaz končan.

Pekova preslikava

Primera, ki smo ju obravnavali doslej, lepo ilustrirata učinek metulja, a žal nimata interpretacije iz »vsakdanjega življenja«. Ker so laičnim poslušalcem najpogosteje zanimive prav te, v tem razdelku dodajam še primer t. i. *pekove preslikave* (angl. baker's map). Zanjo bomo morali rekurzivna zaporedja obravnavati tudi v ravnini. Natančneje, naše zaporedje bo podano s predpisom $(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n, y_n)$, kjer je $g\colon I \times J \to I \times J$ preslikava produkta intervalov $I, J \subseteq \mathbb{R}$ vase. Pogoj, pri katerem je tako zaporedje občutljivo na začetne pogoje, je analogen prejšnjemu, le oba začetna pogoja je treba obravnavati v ravnini in absolutno vrednost nadomestiti z evklidsko razdaljo. Formulacijo ustrezne definicije prepuščam bralcu, mi pa si oglejmo opisni in matematični model pekove preslikave.

Opazujmo peka, ki mesi testo. En korak njegove metode je sestavljen iz dveh delov. V prvem testo v obliki kvadrata enakomerno razvalja do oblike pravokotnika, ki je dvakrat daljši in dvakrat ožji od prvotnega kvadrata. Nato ta kos razpolovi in – gledano iz naše perspektive – desno polovico položi na vrh leve, da znova dobi kvadraten kos testa (glej sliko 4).

Slika 4. En korak pekove preslikave.

Ta postopek modeliramo z zaporedjem, ki je podano s preslikavo

$$g\colon [0,1) \times [0,1) \to [0,1) \times [0,1),$$

$$g(x,y) = \left(2x - \lfloor 2x \rfloor, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor\right).$$

Prvi del pekovega koraka ustreza linearni preslikavi $(x,y) \to \left(2x, \frac{y}{2}\right)$, ki koordinato x podvoji, koordinato y pa razpolovi. V drugem delu koraka premaknemo le točke, katerih abscisa po prvem delu preseže vrednost $x \geq 1$.

Te točke se v smeri abscise premaknejo za 1 v levo, v smeri ordinate pa za polovico te vrednosti navzgor. V primerjavi z resničnim modelom tako malce goljufamo le, ko namesto produkta dveh zaprtih intervalov obravnavamo produkt intervala $[0,1)$ s samim seboj. V nasprotnem primeru bi se predpis preslikave namreč precej zapletel.

Dokažimo, da je zaporedje, podano z zvezo $(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n, y_n)$, občutljivo na začetne podatke. Naj bo $(x_0, y_0) \in [0,1) \times [0,1)$. Uporabimo enolično verzijo dvojiškega sistema in zapišemo:

$$x_0 = 0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)}\,, \quad y_0 = 0{,}d_1d_2d_3\ldots_{(2)}\,, \quad c_j, d_j \in \{0,1\}\,,\ j \in \mathbb{N}.$$

Delovanje preslikave g na prvi koordinati se ujema s podvojitveno preslikavo iz predhodnega razdelka. V sliki tako dobimo število, ki mu priprada zapis brez prve decimalke. Po drugi strani pa je prav vrednost števke c_1 tista, ki pove, ali koordinati y_0 dodamo število $\frac{1}{2}$ ali ne. Natančneje, to storimo natanko takrat, ko je $c_1 = 1$ in se točka z absciso x_0 po podvojitvi širine znajde na desni polovici prečnega prereza. To pomeni, da sta koordinati naslednjega člena zaporedja enaki

$$x_1 = 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,, \quad y_1 = 0{,}c_1d_1d_2\ldots_{(2)}\,.$$

Če oba zapisa združimo, tako da števke člena y_0 nanizamo proti levi, števke člena x_0 pa proti desni, lahko delovanje preslikave g znova ilustriramo z operatorjem zamika, le da ga tokrat uporabimo na dvostranskem nizu oblike

$$\ldots, d_3, d_2, d_1|c_1, c_2, c_3\ldots \to \ldots, d_2, d_1, c_1|c_2, c_3, c_4, \ldots,$$

pri čemer znak $|$ pomeni pozicijo decimalne pike. Da je to zaporedje občutljivo na začetne podatke, tako sledi iz dejstva, da enaka lastnost velja za zaporedje, ki je bilo podano s podvojitveno preslikavo.

Nekaj malega o kaosu

Uvodoma smo povedali, da je besedna zveza »učinek metulja« stalnica teorije kaosa, vendar pa to ne pomeni, da vsebinsko podaja njen ekvivalent. Natančneje, občutljivost na začetne podatke predstavlja le najbolj znano izmed treh lastnosti, ki morajo veljati za kaotične sisteme oz. zaporedja. Opredelitvi preostalih dveh posvečam zadnji razdelek.

Spomnimo, da je podmnožica $U \subset I$ *gosta v* I, če se njeni elementi pojavijo v vsakem odprtem podintervalu $(a,b) \subset I$. Nadalje pravimo, da je $x_0 \in I$ *periodična točka* zaporedja, podanega z zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$, če za neki $k \in \mathbb{N}$ velja $x_k = x_0$. Poleg občutljivosti na začetne podatke morajo *kaotična zaporedja* izpolnjevati tudi naslednja pogoja [1]:

(1) Množica periodičnih točk je gosta v I.

(2) Za vsako število $x_0 \in I$, odprt interval $(a, b) \subset I$ in $\epsilon > 0$ obstajata $\widehat{x}_0 \in I$ in $m \in \mathbb{N}$, da zanju in za m-ti člen orbite $\widehat{x}_m \in \mathcal{O}_g(\widehat{x}_0)$ velja

$$|x_0 - \widehat{x}_0| < \epsilon \text{ in } \widehat{x}_m \in (a, b).$$

Drugo lastnost imenujemo *topološka tranzitivnost*, pove pa, da lahko s poljubno majhno motnjo zaporedja, ki se začne v x_0, dobimo zaporedje, katerega orbita obišče poljuben odprt interval. To pomeni, da lahko iz »vsakega intervala okoli x_0« pridemo »kamorkoli«, torej tudi v točke, ki niso niti blizu orbite $\mathcal{O}_g(x_0)$. Skupaj z občutljivostjo na začetne podatke in prvo lastnostjo, ki trdi, da v vsaki taki okolici obstajajo tudi točke, ki se po končno korakih vrnejo na začetek, tako dobimo preplet pogojev, ki ga najlepše opiše stavek: *Kaotični so sistemi, v katerih se s približnim začetkom niti približno ne da povedati, kaj se bo zgodilo.*

Za ilustracijo si oglejmo lastnosti (1) in (2) na primeru podvojitvene preslikave oz., ekvivalentno, na operatorju zamika. Spomnimo, za števke $c_j \in \{0, 1\}$, $j \in \mathbb{N}$, in enolično podan dvojiški zapis smo imeli operator

$$0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)} \longmapsto 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,.$$

Zanj so periodična natanko tista števila, katerih dvojiški zapis je v celoti periodičen. Naj bo $(a, b) \subset I$ nek odprt podinterval, ki vsebuje število

$$x = 0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)}\,.$$

Trdimo, da lahko poljubno blizu – torej tudi znotraj intervala (a, b) – najdemo periodično točko. Res, za dovolj velik $k \in \mathbb{N}$ je taka na primer

$$\tilde{x} = x = 0{,}\overline{c_1c_2c_3\ldots c_k}_{(2)},$$

kjer smo pri konstrukciji uporabili prvih k števk dvojiškega zapisa števila x.

Na tem mestu dodajmo tudi, da je pri rekurzivnih zaporedjih pogosta obravnava t. i. *predperiodičnih točk.* To so tiste, za katere za neka $k \in \mathbb{N}$ in $m \in \mathbb{N}_0$ velja $x_m = x_{m+k}$, vendar pa število m ni nujno ničelno. To pomeni, da je njihova orbita končna, a se periodični cikel zgodi šele po

[1]Večina virov se pri tem nasloni na knjigo [1].

nekaj korakih. Taka je na primer točka $x_0 = 1$ v šotorski preslikavi, saj je $\mathcal{O}_g(1) = \{0\}$. V primeru podvojitvene preslikave so predperiodične vse točke, katerih zapis je od nekje dalje periodičen. Te, tako kot v primeru desetiškega decimalnega zapisa, ustrezajo natanko racionalnim številom, ki so prav tako gosta znotraj intervala $[0, 1)$. Dokaz te trditve, vsaj po mojem mnenju, predstavlja zanimiv izziv za dokazovanja željne bralce.

Sedaj si oglejmo še topološko tranzitivnost. Zadostni pogoj zanjo je obstoj števila $x_0 \in I$, katerega orbita $\mathcal{O}_g(x_0)$ je gosta v I. Res, to pomeni, da se njeni elementi pojavijo v vseh odprtih intervalih, torej tudi v vnaprej predpisanem. Dokažimo, da operator zamika premore tako orbito. Vse možne končne nize števil 0 in 1 lahko razvrstimo v zaporedje

$$0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \ldots.$$

Naj bo $x_0 \in I$ število, v dvojiškem decimalnem zapisu katerega se pojavijo vsi ti nizi v natanko tem vrstnem redu:

$$x_0 = 0{,}0100011011\ldots_{(2)}.$$

Trdimo, da obstaja iterand tega števila, ki je lahko poljubno blizu kateremukoli elementu $x \in I$. Res, naj bo $k \in \mathbb{N}$ velik in naj bo $c_1c_2\ldots c_k$ niz, ki se pojavi na začetku števila x. Po ustreznem številu korakov se bo ta niz pojavil tudi na začetku števila x_0. Torej lahko dosežemo, da je za ustrezen $m \in \mathbb{N}$ člen $x_m \in \mathcal{O}_g(x_0)$ poljubno blizu x.

Tako, menim, da je osnovna intuicija, kaj pomenita besedni zvezi učinek metulja in kaotično zaporedje, vzpostavljena. Ostane pa mi le, da vam po klasični pedagoški navadi dodam še kako domačo nalogo – za vas, za znance ali za vaše dijake. Izkaže se, da so vsa tri zaporedja, ki sem jih predstavil, kaotična, kar pa je treba za zaporedji, podani s šotorsko in pekovo preslikavo, še potrditi. Dodatno menim, da je vredno oba primera iz drugega razdelka še malce raziskati tudi z vidika pajčevinastih diagramov. Pri tem si lahko, kot sem si jaz, pomagate s spletno stranjo [3]. Nazadnje dodajam tudi vir [2, poglavje 15], v katerem so predstavljeni nadaljnji primeri diskretnih kaotičnih sistemov, obravnavanih s t. i. simbolično dinamiko. V našem primeru je slednjo nadomestil decimalni dvojiški zapis na intervalu $[0, 1)$.

LITERATURA

[1] L. R. Devaney, *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[2] S. Smale, L. R. Devaney in M. W. Hirsch, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2004.

[3] *Cobweb plotter*, dostopno na `https://www.geogebra.org/m/QJ79IWCL`, ogled 6. 11. 2023.

NOBELOVA NAGRADA ZA FIZIKO 2020 – ČRNE LUKNJE

ANDREJA GOMBOC

Fakulteta za naravoslovje, Center za astrofiziko in kozmologijo
Univerza v Novi Gorici

Ključne besede: astronomija, črne luknje, Nobelova nagrada za fiziko

Nobelovo nagrado za fiziko so leta 2020 podelili znanstvenici in dvema znanstvenikoma za njihova odkritja o črnih luknjah. Roger Penrose je pokazal, da opis črnih lukenj sledi neposredno iz splošne teorije relativnosti. Andrea Ghez in Reinhard Genzel sta s svojima raziskovalnima skupinama opazovala gibanje zvezd v neposredni bližini središča naše Galaksije in dokazala, da se v njem skriva majhno in masivno telo, ki je lahko le supermasivna črna luknja.

NOBEL PRIZE FOR PHYSICS 2020 – BLACK HOLES

Nobel prize for physics in 2020 was awarded to three scientists, for their discoveries about black holes. Roger Penrose showed that black holes are a direct consequence of the general theory of relativity. Andrea Ghez and Reinhard Genzel discovered that an extremely heavy object governs the stars' orbits at the centre of our Galaxy. A supermassive black hole is the only currently known explanation.

