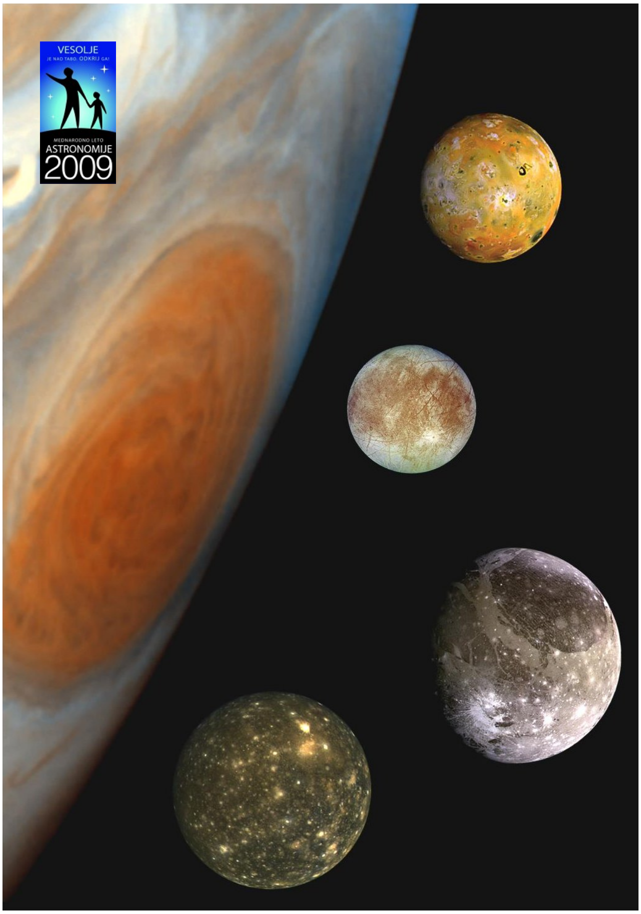
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2009
Letnik 56
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 56 • ŠT. 4 • STR. 121–160 • JULIJ 2009

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2009, letnik 56, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `Zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

HADAMARDOVE MATRIKE IN MISIJA MARINER 9

ALEKSANDAR JURIŠIĆ

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 05B20, 05B25, 05B30, 05C12, 05C62, 05C50, 05E20, 05E30, 05E35, 68R05, 68R10, 68R141, 11T71, 51E, 52C

J. Hadamard (1865–1963) je bil eden izmed pomembnejših matematikov na prehodu iz 19. v 20. stoletje. Njegova najpomembnejša dela zajemajo področja teorije analitičnih funkcij in matematične fizike. Najbolj znan pa je po dokazu izreka o gostoti praštevil (leta 1896, hkrati s C. J. De La Vallée-Poussinom). V tem članku predstavljamo Hadamardove matrike, njihove karakterizacije s Hadamardovimi grafi, geometrijami in Hadamardovimi kodami ter nekaj zanimivih konstrukcij in uporabo Hadamardovih matrik v praksi.

HADAMARD MATRICES AND MARINER 9 MISSION

J. Hadamard (1865–1963) was one of more important mathematicians at the turn of the 19^{th} century. His is most celebrated for his contributions in analtycal functions and mathematical physics. His most important result is the prime number theorem, which he proved in 1896 (at the same time as C. J. De La Vallée-Poussin). In this article we introduce Hadamard matrices, their characterizations with Hadamard graphs, geometries and Hadamard codes, some interesting constructions and applications of Hadamard matrices in practice.

Hadamardove matrike

Naj bo A kvadratna matrika z n stolpci, za katero velja $|(A)_{ij}| \leq 1$. Kako velika je lahko $\det A$? Če si vrstice (oziroma stolpce) matrike A predstavljamo kot vektorje v $\mathbb{R}^n$, potem je njihova dolžina navzgoraj omejena s $\sqrt{n}$. Po drugi strani pa vemo, da absolutna vrednost determinante predstavlja prostornino paralelepipeda, ki ga določajo ti vektorji, torej velja $|\det A| \leq n^{n/2}$. Ali lahko v tej neenakosti velja enakost? V tem primeru so vsi elementi matrike enaki ± 1, vsaki dve različni vrstici (oziroma stolpca) pa morata biti paroma pravokotni. To je bila motivacija Brennerja (1972) za naslednjo definicijo.