Uvod

Nobelovo nagrado za fiziko za leto 2020 so dobili trije znanstveniki, ki so pomembno prispevali k razumevanju najbolj skrivnostnih teles v vesolju – črnih lukenj. Polovico nagrade je prejel Roger Penrose, ki je teoretično pokazal, da so črne luknje neposredna posledica Einsteinove splošne teorije relativnosti. Drugo polovico sta si razdelila Andrea Ghez in Reinhard Genzel, ki sta s svojima raziskovalnima skupinama opazovala gibanje zvezd v neposredni bližini središča naše Galaksije in dokazala, da se v njem skriva masivno telo, ki je tako kompaktno oziroma majhno, da je po današnjem razumevanju lahko le supermasivna črna luknja. Podoben, a krajši prispevek je izšel tudi v reviji Proteus [9].

Roger Penrose je s pronicljivimi matematičnimi metodami pokazal, da opis črnih lukenj sledi neposredno iz splošne teorije relativnosti. Črne luknje so tako goste, da iz njih ne more uiti niti svetloba. Penrose je leta 1965 pokazal, da črne luknje dejansko lahko nastanejo, in podrobno opisal njihove lastnosti. V svoji notranjosti skrivajo singularnost, za opis katere ne moremo uporabljati znanih zakonov fizike. Njegov prelomni članek še vedno velja za enega od najpomembnejših prispevkov k razvoju splošne teorije relativnosti.

Reinhard Genzel in Andrea Ghez sta vodila vsak svojo skupino astronomov, ki se je že od začetka devetdesetih let osredotočala na opazovanje

Slika 1. Britanski matematični fizik, matematik in filozof znanosti Sir Roger Penrose (1931–), nemški astrofizik Reinhard Genzel (1952–) in ameriška astrofizičarka Andrea Mia Ghez (1965–) so prejemniki Nobelove nagrade za fiziko za leto 2020. Vir fotografij: IOP Publishing; Tushna Commissariat, CC-BY-SA H Garching; UCLA, Christopher Dibble.

središča Galaksije, ki se nahaja v ozvezdju Strelec. Zelo natančno so izmerili orbite najsvetlejših zvezd na tem območju in obe skupini sta odkrili zelo masivno, nevidno telo, okoli katerega se gibljejo. Masa tega telesa je štiri milijone Sončevih mas, obsega pa območje manjše od Osončja. Genzel in Ghez sta razvila metode natančnega opazovanja skozi medzvezdni plin in prah z največjimi teleskopi. Na robu tehnoloških zmožnosti s prefinjenimi tehnikami, s katerimi se zmanjšujejo učinki popačitve Zemljinega ozračja, sta s posebnimi instrumenti izvedla dolgotrajne raziskave, ki so nam dale do takrat najbolj prepričljiv dokaz o obstoju supermasivne črne luknje v središču Galaksije.

Sir Roger Penrose je angleški matematični fizik, zaslužni profesor matematike na Univerzi v Oxfordu. Doktoriral je leta 1958 v Cambridgeu. Reinhard Genzel je nemški astrofizik, sodirektor Inštituta Max Planck za zunajzemeljsko fiziko, profesor na Univerzi Ludwiga Maximilliana v Münchnu in zaslužni profesor Univerze v Kaliforniji v Berkeleyu. Doktoriral je leta 1978 na Univerzi v Bonnu. Andrea Ghez je doktorirala na Kalifornijskem inštitutu za tehnologijo leta 1992. Od 1994 dela na Univerzi v Kaliforniji v Los Angelesu, kjer je profesorica za fiziko in astronomijo in vodja tamkajšnje skupine za raziskave središča naše Galaksije.

Andrea Ghez je prva astronomka in četrta ženska, ki je dobila Nobelovo nagrado za fiziko (od skupno 222 prejemnikov do 2020). Kar je dosegla, veliko pove o njej; to, da je bila prva oziroma četrta, pove več o sistemu. Ob prejemu nagrade je Andrea Ghez izjavila: »Zame je bilo vedno zelo pomembno spodbujati mlade ženske za znanost, zato mi Nobelova nagrada pomeni priložnost in odgovornost, da spodbujam naslednjo generacijo znanstvenic, ki so navdušene nad tovrstnim delom. Pomembno je imeti vzornice. Mislim, da ko vidiš osebe, ki so ti podobne, ali osebe, ki so drugačne od večine, da so uspešne, ti to kaže, da obstaja možnost, da lahko tudi ti to storiš, da je to področje odprto tudi zate. Pogosto je težko početi stvari, ki so drugačne, in če si še ti drugačna, obstaja priložnost, če imaš samozavest, da počneš stvari, ki so resnično drugačne. Imela sem srečo, da sem imela starše, učitelje in mentorje, ki so me zelo podpirali pri mojih zanimanjih. Na vsaki stopnji pa se je vedno našel kdo, ki je rekel ne, tega ne moreš narediti, ker si dekle. Zato sem se navadila ignorirati, ko so mi ljudje rekli, da nečesa ne morem narediti. Bili so trenutki, ko ljudje niso verjeli, da bodo naši pristopi delovali. A do takrat sem bila že precej dobro natrenirana v tem, da sem verjela vase.« [19]

Črne luknje so deli vesolja, v katerih je gravitacijski privlak tako močan, da iz njega ne more pobegniti nič, niti svetloba ne. Omejuje jih tako imenovano obzorje dogodkov, znotraj katerega bi bila ubežna hitrost višja od svetlobne hitrosti v praznem prostoru, ki znaša približno 300.000 kilometrov na sekundo. Ker nič ne more potovati hitreje od svetlobe, to pomeni, da iz tega območja ne moreta priti ne snov in ne svetloba. Iz njega tako ne moremo dobiti nobene informacije o tem, kaj se dogaja v notranjosti (kakšna je snov, temperatura in podobno). Črne luknje svoje skrivnosti res zelo dobro čuvajo. Od zunaj lahko iz lastnosti prostor-časa v bližini črne luknje ugotovimo le njeno maso, vrtilno količino in električni naboj.

Prava teorija za opis črnih lukenj je Einsteinova splošna teorija relativnosti, ki je bila objavljena novembra leta 1915 in jo opiše na prvi pogled preprosta enačba

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

v kateri so $G_{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor, $g_{\mu\nu}$ metrični tenzor, Λ kozmološka konstanta, $T_{\mu\nu}$ tenzor posplošene napetosti, G gravitacijska konstanta in c hitrost svetlobe v vakuumu. Podrobnejša obravnava enačbe in členov v njej je v [13]. Prve zabeležene zamisli o telesih, imenovanih tudi »temne zvezde«, ki bi bila tako masivna, da bi postala nevidna, saj svetloba ne bi mogla zapustiti njihovega površja, pa sta razvila Michell in Laplace dobro stoletje pred tem [10–12]. Tako preprosta ideja sovpada s prvo natančno rešitvijo Einsteinove enačbe. Ta rešitev, ki jo je leta 1916 predlagal Schwarzschild [17], opisuje gravitacijsko polje v prostoru okoli sferično simetrično porazdeljene mase brez električnega naboja in vrtilne količine za primer, ko je kozmološka konstanta enaka nič. V rešitvi nastopa umeritveni parameter $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, ki ga imenujemo Schwarzschildov polmer in predstavlja oddaljenost obzorja dogodkov, razdaljo, na kateri je ubežna hitrost okoli telesa z maso M enaka svetlobni hitrosti.

Črne luknje so robustna napoved splošne teorije relativnosti

Pomemben korak na poti odkrivanja črnih lukenj je bila določitev oddaljenosti kvazarjev – izvorov radijske svetlobe, ki so bili videti točkasti, njihova oddaljenost in narava pa sta bili velika uganka.

Leta 1963 je Maarten Schmidt s pomočjo kozmološkega rdečega premika spektralnih črt[1] kvazarja z oznako 3C 273 izmeril njegovo oddaljenost – nekaj milijard svetlobnih let od nas [16]. Podobno velike razdalje so kmalu zatem izmerili tudi za druge kvazarje. Iz njihovega navideznega sija na našem nebu in znane oddaljenosti so lahko izračunali njihov izsev. Ugotovili so, da iz zelo majhnega območja kvazarja (v nekaterih kvazarjih velikega le nekaj svetlobnih ur ali dni) lahko prihaja izsev, ki je primerljiv z izsevom vseh zvezd v več sto običajnih galaksijah skupaj (vsaka od njih sestavljena iz več sto milijard zvezd). Kot možen vir te ogromne energije so predlagali gravitacijsko energijo, ki se sprosti ob sesedanju telesa na velikost Schwarzschildovega polmera [17]. (Današnji model kvazarjev in drugih vrst aktivnih galaktičnih jeder opiše njihove opazovane lastnosti s supermasivno črno luknjo, ki požira snov – ogromna količina energije prihaja od snovi, ki pada proti črni luknji, se zbira v disk okoli nje in izgublja gravitacijsko energijo, ta pa se pretvori v toploto in svetlobo.)

Schmidtova določitev oddaljenosti kvazarjev je spodbudila Rogerja Penrosa, da je razmišljal o tem, ali lahko črne luknje nastanejo tudi v realističnih, nesimetričnih primerih. V tem času je bilo že sprejeto, da dovolj velika in krogelno simetrična masa ob kolapsu ne doseže ravnovesnega stanja in se krči vse do fizikalne singularnosti pri $r = 0$. Prav tako so vedeli, da ko se telo seseda skozi svoj Schwarzschildov polmer, lokalni opazovalec, ki se giblje skupaj s površjem telesa, ne opazi nič posebnega. To niti ni presenetljivo, saj se za dovolj velike mase to zgodi pri gostotah, ki niso zelo visoke (če se spomnimo »temnih zvezd« Michella in Laplacea, so imele gostote enake gostoti Sonca oziroma Zemlje [10–12]). Drugače je za zunanjega opazovalca, za katerega je videti, kot da sesedanje telesa proti Schwarzschildovemu polmeru traja neskončno dolgo (in nikoli ne vidi, da bi se telo skrčilo pod ta polmer, saj ne more videti v črno luknjo).

V notranjosti črne luknje pa nastane težava s singularnostjo pri $r = 0$ in z njenim fizikalnim opisom. Ali je ta singularnost le posledica privzete simetrije ali nastane tudi v primerih, ki nimajo nikakršne simetrije?

Odgovor oziroma orodje na poti do njega se je Rogerju Penroseu utrnilo jeseni leta 1964 med sprehodom [14]. Razvil je posebno matematično

[1] Zaradi širjenja vesolja se valovna dolžina svetlobe v času potovanja od izvora do opazovalca raztegne za enak faktor, kot se v tem času razširi vesolje. Valovna dolžina svetlobe se poveča ali se, kot pogosto rečemo, premakne proti rdečemu delu spektra. Dlje ko je izvor od opazovalca, dlje časa potuje svetloba in večji je ta premik.

metodo, imenovano »ujeta površina«, ki jo kaže slika 2. Ujeta površina je sklenjena dvodimenzionalna površina, ki ima lastnost, da vsi svetlobni žarki, ki so pravokotni nanjo, konvergirajo/se stikajo v prihodnosti [15]. Za primerjavo, površje krogle v ravnem prostoru ni takšno: žarki, ki gredo vanj, konvergirajo, žarki, ki prihajajo iz njega, pa divergirajo/se razhajajo. Od ujete površine pa vsi žarki (v vse smeri) konvergirajo. Takšne ujete površine so posledica močne gravitacije in so, v primeru krogelno simetrične mase, površja krogel s polmerom manjšim od Schwarzschildovega. Vsi svetlobni žarki skozi nje kažejo proti središču.

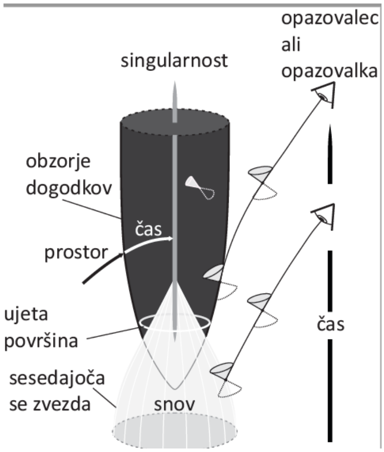
Posledica ujete površine je, da tok časa neizogibno prinese opazovalca, ki je prečkal obzorje dogodkov, v končnem času v središče $r = 0$, kjer se čas konča. Iz Schwarzschildove rešitve namreč sledi, da se ob prečkanju obzorja dogodkov vlogi časovne in radialne koordinate zamenjata – smer proti središču postane smer toka časa (slika 2). Zato je tako težko oziroma nemogoče priti iz notranjosti črne luknje, kot je nemogoče potovati nazaj v času.

Roger Penrose je pokazal, da je ujete površine mogoče najti tudi v splošnem, nesimetričnem primeru in da njihov obstoj ni odvisen od predpostavke, da obstaja neka vrsta simetrije. Pokazal je tudi, da ko enkrat nastane ujeta površina, v njej neizogibno nastane tudi točka singularnosti. Njen nastanek je robustna in neizogibna posledica oziroma napoved splošne teorije relativnosti.

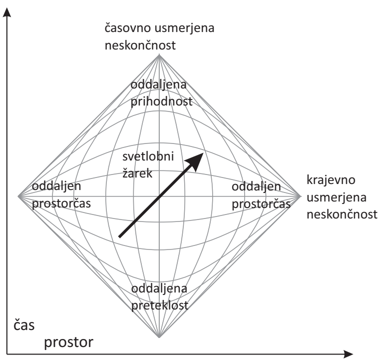
Supermasivna črna luknja v središču naše Galaksije

Drugi del Nobelove nagrade sta dobila Andrea Ghez in Reinhard Genzel za odkritje masivnega, kompaktnega telesa v središču naše Galaksije. Supermasivne črne luknje, z masami od sto tisoč do deset milijard mas Sonca, se ne nahajajo samo v središčih kvazarjev in drugih vrst aktivnih galaksij, v katerih požirajo snov. V mnogih, če ne celo v vseh velikih galaksijah se v središču skrivajo supermasivne črne luknje, ki v veliki večini galaksij okoli sebe nimajo diska snovi, ki bi močno svetil. Tem pravimo, da so »lačne« ali »speče« črne luknje, in njihovim galaksijam, da so normalne ali neaktivne. Prisotnost velike mase v njihovih središčih izdaja gibanje plina in zvezd v njihovi bližini.

A kako lahko dokažemo, da je ta masa v središču črna luknja in ne kaj drugega? Črne luknje, tudi supermasivne, so v astronomskem merilu zelo majčkeni objekti: na primer, črna luknja z maso milijon Sončevih mas ima polmer, ki je le štirikrat večji od polmera Sonca oziroma je le dva odstotka Zemljine oddaljenosti od Sonca; črna luknja z milijardo mas Sonca ima polmer, ki je enak oddaljenosti Urana od Sonca. Največje znane supermasivne črne luknje so torej primerljive z velikostjo Osončja (nekaj svetlobnih ur),



Slika 2. Diagram na osnovi slike iz Penrosevega članka [15] prikazuje sesedanje zvezde v črno luknjo. Vodoravna ravnina predstavlja prostor, na navpični osi je čas. Ko se zvezda skrči pod obzorje dogodkov, nastane črna luknja. Znotraj nje se snov sesede še naprej, v točko singularnosti. Svetlobni stožci se v ukrivljenem prostor-času nagibajo »navznoter«, proti masi. Na obzorju dogodkov je zunanji rob časovnega stožca navpičen – svetloba bi potrebovala neskončno časa, da bi prišla ven oz. zunanji opazovalec vidi »zamrznjeno« sliko na obzorju dogodkov. Znotraj črne luknje so vsi svetlobni stožci obrnjeni proti središču, singularnosti, in svetloba ne more pobegniti. Časovna in radialna koordinata na obzorju dogodkov zamenjata vlogi.



Slika 3. V Penroseovem diagramu je neskončen 4-dimenzionalen prostor-čas preslikan na končno velik 2-dimenzionalni lik. Prostorska koordinata je na vodoravni osi, čas teče navpično navzgor. Svetlobni žarki so pod kotom 45° glede na osi.

kar je majčkeno v primerjavi z velikostjo galaksij (naša Galaksija ima premer sto tisoč svetlobnih let) in razdaljami med njimi.

Za neposredni dokaz, da je masa v središču neke druge galaksije črna luknja in ne, na primer, zelo gosta kopica zvezd, bi potrebovali instrumente z zelo dobro kotno ločljivostjo, s katerimi bi na oddaljenosti več milijonov ali celo milijard svetlobnih let razločili podrobnosti na razdaljah velikostnega reda Schwarzschildovega polmera. Edini primer do leta 2020, ko je bila podeljena omenjena nagrada, v katerem jim je uspelo posneti sliko diska snovi v neposredni okolici črne luknje, je radijski posnetek središča aktivne galaksije M 87, ki ga je naredila mreža Event Horizon Telescope in je aprila leta 2019 obšel svet [3]. Dosežena kotna ločljivost v tem primeru je podobna tisti, ki bi jo morali imeti, da bi, sedeč v Evropi, brali časopis v New Yorku. (Maja 2022 je omenjena mreža objavila tudi radijski posnetek središča naše Galaksije [18].)

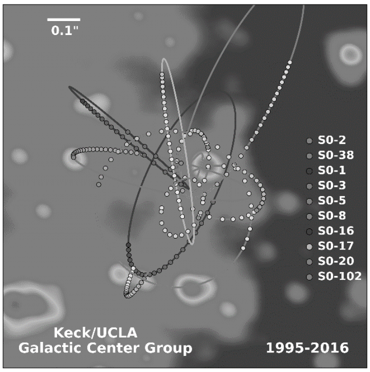
Oči radovednih znanstvenikov so se že pred tem obrnile proti najbližjemu galaktičnemu centru – središču naše Galaksije. To je »samo« okrog petindvajset tisoč svetlobnih let daleč od nas. V središču je radijski izvor z oznako Sgr A* in okrog njega nekaj svetlobnih let velika kopica zvezd in plina. Njihovo gibanje razkriva gravitacijski potencial v središču in s tem porazdelitev mase v njem. Če je masa zbrana v enem samem, majhnem objektu – črni luknji –, potem so hitrosti zvezd, ki se nahajajo na različnih razdaljah r od središča, obratno sorazmerne s kvadratnim korenom razdalje r, podobno kot se, na primer, spreminjajo obhodne hitrosti planetov z razdaljo od Sonca. Če pa je masa porazdeljena po širšem delu prostora, potem hitrosti zvezd z razdaljo r padajo počasneje ali celo naraščajo.

Da bi razvozlala skrivnost središča Galaksije, sta se v devetdesetih letih dvajsetega stoletja Andrea Ghez in Reinhard Genzel s svojima raziskovalnima skupinama lotila opazovanja gibanja zvezd v njem [4–8]. Skupina Andree Ghez je uporabila teleskope na observatoriju na Havajih, skupina Reinharda Genzela teleskope Evropskega južnega observatorija v Čilu. Plin in prah v disku Galaksije povzročata ekstinkcijo (oslabitev) vidne svetlobe. Galaktično središče je v tej svetlobi »zakrito« pred našim pogledom, zato so se odločili za opazovanja v infrardeči svetlobi, ki lahko prodre tudi skozi snov v galaktičnem disku.

Glavni izziv je bilo doseči dovolj dobro kotno ločljivost oziroma dovolj »oster pogled«, da so lahko kar se da natančno določili položaje posameznih zvezd ter nato, s ponavljanjem opazovanj čez vrsto let, izmerili spremembe njihovih položajev in s tem gibanje.

Da so lahko odpravili vpliv turbulenc v Zemljinem ozračju, ki povzročijo navidezno migotanje zvezd in poslabšajo ločljivost posnetkov, so v zgodnjih opazovanjih uporabili posebno tehniko, s katero posnamejo zelo kratke posnetke (s časom osvetlitve desetinko sekunde), jih med seboj poravnajo, tako da se vzorci zvezd »ujamejo«, jih seštejejo in tako dobijo ostrejše slike. Ugotovili so, da so izmerjene hitrosti zvezd obratno sorazmerne s kvadratnim korenom razdalje zvezd od središča Galaksije, točno tako, kot bi pričakovali, če se v njem skriva le eno samo, kompaktno telo. S to tehniko se jim je središču Galaksije uspelo približati na približno dvanajst svetlobnih dni.

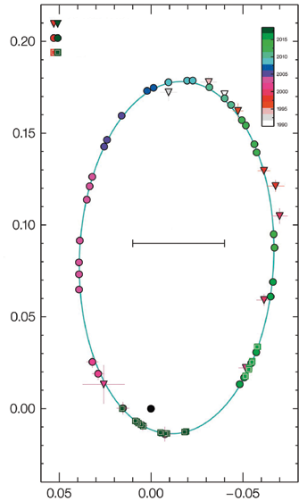
V novem tisočletju so začeli na obeh observatorijih uporabljati prilagodljivo optiko [2]. Pri tej tehniki usmerijo laserski snop blizu opazovanega objekta na nebu in visoko v ozračju ustvarijo umetno zvezdo. Nato opazujejo oba – umetno zvezdo in objekt opazovanja – ter s hitrim spreminjanjem oblike zrcala v teleskopu v realnem času kompenzirajo popačitve slike, ki nastanejo zaradi turbulenc v ozračju, in poskušajo doseči čim ostrejšo sliko umetne zvezde. S tem izostrijo oziroma odpravijo migotanje zaradi ozračja tudi pri sliki opazovanega objekta. Ta tehnika omogoča ostrejšo sliko in tudi daljše čase osvetlitve ter s tem opazovanje šibkejših zvezd. Uporaba prilagodljive optike je obe skupini pripeljala še bližje središču Galaksije. Slika 4 prikazuje gibanje zvezd v območju približno en svetlobni mesec okoli središča. Med njimi je posebej zanimiva zvezda z oznako S2 oziroma S0-2: središče Galaksije obkroži v samo šestnajstih letih (za primerjavo, Sonce potrebuje več kot dvesto milijonov let za en obhod), giblje se po zelo sploščeni eliptični tirnici in se izvoru Sgr A* približa na zgolj sedemnajst svetlobnih ur.



Slika 4. Tirnice zvezd v bližini središča naše Galaksije v obdobju 1995 do 2016, kot jih je izmerila skupina Andree Ghez. Bela črta označuje tirnico zvezde S0-2 oziroma S2. Vir: Keck/UCLA Galactic Center Group.

Rezultati obeh raziskovalnih skupin so se odlično ujemali. Pokazali so, da se v središču Galaksije nahaja masa za približno štiri milijone mas Sonca. Ta masa je zelo zgoščena, saj se nahaja znotraj tirnice zvezde S2 – znotraj območja s polmerom, ki je samo stopetindvajsetkratnik Zemljine razdalje od Sonca. Prispevek zvezd in ostankov zvezd k tej masi je zanemarljiv, torej gre za zelo kompaktno telo. Najbolj znanstveno smiselna in trdna razlaga je, da je ta kompakten objekt v središču Galaksije supermasivna črna luknja.

Obe raziskovalni skupini še naprej budno spremljata dogajanje v središču Galaksije. Posebej natančno so spremljali zvezdo S2, ko je maja leta 2018



Slika 5. Tirnica zvezde S2 okoli središča naše Galaksije, kot so jo določili na podlagi petindvajset let opazovanj s teleskopi Evropskega južnega observatorija v Čilu [1]. Oznake (trikotniki, krogi, kvadrati) označujejo položaj zvezde izmerjen z različnimi instrumenti (SHARP na teleskopu New Technology Telescope – NTT, NACO in GRAVITY na Zelo velikem teleskopu (Very Large Telescope – VLT)). Odtenek sive označuje leto meritve položaja. Daljica v notranjosti tirnice prikazuje razdaljo 5000 r_s oziroma 400 razdalj Zemlja-Sonce. (Velikosti zvezde in črne luknje nista v pravilnem razmerju z razdaljami). Vir: ESO/MPE/GRAVITY Collaboration.

potovala skozi pericenter – točko na svoji tirnici, v kateri se najbolj približa Sgr A* [5] (slika 5).