Kvadratni matriki H z n vrsticami in z elementi ± 1, za katero velja

$$HH^T = nI_n, \tag{1}$$

pravimo *Hadamardova matrika* reda n. Glede na to, da matrični produkt v (1) sestavljajo produkti vrstic matrike H, lahko stolpce (oziroma vrstice)

Hadamardove matrike poljubno premešamo (permutiramo) ali pa pomnožimo z -1, pa bo nova matrika še vedno Hadamardova. Rekli bomo, da sta si taki Hadamardovi matriki *ekvivalentni.* Na prvi pogled se zdi, da identiteta (1) zagotavlja le pravokotnost vrstic. Vendar jo lahko pomnožimo z desne s H in dobimo $HH^TH = nI_nH$ oziroma $HH^TH = HnI_n$. Upoštevamo še obrnljivost matrike H, in že smo pri identiteti $H^TH = nI_n$, v kateri sta vlogi vrstic in stolpcev zamenjani glede na identiteto (1). To pomeni med drugim tudi, da so različni stolpci matrike H paroma pravokotni. Predstavimo nekaj manjših Hadamardovih matrik:

$$(1)\,,\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ \text{in}\ \begin{pmatrix}+ & + & + & + & + & + & + & +\\ + & - & + & - & + & - & + & -\\ + & + & - & - & + & + & - & -\\ + & - & - & + & + & - & - & +\\ + & + & + & + & - & - & - & -\\ + & - & + & - & - & + & - & +\\ + & + & - & - & - & - & + & +\\ + & - & - & + & - & + & + & -\end{pmatrix}$$

(v slednji smo ± 1 zamenjali s $+$ in $-$). Zgornje Hadamardove matrike označimo zaporedoma s H_1, H_2, H_4 in H_8 (indeks torej kaže njihovo velikost). Opazimo, da sta v vseh štirih primerih prva vrstica in prvi stolpec sestavljena iz samih enic. Same enice v prvem stolpcu oziroma vrstici Hadamardove matrike dobimo tako, da vrstice oziroma stolpce matrike H, ki se začnejo z negativnim številom, pomnožimo z -1. Temu postopku pravimo *normalizacija.* Če je $n > 1$, potem mora imeti v normalizirani matriki vsaka preostala vrstica polovico pozitivnih in polovico negativnih elementov, kar pomeni, da je n sod. S podobnim razmislekom pridemo do še močnejšega sklepa.

Trditev. *Če je H Hadamarova matrika reda n, potem je $n = 1$, $n = 2$ ali pa $4 \mid n$.*

Dokaz. Naj bo $n > 2$. Normaliziramo H, potem pa s permutacijo stolpcev spravimo prve tri vrstice matrike H v naslednjo obliko:

$$\begin{array}{lcccc}
\text{1. vrstica} & +++\ldots+++ & +++\ldots+++ & +++\ldots+++ & +++\ldots+++\\
\text{2. vrstica} & +++\ldots+++ & +++\ldots+++ & ---\ldots--- & ---\ldots---\\
\text{3. vrstica} & \underbrace{+++\ldots+++}_{a\text{ stolpcev}} & \underbrace{---\ldots---}_{b\text{ stolpcev}} & \underbrace{+++\ldots+++}_{c\text{ stolpcev}} & \underbrace{---\ldots---}_{d\text{ stolpcev}}
\end{array}$$

Za $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= n, \\ a-b+c-d &= 0 \quad \text{(produkt tretje vrstice s prvo vrstico)}, \\ a+b-c-d &= 0 \quad \text{(produkt druge vrstice s prvo vrstico)}, \\ a-b-c+d &= 0 \quad \text{(produkt druge in tretje vrstice)}, \end{aligned}$$

vsota zgornjih štirih enačb pa nam da $4a = n$. ■

Če se v zgornjem sistemu enačb osredotočimo samo na predznake, v njem zagledamo matriko, ki je ekvivalentna H_4. Kot bomo videli, lahko pridemo do H_4 na več načinov. Do naslednjega si v naslednjem razdelku pomagamo z grafi, bolj natančno s 4-razsežno kocko.