Ob tem »mimoletu« jim je uspelo izmeriti precesijo njenega pericentra oziroma sukanje eliptične tirnice zvezde okoli črne luknje in gravitacijski rdeči premik, ki sta bila povsem v skladu z napovedmi Einsteinove splošne teorije relativnosti – teorije, ki je v sto letih obstoja uspešno prestala številne preizkuse. Še ena njena napoved – gravitacijski valovi – nam od prve neposredne detekcije leta 2015 (nagrajene z Nobelovo nagrado za fiziko leta 2017) odpira novo okno v vesolje in nam pomaga razkrivati skrivnosti črnih lukenj na povsem nov način.

LITERATURA

[1] R. Abuter et al., *Gravity Collaboration, Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole*, Astronomy and Astrophysics, **615** (2018), doi: 10.1051/0004-6361/201833718.

[2] H. W. Babcock, *The possibility of compensating astronomical seeing*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, **65** (1953) 386, 229, doi: 10.1086/126606.

[3] S. Doeleman et al., *Focus on the First Event Horizon Telescope Results*, The Astrophysical Journal Letters, **875** (2019) 1, doi: 10.3847/2041-8213/ab0f43.

[4] R. Genzel, R. Schödel, T. Ott, A. Eckart, T. Alexander, F. Lacombe, D. Rouan et al., *Near-infrared flares from accreting gas around the supermassive black hole at the Galactic centre*, Nature, **425** (2003) 6961, 934–937, doi: 10.1038/nature02065.

[5] R. Genzel, F. Eisenhauer in S. Gillessen, *The Galactic center massive black hole and nuclear star cluster*, Reviews of Modern Physics, **82** (2010) 4, 3121–3195, doi: 10.1103/RevModPhys.82.3121.

[6] A. M. Ghez, B. L. Klein, M. Morris in E. E. Becklin, *High proper-motion stars in the vicinity of Sagittarius A*: Evidence for a supermassive black hole at the center of our galaxy*, The Astrophysical Journal, **509** (1998) 2, 678-686, doi: 10.1086/306528.

[7] A. M. Ghez, G. Duchene, K. Matthews, S. D. Hornstein, A. Tanner, J. Larkin, M. Morris et al., *The First Measurement of Spectral Lines in a Short-Period Star Bound to the Galaxy's Central Black Hole: A Paradox of Youth*, The Astrophysical Journal, **586** (2003) 2, L127–L131, doi: 10.1086/374804.

[8] A. M. Ghez, S. Salim, N. N. Weinberg, J. R. Lu, T. Do, J. K. Dunn, K. Matthews et al., *Measuring distance and properties of the Milky Way's central supermassive black hole with stellar orbits*, The Astrophysical Journal, *689* (2008) 2, 1044–1062, doi: 10.1086/592738.

[9] A. Gomboc, *Črne luknje – od prve zamisli do Nobelove nagrade*, Proteus, **83** (2021), 6, 250–6.

[10] P. S. Laplace, *Beweis des Satzes, dass die anziehende Kraft bey einem Weltkörper so gross seyn könne, dass das Licht davon nicht ausströmen kann*, Allgemeine Geographische Ephemeriden, **4** (1799) 1-6.

[11] P. S. Laplace,*Exposition du Système du Monde, Part II*, 1796.

[12] J. Michell, *On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, & c. of the Fixed Stars, in Consequence of the Diminution of the Velocity of Their Light, in Case Such a Diminution Should be Found to Take Place in any of Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would be Farther Necessary for That Purpose*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **74** (1783) 35–57.

[13] A. Mohorič in A. Čadež, *Gravitacijski valovi*, Obzornik mat. fiz., **63** (2016) 2.

[14] R. Penrose, *Asymptotic properties of fields and space-times*, Physical Review Letters, **10** (1963) 2, 66–68, doi: 10.1103/PhysRevLett.10.66.

[15] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Physical Review Letters, **14** (1965) 3, 57–9, doi: 10.1103/PhysRevLett.14.57.

[16] M. Schmidt, *3C 273: A star-like object with large red-shift*, Nature, **197** (1963) 4872, 1040, doi: 10.1038/1971040a0.

[17] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld enies Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademi der Wissenschaften, 1916.

[18] *The Event Horizon Telescope Collaboration*, First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results, I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way, The Astrophysical Journal Letters, **930** (2022) L12. doi: 10.3847/2041-8213/ac6674.

[19] *About Andrea Ghez*, dostopno na `https://www.astro.ucla.edu/~ghez/`, ogled 20. 11. 2023.

Poročilo o 77. Občnem zboru DMFA Slovenije na Bledu

77. Občni zbor DMFA Slovenije je potekal v petek, 15. septembra 2023 v Festivalni dvorani na Bledu.

Po ugotovitvi sklepčnosti, imenovanju delovnega predsedstva in potrditvi dnevnega reda so prisotni člani društva najprej poslušali poročilo predsednika DMFA Slovenije prof. dr. Primoža Potočnika o delovanju društva v zadnjem obdobju. Predsednik je v poročilu izpostavil številne uspehe (organizacija EGMO 2023, organizacija 18 državnih tekmovanj v znanju z različnimi spremljevalnimi aktivnostmi, izjemne uspehe na mednarodnih tekmovanjih, različne promocijske in strokovne aktivnosti, delovanje v mednarodnih združenjih), opisal je spremembe v založniški dejavnosti, stanje in načrte za Plemljevo vilo, ukrepe za izboljšanje finančne situacije in pojasnil različne organizacijske spremembe v delovanju društva.

Nato so prisotni člani po krajših razpravah potrdili tri pomembne sklepe. V zvezi z delovanjem društva je Občni zbor sprejel sklep, da se na izpraznjena mesta v Upravnem odboru DMFA Slovenije imenujejo Dunja Fabjan (tajnica komisije za popularizacijo astronomije), Vesna Parkelj (tajnica komisije za popularizacijo matematike v SŠ) in Jure Japelj (predsednik Odbora za astronomijo), mesto tajnika DMFA Slovenije pa ostane nezasedeno do rednih volitev, ki bodo v letu 2024. V zvezi s članarino je Občni zbor sprejel sklep, da članarina za leto 2024 znaša 25,00 EUR za vsakega člana ali članico, z izjemo novih članov, ki prva tri leta plačujejo članarino v višini 10,00 EUR. Drugi popusti se ukinejo. V zvezi s kotizacijami za tekmovanja pa je Občni zbor sprejel sklep, da ostanejo kotizacije v šolskem letu 2023/24 enake kotizacijam v letu 2022/23.

Na slavnostnem delu Občnega zbora je bila izvoljena nova častna članica **prof. dr. Nežka Mramor Kosta**, podeljenih pa je bilo tudi **šest društvenih priznanj** za prizadevno pedagoško in strokovno delo. Novi častni članici in vsem prejemnikom priznanj iskreno čestitamo!

Ob koncu Občnega zbora so prisotni člani izrazili še nekaj pohval in pobud, ki jih bo poskušal Upravni odbor realizirati v prihodnjem obdobju. Bilten Občnega zbora s poročili bo pripravljen in objavljen na spletišču DMFA v prihodnjih tednih.

Občni zbor se je zaključil z zahvalo predsednika prof. dr. Primoža Potočnika vsem, ki prispevajo k uspešnemu delu društva, še posebej pa članom

Upravnega odbora in članom tekmovalnih komisij za res veliko opravljenega dela. Prijetno vzdušje se je nadaljevalo tudi na večerji v hotelu Bledrose in naslednji dan na **Konferenci slovenskih matematikov ob 150. obletnici rojstva akad. prof. dr. Josipa Plemlja**.

Boštjan Kuzman

Popravek

Popravek k članku O predstavitvi vseh praštevil s celoštevilskimi kvadratnimi formami dveh spremenljivk (Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 70, številka 2, strani 41–48).

V članku je napačno zapisana inštitucija prvega avtorja Marjana Jenka – pravilna je Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo UL. Tiskarski škrat jo je zagodel tudi pri zapisu imena drugega avtorja, Marka Petkovška, v glavi strani.

Za neljubi napaki se iskreno opravičujemo.

Uredništvo

Lovro Dretnik, Marica Kamplet, Boštjan Kuzman, Bela Szomi, Soraya Sternad in Jasmina Žel prejemniki priznanj DMFA Slovenije za leto 2023

Društvo DMFA Slovenije že od leta 1968 podeljuje društvena priznanja posameznikom za uspešno pedagoško delo z mladimi ali za strokovno dejavnost, ter posameznikom ali ustanovam za uspešno sodelovanje z Društvom. Na 77. občnem zboru DMFA Slovenije 15. septembra 2023 v Festivalni dvorani na Bledu je bilo podeljenih šest priznanj. Prejeli so jih **Lovro Dretnik**, profesor matematike, za *dolgoletno delo v državni tekmovalni komisiji ter za vsestransko kvalitetno strokovno delo*. **Marica Kamplet**, učiteljica matematike in fizike na OŠ Hruševec, Šentjur, za *prizadevno delo z mladimi, posebej na področju astronomije*, **dr. Boštjan Kuzman**, visokošolski učitelj za matematiko na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, za *prispevke k promociji matematike, delu z mladimi in delovanju društva*, **Béla Szomi**, učitelj matematike in fizike na OŠ Domžale, za *izjemno delo pri poučevanju in navduševanju mladih za matematiko, fiziko in astronomijo*, **Soraya Sternad**, profesorica matematike in upokojena urednica in avtorica matematičnih učbenikov, za *trajen prispevek h kvaliteti slovenskih učbenikov*, ter **Jasmina Žel**, učiteljica matematike in fizike na OŠ Ljudski vrt Ptuj, za *uspešno pedagoško delo z nadarjenimi, posebej pri fiziki in astronomiji.* Iskrene čestitke vsem prejemnikom!

Lovro Dretnik, Marica Kamplet, Boštjan Kuzman, Bela Szomi, Soraya Sternad in Jasmina Žel prejemniki priznanj DMFA Slovenije za leto 2023

Slika 1. Priznanja DMFA Slovenije 2023.

Utemeljitve

Lovro Dretnik, profesor matematike, za dolgoletno delo v državni tekmovalni komisiji ter za vsestransko kvalitetno strokovno delo.

Lovro Dretnik je leta 2002 diplomiral na Fakulteti za naravoslovje in matematiko v Mariboru kot enopredmetni profesor matematike, leta 2007 pa je opravil specializacijo iz managementa na Fakulteti za management v Kopru. Od leta 2008 do leta 2016 je bil član in tajnik državne predmetne komisije za poklicno maturo iz matematike v okviru Republiškega izpitnega centra, leta 2008 je postal višji predavatelj za predmete Poslovna matematika s statistiko, Uporabna matematika v logistiki in Kvantitativne metode v logistiki in je trenutno nosilec teh predmetov na štirih višjih šolah. Hkrati se redno udeležuje strokovnih, znanstvenih in mednarodnih konferenc in pridobiva ter posreduje dobre prakse poučevanja matematike ter sestave matematičnih nalog, kjer je kritično mišljenje bistvenega pomena.

Od leta 2008 je član državne tekmovalne komisije pri DMFA Slovenije za matematično tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol in od leta 2015 tudi njen predsednik. Pri tem se je srečal s številnimi izzivi, ki jih je vedno reševal v prid tekmovanja, tekmovalcev in njihovih mentorjev. Z dolgoletnim strokovnim in predanim delom je dosegel, da tekmovanje poteka na visoki ravni in se ga z veseljem udeležujejo številni dijaki in dijakinje, njegovo veselje in predanost poučevanju matematike, kvalitetno sestavljanje tekmovalnih nalog in navduševanje mladih glede tekmovanj pa strokovno bogatijo in motivirajo tudi njegove sodelavce v tekmovalni komisiji.

Marica Kamplet, učiteljica matematike in fizike na OŠ Hruševec – Šentjur, za prizadevno delo z mladimi, posebej na področju astronomije.

Marica Kamplet je zaključila študij na Pedagoški akademiji v Mariboru. Leta 1996 je diplomirala na Pedagoški fakulteti v Mariboru, smer matematika in fizika. Na OŠ Hruševec – Šentjur poučuje matematiko in fiziko, občasno pa tudi izbirne predmete iz astronomije. Predanost poučevanju, strokovnost in veselje do poučevanja so občutile generacije nadarjenih učencev, ki jih je v prostem času pripravljala na tekmovanja. Postavila je visoke standarde v izobraževanju. Znana je po tem, da presega pričakovanja učencev in spodbuja njihovo željo po znanju. Njeni učenci na tekmovanjih iz matematike, fizike in astronomije posegajo po najvišjih mestih v državi.

Marica Kamplet je tudi aktivna članica astronomskega društva Kosci, kjer svoje veselje do astronomije deli z drugimi. Kot mentorica je pomembno prispevala k širjenju zanimanja za astronomijo in znanost med mladimi. Njeno delo ne vpliva samo na učence, ki jih je poučevala in so navdušeni nad svetom matematike, fizike in astronomije, ampak tudi na širšo skupnost na Kozjanskem, s katero je in še deli zanimanje do astronomije. Pomembno vpliva tudi na druge učiteljice v regiji in jih spodbuja k dodatnemu izobraževanju na področju astronomije in angažira v astronomskih dejavnostih.

Dr. Boštjan Kuzman, visokošolski učitelj za matematiko na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, za prispevke k promociji matematike, delu z mladimi in delovanju društva.

Boštjan Kuzman je leta 2001 diplomiral iz teoretične matematike, leta 2004 magistriral in leta 2010 doktoriral iz matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Zaposlen je kot docent za matematiko na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani, kjer predava različne matematične predmete, raziskovalno pa se ukvarja z algebro in teorijo grafov ter z matematiko v izobraževanju.

V društvu aktivno deluje od leta 2006. Kot tajnik komisije za raziskovalno dejavnost je trikrat organiziral Srečanje matematikov raziskovalcev (2007–2009) s predstavitvami odmevnih dosežkov in mladih doktorandov. Kot tajnik komisije za pedagoško dejavnost (2010–2016) je pripravljal zanimiva predavanja in programe za društvene seminarje in strokovna srečanja (Ko enačbe oživijo, Zgledi uporabe statistike, Algoritmi pri pouku matematike, Matematika in umetnost, Delo z matematično nadarjenimi učenci). Kot predsednik Slovenskega odbora za matematiko je od 2016 do 2022 sodeloval na zasedanjih EMS in pri uspešni organizaciji Evropskega matematičnega kongresa v Portorožu. Kot član upravnega odbora je zanesljivo sodeloval tudi pri številnih administrativnih nalogah, vključno s pridobivanjem javnih in sponzorskih sredstev za aktivnosti društva.

Izjemno dejaven je tudi pri promociji matematike, posebej med mladimi. Še kot nadobuden asistent je napisal vrsto člankov za revijo Logika in razvedrilna matematika, leta 2006 pa ustanovil in nato deset let vodil matematični tabor MARS za srednješolce, ki ga zdaj uspešno nadaljujejo mlajše generacije. Zasnoval je prireditev Bistroumi, na kateri se podelitev nagrad mladim tekmovalcem prepleta z nastopi glasbenikov in znanstvenikov, ter uspešno izvedel še vrsto priložnostnih aktivnosti, od poletnih šol za osnovnošolce, delavnic za študente ter matematičnih razstav do nastopov v medijih. Od leta 2020 je področni urednik za matematiko pri reviji Presek in sovodi program profesionalnega usposabljanja Presekov seminar.

S svojim delom in zgledom Boštjan Kuzman že leta izjemno prispeva k razpoznavnosti in ugledu društva in nasploh slovenske matematike, tako v Sloveniji kot v mednarodnem matematičnem okolju.

Béla Szomi, učitelj matematike in fizike na OŠ Domžale, za izjemno delo pri poučevanju in navduševanju mladih za matematiko, fiziko in astronomijo.

Béla Szomi je leta 1989 zaključil študij matematike in fizike na takratni Pedagoški akademiji v Ljubljani. Že pred tem je poučeval na več osnovnih šolah v okolici Ljubljane, od leta 1998 pa poučuje na OŠ Domžale, kjer uči fiziko, matematiko ter izbirne predmete astronomija, logika, matematična delavnica in šah.

Praktično nemogoče je prešteti vsa priznanja in medalje, ki so jih na državnih tekmovanjih iz logike, matematike, fizike, astronomije, razvedrilne matematike in tudi v šahu dosegli njegovi učenci in učenke. Ti so samo na tekmovanjih pod okriljem DMFA Slovenije od leta 2010 dalje osvojili več kot 100 zlatih priznanj. Večkrat je sodeloval tudi v različnih tekmovalnih komisijah in za tekmovanja prispeval svoje naloge. Je avtor ali soavtor okoli petnajstih knjig, zbirk nalog in delovnih zvezkov za osnovno šolo in za tekmovanja s področij logike, matematike, fizike in astronomije, v zadnjem obdobju pa zanimive videoposnetke s fizikalnimi poskusi objavlja tudi na spletu. Kot navdušen astronom in astrofotograf zna mlade spodbuditi tudi za opazovanje vesolja. Že več kot dvajset let tako organizira tudi zelo priljubljen astronomski tabor za mlade iz vse Slovenije, ki se zbirajo v njegovem domačem Prekmurju. Izjemno opazen pa je tudi kot kulturni ustvarjalec – avtor ali soavtor več kot dvesto skladb in uglasbitev, pesnik in prevajalec poezije ter glasbenik, ki je z različnimi glasbenimi zasedbami posnel celo vrsto zgoščenk. Za svojo raznovrstno dejavnost je že prejel številna priznanja različnih organizacij, njegovo pedagoško delo in strokovno delo pa je lahko zgled in navdih številnim članom DMFA Slovenije, še posebej mladim učiteljem in učiteljicam.

Soraya Sternad, profesorica matematike in upokojena urednica in avtorica matematičnih učbenikov, za trajen prispevek h kvaliteti slovenskih učbenikov.

Soraya Sternad je leta 1980 diplomirala na pedagoški smeri študija matematike na tedanji Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani. Po diplomi je dobrih pet let poučevala matematiko na Srednji kemijski šoli v Ljubljani, kjer se je naučila zelo dobro povezati z dijaki z učnimi težavami in jih uspela motivirati za matematiko. Nato je osem let poučevala na Gimnaziji Bežigrad, kjer je izoblikovala občutek za delo z nadarjenimi. Svojo pot je štiri leta nadaljevala na Ministrstvu za znanost v času, ko se je Slovenija pripravljala za vstop v EU. S pridobljenimi izkušnjami za delo s celim spektrom dijakov se je zaposlila kot urednica in avtorica matematičnih gradiv na DZS, kjer je delovala več kot 25 let, do nedavne upokojitve.

Svoje znanje in strokovnost je neposredno predajala v uredništvu založbe, posredno pa učiteljem, učencem in dijakom po vsej Sloveniji. Kot urednica je z učnimi gradivi postavljala nova merila in standarde v didaktiki matematike ter pokazala igrivo smer do matematičnih osnov. S tem je utrla pot sodobnemu poučevanju matematike. Njene izvirne, duhovite in domišljene naloge sporočajo, da je matematika povsod okoli nas in da gradi naš svet. Pa tudi to, da ji je lahko vsakdo kos. Zasnovala, uredila, pa tudi v sodelovanju z drugimi avtorji je napisala vrsto matematičnih uspešnic: Prva, druga in tretja čarovniška matematika, Svet matematičnih čudes (vertikala za devetletko), Naša ulica – matematika, učbenike Matematika za gimnazije (1–4) in Zbirke nalog za matematiko za gimnazije (1–4), prav tako pa učbenike in zbirke nalog za matematiko za srednje strokovne šole. Večina izmed naštetih se ponatiskuje še danes. Prispevala je tudi pomemben delež pri iskanju tehničnih rešitev za oblikovanje interaktivnih učbenikov in se zavzela za posredovanje gradiv centru IRIS, ki je na podlagi teh gradiv od 2020 do 2022 izdal štiri matematične zbirke za slepe. Matematično širino in razgledanost je dokazala ter uspešno predajala z urejanjem pestrega nabora učnih gradiv za šolarje vseh starosti in standardov, od šest do osemnajst let. Soraya Sternad je matematiko znala prežeti z življenjem, iskrivostjo in humorjem, za kar so ji hvaležni tako na založbi kot učitelji in učenci ter dijaki.

Jasmina Žel, učiteljica matematike in fizike na OŠ Ljudski vrt na Ptuju, za uspešno pedagoško delo z nadarjenimi, posebej pri fiziki in astronomiji.

Jasmina Žel je leta 2003 diplomirala iz matematike in fizike na Pedagoški fakulteti v Mariboru. Že 18 let je zaposlena na OŠ Ljudski vrt, kjer poučuje matematiko, fiziko in izbirni predmet astronomija, vodi različne interesne dejavnosti in aktivno sodeluje v številnih projektih.

Na šoli posebej uspešno dela kot članica skupine za delo z nadarjenimi učenci. Zanje organizira delavnice in opazovanja s področja fizike in astronomije, jih vodi na raziskovalne poti v okviru sobotnih šol, večkrat je bila tudi mentorica raziskovalnih nalog, ki so bile uspešne na državnih tekmovanjih. Na državnih tekmovanjih iz znanja so njene učenke in učenci osvojili številna priznanja, še posebej pa so izstopali pri fiziki in astronomiji, kjer so osvojili okoli 40 zlatih priznanj in večkrat posegali po najvišjih mestih v državi, na mednarodni astronomski Sanktpeterburški olimpijadi pa je eden od učencev osvojil celo bronasto medaljo.

Ves čas se strokovno izobražuje na konferencah, seminarjih in študijskih srečanjih. Sodelovala je tudi v projektnih skupinah v okviru ZRSŠ, pri mednarodnih raziskavah TIMSS in PIRLS ter pri projektih 3DIPHe in STAMPED v okviru projekta Erasmus+. Gospa Jasmina Žel s svojimi inovativnimi pristopi k poučevanju navdušuje in motivira k poglobljenemu razmišljanju ter iskanju rešitev zunaj okvira pričakovanega. Svoje delo opravlja načrtno, skrbno in odgovorno ter s posluhom do drugačnosti, s čimer med svojimi sodelavci ustvarja umirjeno, k ciljem usmerjeno in prijetno sodelovalno vzdušje.

Komisija se zahvaljuje vsem, ki so poslali predloge, in tudi v prihodnje vabi širše članstvo k predlaganju kandidatov in kandidatk, ki s kvalitetnim pedagoškim in strokovnim delom izstopajo v svojem okolju.

Komisija za društvena priznanja 2023–2024: dr. Primož Potočnik (predsednik), dr. Nežka Mramor Kosta, dr. Andreja Gomboc

Nežka Mramor Kosta imenovana za novo častno članico DMFA Slovenije


dMFA

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
je na 77. občnem zboru imenovalo

dr. Nežo Mramor Kosta

za svojo

ČASTNO ČLANICO

zaradi njenega vrhunskega znanstvenega in pedagoškega dela visokošolske učiteljice za matematiko na Univerzi v Ljubljani, za njene številne prispevke k promociji znanosti in uveljavljanju žensk na področju matematike in naravoslovja, in za izjemno uspešno opravljanje funkcije predsednice DMFA Slovenije v letih 2020-2022

na Bledu,
15. septembra 2023

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dMFA

prof. dr. Primož Potočnik,
predsednik DMFA Slovenije

Po statutu DMFA Slovenije lahko Občni zbor imenuje za svoje častne članice in člane osebe, katerih strokovno ali pedagoško delo pomeni pomemben prispevek k razvoju matematičnih, fizikalnih ali astronomskih ved v Sloveniji ali k razvoju Društva. Prvi častni član društva DMFA Slovenije je tako že leta 1949 postal akademik prof. dr. Josip Plemelj, doslej pa je bilo imenovanih 40 častnih članov in članic.

Občni zbor DMFA Slovenije, ki je potekal 15. septembra 2023 v Festivalni dvorani na Bledu, je za novo častno članico imenoval **zasl. prof. dr. Nežko Mramor Kosta**, zaradi njenega vrhunskega znanstvenega in pedagoškega dela visokošolske učiteljice za matematiko na Univerzi v Ljubljani, za njene številne prispevke k promociji znanosti in uveljavljanju žensk na področju matematike in naravoslovja, in za izjemno uspešno opravljanje funkcije predsednice DMFA Slovenije v letih 2020–2022.