Karakterizaciji z grafi in geometrijami

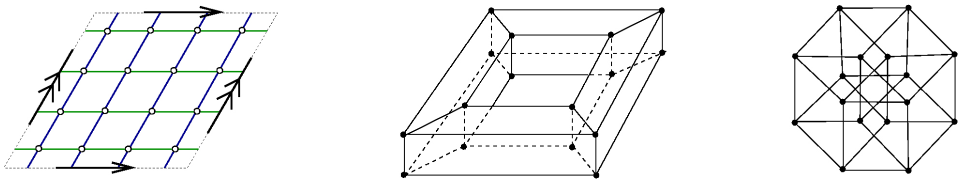
V povezanem grafu je *razdalja* med dvema vozliščema definirana kot število povezav najkrajše poti med njima, njegov *premer* pa je enak največji razdalji med njegovimi vozlišči. V povezanem grafu premera $d \in \mathbb{N}$ izberimo vozlišči u in v, ki sta na razdalji $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$, ter opazujmo sosede vozlišča v glede na razdaljo od vozlišča u. Zaradi trikotniške neenakosti velja, da so le-ta od u lahko oddaljena bodisi $i-1$ (kadar je $i > 0$), i ali pa $i+1$ (kadar je $i < d$). Število teh sosedov na razdalji $i-1$, i in $i+1$ označimo zaporedoma s c_i, a_i in b_i. Očitno je $a_0 = 0$ in $c_1 = 1$, smiselno pa je privzeti še $c_0 = 0 = b_d$. Če števila a_i, b_i in c_i niso odvisna od izbire vozlišč u in v na razdalji i za vsak $i \in \{0, \ldots, d\}$, bomo rekli, da je graf *razdaljno-regularen.* Tak graf je seveda regularen, saj je število sosedov vsakega njegovega vozlišča enako b_0. Zato velja tudi $b_0 = a_i + b_i + c_i$ in v njegovem *presečnem zaporedju*: $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ običajno izpustimo števila $a_1, \ldots, a_d$ (vseeno pa je treba omeniti, da število a_i predstavlja ravno regularnost grafa, ki ga inducirajo vozlišča na razdalji i od poljubnega vozlišča).

Hadamardov graf reda $2n$, $n \in \mathbb{N}$, je razdaljno-regularen graf s presečnim zaporedjem

$$\{2n, 2n-1, n, 1;\ 1, n, 2n-1, 2n\}\,.$$

Pri Hadamardovem grafu torej velja $a_i = 0$ za $i = 1, 2, 3, 4$. Za $n = 1$ dobimo 8-cikel (C_8), za $n = 2$ pa 4-razsežno kocko (Q_4). Glej sliko 1, s katere se lahko hitro prepričamo, da gre pri $n = 2$ res za Hadamardov graf.

Če pa se želimo prepričati, da je za $n = 2$ vsak Hadamardov graf izomorfen Q_4, je morda smiselno preučiti še kakšno lastnost teh grafov. Za

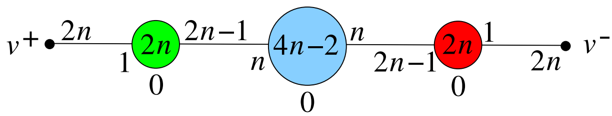


Slika 1. 4-razsežna kocka, predstavljena na tri načine (prva dva sta povezana z vložitvijo na torus): zaradi simetrije lahko izberemo za vozlišče u iz definicije razdaljno-regularnega grafa poljubno vozlišče. Potem je očitno $b_0 = 4$. Ker v tem grafu ni trikotnikov, velja $a_1 = 0$ in zato tudi $b_1 = 3$. Sledi $c_2 = 2$, $a_2 = 0$ (glede na to, da v grafu ni niti petkotnikov) ter $b_2 = 2$. Tako nadaljujemo vse do konca.

graf premera d pravimo, da je *antipoden*, če je biti na razdalji d ali 0 ekvivalenčna relacija na množici vozlišč. Če pa je v antipodnem grafu velikost vsakega antipodnega razreda enaka 2, rečemo, da je G 2-*krov*. In v resnici gre za topološke 2-krove. Npr. C_8 krije C_4, Q_8 pa poln dvodelen graf $K_{4,4}$, kot bomo videli v nadaljevanju.