Neža Mramor Kosta je bila rojena leta 1954 v Ljubljani. Po uspešnem študiju tehnične matematike in magistrskem študiju raziskovalne matematike je leta 1989 doktorirala na Oddelku za matematiko in mehaniko tedanje Fakultete za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani pod mentorstvom prof. dr. Jožeta Vrabca in prof. dr. Jana Jaworowskega z Indiana University v ZDA.

Po diplomi se je leta 1977 najprej zaposlila kot raziskovalka na Institutu »Jožef Stefan«. Od leta 1980 do upokojitve leta 2018 je bila zaposlena na Univerzi v Ljubljani, najprej kot asistentka in docentka na tedanji Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo, od leta 1996 pa na novonastali Fakulteti za računalništvo in informatiko, najprej kot docentka, od leta 2002 kot izredna in od leta 2009 kot redna profesorica. Ves čas je sodelovala tudi na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehanikov Ljubljani. V študijskih letih 1984/85 in 1991/92 je bila na daljših gostovanjih na Indiana University v Bloomingtonu, ZDA.

Njeno glavno raziskovalno področje je algebraična in računska topologija, kjer je objavila okoli 20 izvirnih znanstvenih člankov. Je tudi soavtorica dveh univerzitetnih učbenikov, več zbirk vaj in nekaj strokovnih in poljudnih prispevkov. Rezultate svojega dela je redno predstavljala na mednarodnih znanstvenih konferencah in vabljenih predavanjih na tujih raziskovalnih institucijah. Bila je mentorica štirim doktorandom (dvema na Univerzi v Ljubljani, enemu na Univerzi v Košicah, Slovaška in enemu na Univerzi v Ankari, Turčija).

Prof. dr. Neža Mramor Kosta je na Fakulteti za računalništvo in informatiko dolga leta vodila Laboratorij za matematične metode v računalništvu in informatiki, bila več let predstojnica Katedre za matematiko in splošne predmete ter 4 leta delovala kot prodekanja za pedagoške zadeve. Na Univerzi v Ljubljani je sodelovala kot članica komisije za magistrski študij ter področne komisije za Prešernove nagrade. Zaradi pomembnih prispevkov k razvoju Fakultete za računalništvo in informatiko, njenega uspešnega delovanja znotraj Univerze v Ljubljani je bila leta 2019 izvoljena v naziv zaslužne profesorice na Univerzi v Ljubljani.

Posebej bi izpostavili vlogo, ki jo ima prof. dr. Neža Mramor Kosta med slovenskimi matematičarkami. Je prva redna profesorica za matematiko na Univerzi v Ljubljani. Nekaj let je bila nacionalna koordinatorka za Slovenijo pri društvu European Women in Mathematics in zelo dejavna članica Odbora za ženske pri DMFA Slovenija. Njen portret je vključen v odmevno razstavo »Women of mathematics throughout Europe – A gallery of portraits« (`http://womeninmath.net/`), ki je obiskala že več kot 130 krajev po vsem svetu. Prof. dr. Neža Mramor Kosta je tako številnim vzor in navdih, da tudi ženske lahko kljub skrbi za družino uspešno delujejo na raziskovalnem področju matematike.

V letih od 2020–2022 je bila prof. dr. Neža Mramor Kosta predsednica DMFA Slovenije. Svojo funkcijo je nastopila v težavnem koronskem obdobju, ko je bila okrnjena izvedba tekmovanj in s tem financiranje delovanja društva. S skrbnim vodenjem ji je uspelo ohraniti osnovno poslanstvo društva in je aktivno sodelovala pri vpeljavi novih dejavnosti, kot sta na primer tekmovanje RIS in spletni natečaj Matematični dan. Veliko energije je vložila v urejanje odnosov med različnimi akterji društva kot tudi v urejanje razmerij z ugašajočim DMFA–založništvom ter novonastalo Založbo FMF, predvsem glede izdajanja Preseka in Obzornika.

Ponosni na novo častno članico dr. Nežki Mramor Kosta iskreno čestitamo in si želimo še veliko uspešnega sodelovanja pri društvenih aktivnostih!

Konferenca slovenskih matematikov ob 150. obletnici rojstva Josipa Plemlja odlično uspela

V Festivalni dvorani na Bledu je 15. in 16. septembra 2023 potekala dvodnevna konferenca slovenskih matematikov. Konferenca je imela tri sklope – plenarni minisimpozij, posvečen Josipu Plemlju, raziskovalni del s predstavitvami znanstvenih prispevkov matematikov iz različnih ustanov, ter pedagoški del, posvečen predstavitvam učiteljev matematike in fizike na različnih stopnjah poučevanja.

Slika 1. Akad. prof. dr. Peter Štih, predsednik SAZU.

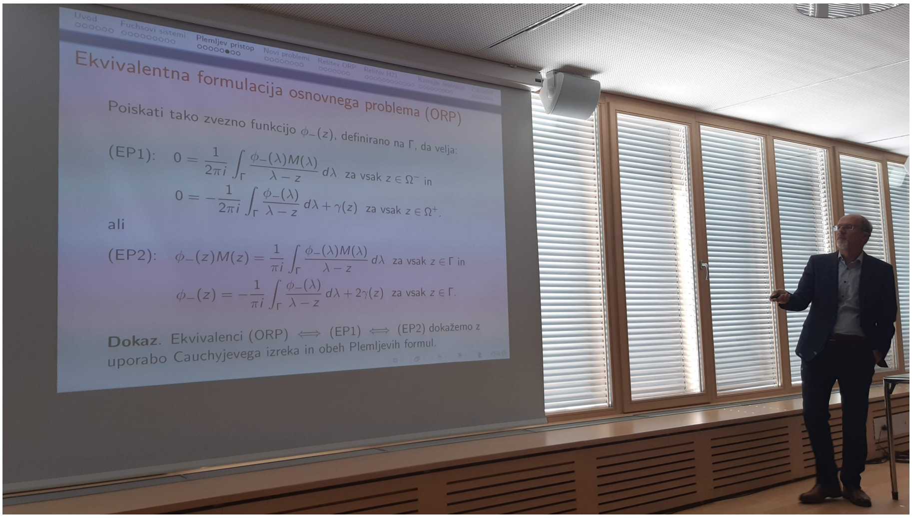
Minisimpozij, posvečen 150. obletnici rojstva akad. prof. dr. Josipa Plemlja, je s svojo prisotnostjo počastila vrsta uglednih gostov, predstavnikov matematičnih oddelkov različnih fakultet in inštitutov. Slavnostne nagovore so pripravili akad. prof. dr. Peter Štih, predsednik SAZU, prof. dr. Gregor Majdič, rektor UL in g. Anton Mežan, blejski župan, med prisotnimi poslušalci pa so bili poleg predsednika DMFA Slovenije dr. Primoža Potočnika tudi akademika prof. dr. Josip Globevnik in prof. dr. Franci Forstnerič ter takratni dekan UL FMF prof. dr. Tomaž Košir.

V okviru minisimpozija so predavali dr. Boštjan Kuzman (Prof. Josip Plemelj – življenjska zgodba izjemnega človeka), dr. Milan Hladnik (Pro-

Slika 2. Prof. dr. Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani.

Slika 3. Življenjsko zgodbo prof. Plemlja je predstavil dr. Boštjan Kuzman.

fesor Plemelj in reševanje Hilbertovega 21. problema) in dr. Željko Oset (Intelektualna mreža akad. dr. Josipa Plemlja). V raziskovalnem delu konference so prispevke o svojem znanstvenem delu v živo predstavili Boštjan Lemež, Katja Berčič, Aleksey Kostenko, Ada Šadl Praprotnik, Ganna Kudryavtsova, Pavle Saksida in Ljupčo Todorovski (vsi UL FMF), Nino Bašič, Nastja Cepak (UP FAMNIT), Janko Gravner (UC DAVIS in IAM), Martin



Slika 4. Dr. Milan Hladnik je predstavil zahtevno matematično ozadje Plemljeve rešitve Riemannovega problema.

Jesenko (UL FGG), Primož Lukšič (ABELIUM), Bor Harej (PRS), v pedagoškem delu pa Martin Raič, Matija Lokar (oba UL FMF), Aleš Toman (UL EF) ter Miha Simončič, Tinka Majaron, Primož Trontelj, Aljoša Berk, Tjaša Černoša, Ambrož Demšar, Nataša Jerman, Danijela Gerkšič Blatnik in Renata Babič, zaposleni na različnih slovenskih osnovnih in srednjih šolah.

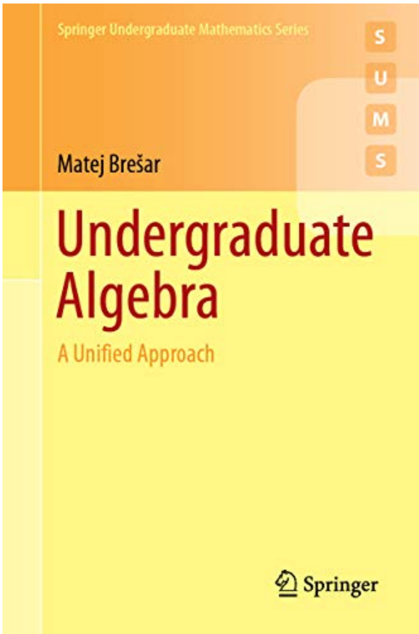
Vsebinsko izjemno bogat program konference je pripravila predsednica Odbora za matematiko dr. Jasna Prezelj, izvedbo konference pa so podprli:

- Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko,
- Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije
- Slovenska akademija znanosti in umetnosti
- Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
- Zavarovalnica Triglav
- Abelium

Vsem se iskreno zahvaljujemo!

Boštjan Kuzman

Matej Brešar, Undergraduate algebra – a unified approach, Springer undergraduate mathematics series, Springer, Cham, 2019, 316 strani



Tradicionalno se pri pouku abstraktne algebre najprej obravnavajo grupe, nato kolobarji, moduli in polja. Pri tem se pri vseh strukturah obravnavajo podstrukture, homomorfizmi in (razen pri poljih) kvocientne strukture. Nekateri rezultati, na primer izreki o izomorfizmih, se pri vsaki od struktur ponavljajo. Ker gre za konceptualne rezultate, se tudi dokazi vsebinsko ponavljajo. Predavatelj je tako postavljen pred neprijetno izbiro: izreke vedno dokazati ali pa pri kasnejših rezultatih zgolj navesti, da je dokaz podoben kot pri ustreznem rezultatu za prej obravnavano strukturo. Vsaka od obeh možnosti ima svoje slabe strani. Dokazovanje izrekov, ki so analogni že dokazanim, terja čas, ki ga zato morda zmanjka za kakšno drugo snov, poleg tega pa vsaj pri boljših študentih vzbuja vtis, da se snov preveč ponavlja. V primeru sklicevanja na podobnost dokaza pri že obravnavani strukturi pa se je treba zavedati, da so študenti to strukturo lahko obravnavali več mesecev nazaj in snov zato ni več sveža.

V izogib zgoraj navedenim dilemam profesor Brešar na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani predmet Algebra 2 predava v drugačnem vrstnem redu. Najprej za vse algebraične strukture hkrati obravnava koncepte, ki so skupni vsem strukturam, v drugem delu predmeta pa natančneje izpostavi rezultate, ki so specifični za posamezne strukture. Za svoje študente je napisal učbenik *Uvod v algebro*, ki je leta 2018 izšel pri DMFA – založništvo. Pričujoča knjiga *Undergraduate algebra – a unified approach* je razširjen prevod slovenskega učbenika. Med drugim so v njej dodane vsebine, ki so zaradi omejenega števila ur pri Algebri 2 na FMF z leti izpadle iz učnega načrta, marsikje v tujini pa so del standardne snovi, ki se obravnava pri abstraktni algebri. Na FMF lahko študent spozna te vsebine pri izbirnem predmetu Algebra 3.

Knjiga Undergraduate algebra – a unified approach je sestavljena iz dveh delov. Prvi del, ki ima naslov The language of algebra, vsebuje štiri poglavja, drugi del z naslovom Algebra in action pa tri. V prvem delu avtor vpelje osnovne algebraične strukture ter razloži koncepte, ki so skupni vsem strukturam, v drugem delu pa natančneje obravnava grupe, kolobarje in razširitve polj. Učbenik je napisan zelo razumljivo in bo v pomoč marsikateremu študentu pri študiju abstraktne algebre, ne glede na to, ali jo predavatelj predava v vrstnem redu, kot je naveden v knjigi, ali na tradicionalen način. Vsi koncepti so ponazorjeni s številnimi primeri, prav tako vsak razdelek vsebuje precej nalog za reševanje.

V prvem poglavju avtor vpelje osnovne algebraične strukture, s poudarkom na grupah, kolobarjih, poljih, vektorskih prostorih in algebrah. Za vse te strukture nato definira podstrukture, opiše, kaj so generatorji posamezne strukture, ter (razen za polja) definira direktne produkte. Že v prvem poglavju je navedenih precej zgledov algebraičnih struktur, pomembnejši primeri pa so natančneje obravnavani v drugem poglavju. Med zgledi komutativnih kolobarjev so obravnavani kolobar celih števil ter kolobar ostankov $\mathbb{Z}_n$ pri deljenju z n, kolobar funkcij ter kolobarji polinomov v eni in več spremenljivkah. Pomembna rezultata v celih številih sta osnovni izrek o deljenju in Evklidov algoritem. Avtor dokaže tudi, da je $\mathbb{Z}_n$ polje natanko takrat, ko je n praštevilo. Od grup so obravnavane simetrična grupa S_n vseh permutacij na n elementih, diedrska grupa ter matrične grupe: splošna in posebna linearna grupa, ortogonalna grupa, unitarna grupa in simplektična grupa. Pri permutacijah sta izpeljana razcepa na produkt disjunktnih ciklov in na produkt transpozicij. Dokazana je enoličnost parnosti števila transpozicij v razcepu, s pomočjo česar je definiran znak permutacije. Avtor tudi pokaže, da sode permutacije tvorijo grupo, ki jo imenujemo alternirajoča grupa. Poglavje o primerih se zaključi s kvaternioni, ki so za študente prvi (in pogosto tudi edini) primer nekomutativnega obsega.

Tretje poglavje je posvečeno homomorfizmom. To so preslikave, ki »ohranjajo operacijo«. Vpeljavo pojma homomorfizma avtor motivira z izomorfizmom vektorskih prostorov, ki ga študenti že poznajo iz linearne algebre, in izomorfizmom končnih grup, ki ga neformalno razloži s preimenovanjem elementov v tabeli množenja. Hkrati vpelje tudi pojem ciklične grupe in reda elementa v grupi. Sledi formalna definicija homomorfizmov vseh obravnavanih algebraičnih struktur. Avtor na enoten način definira sliko in jedro homomorfizma ter pokaže, da je injektivnost homomorfizma ekvivalentna trivialnosti njegovega jedra. V nadaljevanju so obravnavani izreki o vložitvah. Algebraične strukture so pogosto definirane abstraktno, za lažjo predstavo in računanje z njimi pa je ugodneje, kadar jih prepoznamo kot podobjekte v konkretnih objektih. Da je to vedno mogoče, nam povedo izreki o vložitvah. Vsako končno grupo je mogoče po Cayleyjevem izreku vložiti v permutacijsko grupo, vsaka končnorazsežna algebra nad poljem pa je izomorfna neki matrični algebri. Sledita razdelka o polju ulomkov celega komutativnega kolobarja in o karakteristiki kolobarja.

V četrtem poglavju avtor predstavi kvocientne strukture. Najprej definira odseke po podgrupi in dokaže Lagrangeev izrek, ki pravi, da je moč končne grupe enaka produktu moči podgrupe in indeksu te podgrupe v grupi. Nato bralcu predstavi, da bi na kvocientni množici vseh odsekov radi definirali operacijo na naraven način kot $aN \cdot bN = (ab)N$. Zato definira podgrupo edinko in pokaže, da je v primeru, ko je N podgrupa edinka, navedena operacija dobro definirana in da je kvocientna množica grupa za to operacijo. Enako avtor stori v primeru kolobarjev in algeber, kjer ima vlogo podstrukture, po kateri je mogoče definirati kvocientno strukturo, ideal. Prava moč avtorjevega enotnega pristopa k algebraičnim strukturam se pokaže pri izrekih o izomorfizmih. Prvi izrek o izomorfizmu je formuliran tako za grupe kot za kolobarje, vektorske prostore in algebre. Avtor najprej utemelji, da je jedro homomorfizma $\varphi\colon A \to A'$ podgrupa edinka, ideal oziroma vektorski podprostor, zato je vselej mogoče definirati kvocientno strukturo $A/\ker\varphi$. Nato v primeru grup pokaže, da je kvocientna grupa izomorfna sliki homomorfizma φ, dokaz za druge strukture pa je povsem enak, le notacija se spremeni. Drugi in tretji izrek o izomorfizmu (znana tudi kot izreka Emmy Noether) sta zaradi različnih notacij predstavljena za vsako strukturo posebej, navedena sta ključna koraka dokazov, detajle dokazov pa avtor prepušča bralcu. Poglavje se konča z »notranjima« definicijama direktnega produkta grup in kolobarjev.

Poglavja o grupah, kolobarjih in razširitvah polj v drugem delu knjige so precej razširjena glede na slovenski učbenik Uvod v algebro. Poglavju o kolobarjih je dodana obravnava modulov ter klasifikacija končno generiranih modulov nad glavnimi kolobarji, poglavju o grupah izreki Sylowa in krajša obravnava rešljivih ter enostavnih grup, poglavju o razširitvah polj pa polja s karakteristiko 0, Galoisova teorija, rešljivost polinomskih enačb z radikali ter osnovni izrek algebre. Glede na slovensko knjigo Uvod v algebro bralec v pričujoči knjigi opazi tudi spremenjen vrstni red poglavij o kolobarjih in grupah. Vzrok za zamenjavo poglavij je naslednji: V knjigi Uvod v algebro je v poglavju o grupah predstavljena klasifikacija končnih Abelovih grup. S skoraj povsem enakim dokazom pa je mogoče izpeljati splošnejši rezultat, namreč klasifikacijo končno generiranih torzijskih modulov nad glavnimi kolobarji. Klasifikacija končnih Abelovih grup potem sledi kot poseben primer, če za kolobar vzamemo cela števila. Poleg tega je splošnejši rezultat uporaben tudi na drugih področjih, na primer za izpeljavo Jordanove kanonične forme matrike. Za dokaz splošnejšega izreka pa je seveda treba vpeljati nekatere pojme, povezane s kolobarji in moduli, zato sta poglavji o grupah in kolobarjih zamenjani.

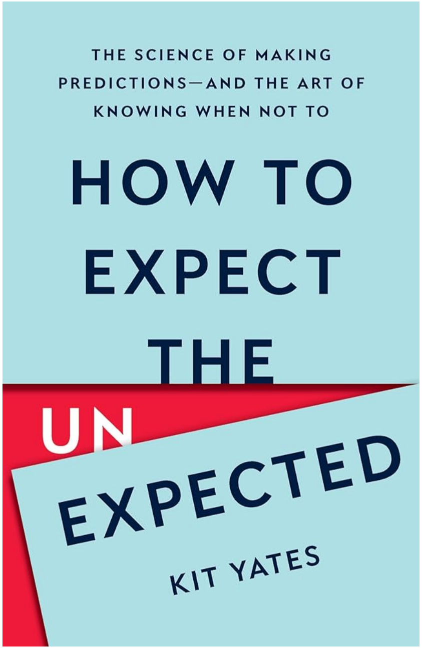
V petem poglavju se avtor torej ukvarja s komutativnimi kolobarji. V kolobarju polinomov v eni spremenljivki nad poljem dokaže osnovni izrek o deljenju in obravnava (ne)razcepnost polinomov. V primeru polinomov nad racionalnimi števili sta pomembna predvsem Gaussova lema in Eisensteinov kriterij. Nato avtor vpelje pojme, povezane z deljivostjo, v poljubnem komutativnem kolobarju, ter obravnava evklidske kolobarje, glavne kolobarje in kolobarje z enolično faktorizacijo. Evklidski kolobar je hkratna posplošitev celih števil in polinomov v eni spremenljivki nad poljem. To je komutativen kolobar brez deliteljev niča, v katerem velja analog Evklidovega algoritma. Glavni kolobar pa je komutativen kolobar brez deliteljev niča, v katerem je vsak ideal glavni, torej generiran z enim elementom. Avtor pokaže, da je vsak evklidski kolobar glavni, vsak glavni kolobar pa ima enolično faktorizacijo, kar pomeni, da je mogoče vsak njegov element napisati kot produkt nerazcepnih elementov na enoličen način. Preostanek petega poglavja obravnava module. Najprej so definirani moduli nad poljubnim kolobarjem, podmoduli, homomorfizmi modulov, kvocienti, direktni produkti in generatorji modulov, nato pa so natančneje obravnavani moduli nad glavnimi kolobarji. Avtor najprej formulira izrek, ki klasificira končne Abelove grupe. Nato razloži, da bo ta izrek sledil iz bolj splošnega izreka o klasifikaciji končno generiranih torzijskih modulov nad glavnimi kolobarji in da direktni dokaz klasifikacije Abelovih grup ni nič krajši. Za bralca, ki ni vešč dela z moduli, tudi razloži, kako naj dokaz izreka o klasifikaciji končno generiranih torzijskih modulov nad glavnimi kolobarji prevede na primer Abelovih grup. Nato je izrek o klasifikaciji končno generiranih torzijskih modulih nad glavnimi kolobarji formuliran in dokazan. Sledi uporaba tega izreka pri izpeljavi Jordanove kanonične forme za linearno preslikavo $T\colon V \to V$, kjer je V končnorazsežen vektorski prostor nad algebraično zaprtim poljem F. Ključni korak je, da na vektorskem prostoru V definiramo strukturo modula nad polinomskim kolobarjem $F[X]$ s predpisom $p(X).v = p(T)(v)$. Modul, ki ga dobimo, je končno generiran in torzijski, za kolobar $F[X]$ pa že vemo, da je glavni, zato lahko uporabimo prej dokazani izrek.

Šesto poglavje natančneje obravnava končne grupe. Avtor izpelje razredno formulo in dokaže Cauchyjev izrek, ki pove, da končna grupa, katere moč je deljiva s praštevilom p, vsebuje element reda p. Nato definira delovanje grupe, vpelje pojma orbite in stabilizatorja ter dokaže zvezo med njima. S pomočjo delovanj nato dokaže izreke Sylowa o podgrupah moči p^k v dani grupi. Sledita krajša razdelka o rešljivih grupah in o enostavnih grupah. Glavna rezultata, ki bosta pomembna pri razširitvah polj, sta, da je alternirajoča grupa A_5 enostavna, ter da simetrična grupa S_n ni rešljiva za $n \geq 5$.