Lema. *Hadamardov graf reda* $2n$ *je dvodelen* 2*-krov premera* 4 *z* $8n$ *vozlišči.*

Dokaz. Naj bo G Hadamardov graf reda $2n$. Ker je $c_4 = b_0$, je premer grafa G enak štiri.



Slika 2. Razdaljna particija Hadamardovega grafa glede na izbrano vozlišče: na levi je vozlišče v^+, nato proti desni sledijo v prvem krogu zbrani njegovi sosedi, v drugem zbrana vozlišča na razdalji 2 od v^+, v tretjem vozlišča na razdalji 3 in končno še vozlišče v^- na maksimalni razdalji. Povezave lahko potekajo le med zaporednimi krogi ali znotraj njih. Števila znotraj krogov predstavljajo števila k_i, tik nad črto so števila b_i, pod njo pa števila c_i. Pod krogi pa so še števila a_i.

Naj bo k_i oznaka za število vozlišč na razdalji i od fiksnega vozlišča. Ker poznamo presečno zaporedje grafa G, lahko izračunamo iz rekurzivne zveze $k_i c_i = k_{i-1} b_{i-1}$ (ki na dva načina šteje povezave med vozlišči, ki so na razdalji i in $i+1$): $k_1 = b_0 = 2n$, $k_2 = 4n-2$, $k_3 = 2n$ in končno $k_4 = 1$. To pomeni, da ima G res $8n$ vozlišč in da za vsako vozlišče v^+ v grafu G obstaja natanko eno vozlišče v^-, ki je na razdalji 4 od vozlišča v^+, torej je graf G 2-krov. Sedaj izberemo poljubno vozlišče v, nato pa množico vseh vozlišč grafa G razdelimo na dva dela glede na to, ali je razdalja do vozlišča v soda oziroma liha. Vozlišča, ki so na razdalji $i \in \{1,2,3,4\}$ od vozlišča v, inducirajo graf stopnje a_i. Ker pa je $a_i = 0$, to pa pomeni, da nam je uspelo razdeliti vozlišča grafa G na dva dela, tako da vsak del zase ne vsebuje sosednjih vozlišč, tj. graf G mora biti dvodelen. ■

Za vozlišči v^+ in v^- iz zgornjega dokaza bomo rekli, da sta *antipodni*, saj sestavljata antipodni razred. Mimogrede, tudi 1-skeleti Platonovih teles so razdaljno-regularni 2-krovi.

Konstrukcija. *Naj bo G Hadamardov graf reda $2n$. Ker je G dvodelen graf, obstaja delitev njegovih vozlišč na množici A in B, od katerih nobena ne vsebuje sosednjih vozlišč. Potem je $|A| = |B| = k_1+k_3 = 1+k_2+k_4 = 4n$. Ker sta antipodni vozlišči na medsebojni razdalji 4, morata obe ležati bodisi v množici A bodisi v množici B. V posamezni množici A oziroma B imamo torej $2n$ parov antipodnih vozlišč. Pare iz A označimo z $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, iz B pa z $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$. Potem je vsako vozlišče para $a_i = \{a_i^+, a_i^-\}$ sosednje natanko enemu izmed vozlišč para $b_j = \{b_j^+, b_j^-\}$. Naj bo H $(2n \times 2n)$-razsežna matrika, za katero je $H_{ij} = 1$, če je vozlišče a_i^+ sosednje vozlišču b_j^+ in $H_{ij} = -1$ sicer.*

Opomba. Naj bo G antipoden graf. Potem dobimo *antipodni kvocient* grafa G tako, da vzamemo za njegova vozlišča antipodne razrede, dva razreda pa sta sosednja, če je v G med njima kakšna povezava. Iz priprave na zgornjo konstrukcijo je razvidno, da je antipodni kvocient Hadamardovega grafa reda $2n$ res poln dvodelen graf $K_{2n,2n}$. Kaj pa so antipodni kvocienti 1-skeletov Platonovih teles?