Sedmo poglavje govori o razširitvi polj. Začne se z opisom problema reševanja polinomskih enačb, ki je zgodovinska motivacija za študij razširitev polj. Nato avtor vpelje algebraične in transcendentne elemente in natančneje obravnava končne razširitve polj. Dokaže tudi, da je mogoče z ravnilom in šestilom konstruirati le tiste točke v ravnini, katerih obe koordinati sta algebraični števili, katerih stopnji sta potenci števila 2. Naslednja tema poglavja so razpadna polja. Za dani polinom s koeficienti iz polja vedno obstaja (morda večje) polje, v katerem ima polinom ničlo. To polje je kvocient polinomskega kolobarja po maksimalnem idealu, generiranem z nerazcepnim deliteljem danega polinoma. Induktivna uporaba tega argumenta pove, da ima vsak polinom s koeficienti iz polja svoje razpadno polje, torej najmanjše polje, nad katerim polinom lahko zapišemo kot produkt linearnih faktorjev. Sledi obravnava končnih polj. Ta so praštevilske karakteristike, zato je njihova moč oblike p^n, kjer je p praštevilo in $n \in \mathbb{N}$. Glavni rezultat o končnih poljih je obrat zadnje trditve, torej da za vsako praštevilo p in vsako naravno število n obstaja do izomorfizma natančno določeno polje s p^n elementi, ki je razpadno polje polinoma $X^{p^n} - X$ nad $\mathbb{Z}_p$. V nadaljevanju so obravnavana polja s karakteristiko 0. Za njih velja izrek o primitivnem elementu, ki pravi, da je vsaka njihova končna razširitev generirana z enim samim elementom. Avtor nato vpelje definicije fiksnega polja, Galoisove razširitve in Galoisove grupe ter dokaže Osnovni izrek Galoisove teorije, ki pravi, da obstaja bijekcija med vmesnimi polji razširitve in podgrupami Galoisove grupe. Iz Galoisove teorije sledi tudi, da je Galoisova grupa polinoma, ki je rešljiv z radikali, vedno rešljiva. Ker simetrična grupa S_n ni rešljiva za $n \geq 5$, sledi Abel-Ruffinijev izrek, ki pravi, da obstajajo polinomi pete stopnje v $\mathbb{Q}[X]$, ki niso rešljivi z radikali, torej taki, katerih ničel ne moremo izraziti s formulami, ki vsebujejo le seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje in uporabo poljubnih korenov. Knjiga se zaključi z dokazom osnovnega izreka algebre, ki pravi, da je polje kompleksnih števil algebraično zaprto.

Klemen Šivic

Kit Yates, How to Expect the Unexpected, The Science of Making Predictions and the Art of Knowing When Not To, Quercus Editions, London 2023, 434 strani



Matematik Kit Yates je avtor odlične knjige *The Maths of Life and Death, Why Maths Is (Almost) Everything*, ki jo imamo zdaj tudi v slovenskem prevodu: *Matematika med življenjem in smrtjo*. Tu predstavljamo njegovo obsežno drugo knjižno delo. Avtor pravi, da je izšlo z zakasnitvijo zaradi dela v svetovalnem telesu med zadnjo pandemijo.

Knjiga obravnava **napovedovanje**: uspehe, neuspehe, probleme. Vsebuje ogromno zanimivih zgodb. Namenjena je širši publiki, zato ne vsebuje formul. Je prijetno branje.

Veliko poudarka je na šibkih straneh človeškega razmišljanja. Iščemo vzorce, kjer jih ni, tudi zato, ker imamo napačno predstavo o slučajnih vzorcih.

Naše slabosti izkoriščajo razni vedeževalci in »vidci«. Yates podrobno razčlenjuje njihove trike. Vedeževalci, klicatelji duhov preminulih itd. radi delajo komplimente in pohvalijo »izredne sposobnosti« klienta. Ta potem lažje spregleda napačne napovedi.

Uporabnik na Twitterju, skrit za psevdonimom, je leta 2014 povzel štiri napovedi o končani finalni nogometni tekmi med Nemčijo in Argentino, ki jih je naredil dan pred tekmo in so se izkazale kot točne:

»Izid bo 1:0.

Nemci bodo zmagali v podaljšku.

Gol bo v drugi polovici podaljška.

Strelec bo Götze.«

K povzetku je dodal čuden stavek:

»Dokaži, da je FIFA skorumpirana.«

Profesor Yates sam je naredil nekaj podobnega: izbral je pet dogodkov z binarnim izidom: zmaga/poraz (šport, volitve . . .). Stavil je po 10 funtov na vseh 32 možnih izidov. Na svojem malo obiskanem YouTube kanalu je objavil 32 videov in na njih vsakič pokazal 5 različnih izborov stavnih listkov. Po vsaki tekmi je takoj izbrisal neustrezne posnetke. Na Twitterju se je na koncu pohvalil kot nezmotljivi napovedovalec, s povezavo na edini preostali posnetek in užil nekaj (nezaslužene?) slave.

Prej omenjenega jasnovidnega nogometnega strokovnjaka in preganjalca korupcije pa je razkrinkal uporabnik, ki je shranil posnetke zaslona z njegovimi napačnimi napovedmi.

Upravljavci finančnih skladov sestavijo množico novih skladov – kombinacij, ki jih ne oglašujejo in v katere vložijo nekaj malega lastnega denarja. Po nekaj letih neuspešne sklade potihem likvidirajo in se pohvalijo z rezultati uspešnih kombinacij.

Ne znamo napovedovati potresov. Na danem področju in v danem časovnem intervalu pa kar dobro velja zakon, da je v danem časovnem obdobju približno $N = 10^{A-bM}$ potresov magnitude vsaj M. Na potresno aktivnih področjih je b približno 1. Tam je približno 10-krat toliko potresov magnitude $\geq M$ kot potresov magnitude $\geq M + 1$ in stokrat toliko kot potresov magnitude $\geq M+2$ . . . Na podlagi zgodovinskih podatkov lahko tudi predvidimo, kako trdne stavbe moramo graditi, da zagotovimo osnovno varnost.

Nagnjeni smo k temu, da ob naraščanju predvidevamo linearno odvisnost. Pri zadnji epidemiji se je to izkazalo kot usodna napaka.

Razdelek *Izrojene spodbude* v poglavju *Lovljenje bumerangov* razlaga, kako je vlada ZDA v letih od 1869 financirala gradnjo železnice čez celino. Naročilo sta dobili dve podjetji. Eno je gradilo z zahodnega konca, drugo z vzhodnega. Plačani sta bili po milji položenih tirov. Tako se je podjetjema bolj splačalo izbirati daljše in lažje variante proge. Prav tako je podjetje, ki je gradilo hitreje, odvzelo delo drugemu. To je spodbujalo hitro in malomarno gradnjo. Na koncu je to pomenilo številne popravke in velike dodatne stroške za gradnjo krajših povezav.

Poglavje *Izogibanje snežentim kepam* opisuje učinek po hribu valeče se snežene kepe. Oglejmo si primer. Višanje temperature pomeni taljenje ledenega pokrova na polih. Namesto slepeče bele površine, ki odbija svetlobo in toploto, imamo zdaj temno morje, ki absorbira skoraj vso sončno toploto in tako še pospeši taljenje. To je primer *pozitivne povratne zanke.* Včasih imamo tudi negativno povratno zanko, ki uravnovesi dogajanje.

Tragedija gmajne pomeni uničenje skupne dobrine zaradi pretiranega izkoriščanja. Morje pri Novi Funlandiji je bilo stoletja na videz neizčrpen vir trsk. (Polenovka ali bakalar je posušena trska.) Ulov je nenehno naraščal in je leta 1968 dosegel rekordnih 810 tisoč ton. K temu je treba prišteti ogromno količino ulovljenih drugih manj zaželenih ali nezaželenih, a za ekosistem pomembnih rib. Veliko ulova je bilo narejenega s *kočarjenjem*, vlečenjem obtežene mreže po morskem dnu. Tako so polovili tudi rake, mehkužce in pustili za sabo na tleh razdejanje. Pet let kasneje je ulov padel na pol.

Kanadska vlada je nato pod pritiskom lastnih ribičev omejila dostop tujcem v pasu do 200 milj od obale. Znanstveniki so rotili vlado, naj uveljavi nizke kvote ulova, da si bodo trske opomogle. Namesto tega so kanadski ribiči dobili subvencije za gradnjo ogromnih ladij. Leta 1991 je bilo ujetih le še 130 tisoč ton. Za naslednje leto je bila določena kvota 180 tisoč ton! A ulova ni bilo, ker je prišlo do propada populacije trsk. Še isto poletje (1992) so morali sprejeti dveletni moratorij na lov trsk. (Yates napačno navaja kot začetek kolapsa leto 1994.) Število trsk so ocenili na en odstotek tistega pred tridesetimi leti. Delo je izgubilo 40 tisoč ljudi. Populacija trsk si do danes ni zares opomogla, a politiki dovoljujejo manjši ulov, brž ko se zdi, da se populacija popravlja.

Enako kratkovidno se obnaša Evropska skupnost. Ribiči so dobivali subvencije kljub slabemu stanju populacij rib. Ko so pred leti skušali v EU prepovedati kočarjenje, je bil med tistimi, ki so to preprečili, tudi slovenski predstavnik.

Na koncu omenimo še, da je skeptični profesor Yates sam nasedel, ko je na strani 9 napisal: »Šele pozno v srednjem veku je podoba Zemlje kot krogle postala prevladujoča teorija. Ko je Kolumb odplul v Azijo leta 1492 . . . , so nekateri še zmeraj verjeli, da bi ga lahko odneslo z roba sveta. Šele ko je portugalski raziskovalec Magellan prvič obplul Zemljo trideset let kasneje, je bilo to dokončno razčiščeno.«

To so miti, ki prvotno izvirajo iz protikatoliške propagande – predvsem protestantskih krogov. Thomas Jefferson, eden od očetov *Ameriške revolucije*, je [2] leta 1784 v knjigi zapisal: »Galileo je bil poslan pred inkvizicijo, ker je trdil, da je Zemlja krogla: vlada je razglasila, da je ravna kot pladenj, in Galileo se je moral odpovedati svoji napaki.«

Galileov proces je bil leta 1633, preživeli Magellanove odprave pa so se vrnili v Španijo leta 1522 . . .

Ameriški pisatelj Washington Irving je bil znan po več literarnih in zgodovinskih potegavščinah. Španska vlada ga je povabila, da prevede stare dokumente o odkritju Amerike. Dobil je dostop do arhivov, a je to uporabil le za lastne namene. Iz tega je nastala njegova daleč najuspešnejša potegavščina, objavljena v romanu *A History of the Life and Voyages of Christopher Columbus (1828)*. V njem govori o posvetu na univerzi v Salamanki, ki naj bi presojal Kolumbov predlog potovanja na Japonsko v zahodni smeri. Zadrti teologi in nekateri profesorji iz duhovniških vrst naj bi oporekali Krištofu Kolumbu z navedbami iz verske literature, češ da obstajajo dvomi o Zemlji kot krogli itd. Irving je to opremil celo z navedbo vira, ki naj bi bil *Hist. De Chiapa, por. Remesal.* Irving je že vedel, zakaj ni napisal polnega naslova knjige, ki je [1]: Antonio de Remesal, *Historia de la Provincia de S. Vicente de Chiapa y Guatemala …* Že na prvi pogled je skrajno neverjetno, da bi zgodovina province v Gvatemali, izdana leta 1619, delo klerika Remesala, vsebovala kaj takega. V prvi izdaji je Irving celo preciziral, na katere dele te knjige naj bi se naslonil: lib ii, cap. 27 (Libro Segundo ima žal le 23 poglavij) in lib xi, cap. 7 (kjer ni videti nič podobnega). V prepisu skoraj 800 strani debelega »špeha«, ki začne obravnavo šele z letom 1524(!), sem iskal priimek Colon (špansko ime za Kolumba). Bilo je več zadetkov o »admiralu Krištofu Kolumbu« (admiral je seveda postal šele po odkritju Amerike), a nič, kar bi bilo od daleč podobno Irvingovim fantazijam.

Resnica je, da je Kolumb močno podcenil razdaljo do Japonske in da so mu geografi, tudi cerkveni, to očitali.

Irvingova »odkritja« so v devetnajstem stoletju še »olepšali« in prikazali kot konflikt med znanostjo in religijo. Agitpropovska zgodba o tem, da je Kolumb »zmagal proti nazadnjaški Cerkvi in ji dokazal, da je Zemlja okrogla«, se je trdno zasidrala v literaturi, učbenikih, umetniških delih …

LITERATURA

[1] F. A. de Remesal, *Historia de la Provincia de S. Vicente de Chiapa y Guatemala de la orden de ñro glorioso padre Sancto Domingo: escribense juntamente los principios de las demas provincias de esta religion de las Indias Occidentales, y lo secular de la gobernacion de Guatemala*, Francisco de Angulo 1619, dostopno na `https://archive.org/details/historiadelaprov00reme`, ogled 10. 12. 2023.

[2] *Myth of the flat Earth*, dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Myth_of_the_flat_Earth`, ogled 10. 12. 2023.

Peter Legiša

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, NOVEMBER 2023
Letnik 70, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Slika supermasivne črne luknje v jedru galaksije Messier 87 (vir: Event Horizon Telescope). Več o tem si lahko preberete v članku na straneh 91–100.