Trditev. *Matrika H iz zgornje konstrukcije je Hadamardova.*

Dokaz. Ker je skalarni produkt vsake vrstice te matrike s seboj enak $k_1 = 2n$, je dovolj pokazati, da sta poljubni različni vrstici, npr. $i \neq i'$, med seboj pravokotni. Vrednosti, ki jih imata ti vrstici v j-tem stolpcu, se ujemata, če sta para vozlišč a_i in $a_{i'}$ povezana s parom b_j na enak način, se pravi, če je z obema vozliščema a_i^+ in $a_{i'}^+$ povezano bodisi vozlišče b_j^+ bodisi b_j^-. Ujemanje vrednosti vrstic v j-tem stolpcu torej pomeni, da imata vozlišči a_i^+ in $a_{i'}^+$ skupnega soseda (če pa ga nimata, ga morata imeti a_i^+ in $a_{i'}^-$). Skalarni produkt dveh različnih vrstic je zato enak $c_2 - (2n - c_2) = 2(c_2 - n) = 0$. ■

Prišli smo na pol poti do naslednjega izreka.

Izrek (Darke, Shad, Delorme). *Za $n \in \mathbb{N}$ obstaja Hadamardov graf reda $2n$ natanko tedaj, ko obstaja Hadamardova matrika reda $2n$.*

Pri drugem delu dokaza tega izreka pa nam pomaga konstrukcija iz naslednje trditve:

Trditev. *Naj bo H Hadamardova matrika reda $2n$, $n \in \mathbb{N}$. Potem je graf $G(H)$ z vozlišči $a_i^+, a_i^-, b_i^+, b_i^-$, $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ in povezavami $\{a_i^\varepsilon, b_j^\eta\}$, kjer je $\varepsilon = \eta$, če je $H_{ij} = 1$ in $\varepsilon \neq \eta$, če je $H_{ij} = -1$, Hadamardov graf.*

Dokaz. Zaradi očitne simetrije v definiciji grafa $G(H)$ med vozlišči a_i^+, a_i^-, b_i^+ in b_i^- je dovolj opazovati vozlišča glede na njihovo razdaljo od vozlišča $u = a_i^+$. Potem je $\{b_j^\varepsilon \mid \varepsilon = \operatorname{sgn}(H_{ij})\}$ množica sosedov vozlišča u, $\{a_j^\varepsilon \mid i \neq j\}$ množica vozlišč na razdalji 2 od u, $\{b_j^\varepsilon \mid \varepsilon = -\operatorname{sgn}(H_{ij})\}$ množica vozlišč na razdalji 3 od u, edino preostalo vozlišče a_i^- pa je potem na razdalji 4 od u.

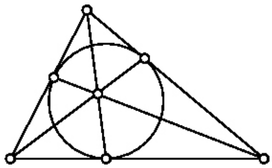
Torej je $G(H)$ antipoden graf premera 4 s presečnimi števili $b_0(G) = 2n = c_4$, $c_1(G) = 1 = b_3$, $b_1(G) = 2n - 1 = c_3$ in $c_2(G) = n = b_2$. ■

Iz Hadamardovih grafov je Nomura [10] skonstruiral objekte, ki se imenujejo *spin modeli* in so povezani tako s fiziko kot tudi s teorijo vozlov, glej npr. [4].

Na kratko omenimo še eno karakterizacijo Hadamardovih matrik. Le-ta je povezana s *končnimi geometrijami.* Naj bo H Hadamardova matrika, ki smo jo normalizirali tako, da so v prvem stolpcu in prvi vrstici same enice. Če zbrišemo prvi stolpec in prvo vrstico, dobimo kvadratno matriko N reda $4n - 1$, ki je $(-1, 1)$ točka/premica incidenčna matrika *Hadamardovega 2-načrta.* Predstavlja kvadratni 2-$(4n - 1, 2n - 1, n - 1)$ načrt, tj. končno geometrijo, sestavljeno iz

- množice $4n - 1$ točk in enako velike množice blokov (premic),
- velikost vsakega bloka je $2n - 1$, kar je hkrati tudi število blokov, ki vsebujejo poljubno točko,
- poljubni dve točki ležita v $n - 1$ blokih (to število pa hkrati pomeni tudi velikost preseka poljubnih dveh blokov).

Naj bo I relacija incidenčnosti med točkami in bloki. *Paleyjev načrt* definiramo takole: če je $4n - 1 = q$ potenca praštevila, potem vzamemo za točke in bloke elemente končnega obsega s q elementi, tj. $\mathrm{GF}(q)$, ter $x\,I\,y$



Slika 3. Fanova ravnina

natanko tedaj, ko $x + y$ ni popoln kvadrat. Za $q = 7$ dobimo znano *Fanovo ravnino* (glej sliko 3), iz nje pa H_8.

Geometrija, ki jo dobimo za $q = 11$, pa je povezana z enostavno končno grupo M_{12}, znano pod imenom *Mathieujeva grupa*, in že smo pri Hadamardovi matriki reda 12. Omenimo še, da lahko tedaj, ko je q praštevilo, za incidenčno matriko izberemo cirkulant, tj. matriko, katere vrstice dobimo s cikličnim zamikom prve.

Konstrukcije in Hadamardova matrična domneva

Iz n-razsežne Hadamardove matrike U in m-razsežne Hadamardove matrike V lahko s tenzorskim produktom matrik, ki je definiran z

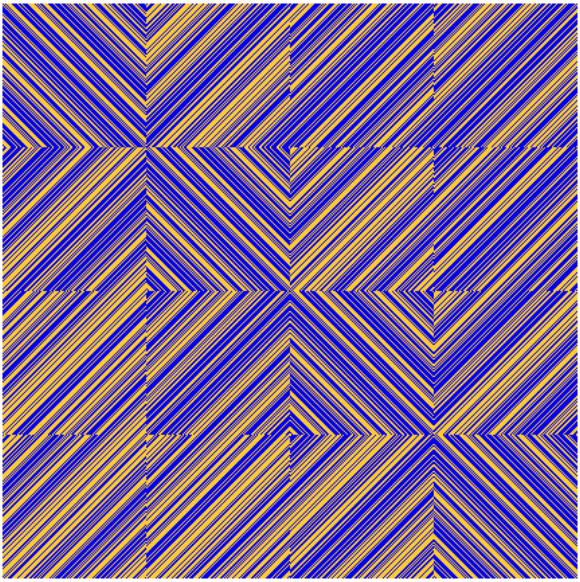
$$U \otimes V = \begin{bmatrix} u_{11}V & u_{12}V & \dots \\ u_{21}V & u_{22}V & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}v_{11} & u_{11}v_{12} & \dots & u_{12}v_{11} & u_{12}v_{12} & \dots \\ u_{11}v_{21} & u_{11}v_{22} & & u_{12}v_{21} & u_{12}v_{22} & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ u_{21}v_{11} & u_{21}v_{12} & & & & \\ u_{21}v_{21} & u_{21}v_{22} & & & & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix},$$

sestavimo (nm)-razsežno Hadamardovo matriko (namig: uporabi identiteti $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ in $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$). Bralec lahko hitro preveri, da velja $H_4 = H_2 \otimes H_2$ in $H_8 = H_2 \otimes H_4$, ter rekurzivno konstruira še Hadamardovo matriko H_n reda $n = 2^k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Omenimo še, da je vsaka Hadamardova matrika velikosti n, $n \leq 8$, ekvivalentna H_1, H_2, H_4 ali H_8. Tudi Hadamardova matrika reda 12 je enolično določena (do ekvivalentnosti), po drugi strani pa obstaja natanko pet neekvivalentnih Hadamardovih matrik reda 16, tri reda 20, 60 reda 24 in 487 reda 28. Dobljeno zaporedje $1, 1, 1, 5, 3, 60, 487, \dots$ ima oznako Sloan A007299.

Za konstrukcijo Hadamardovih matrik lahko uporabimo tudi *konferenčne matrike*, ki jih je leta 1950 vpeljal Belevitch [1] (za uporabo v telefoniji).

Drugače od Hadamardovih matrik ima n-razsežna konferenčna matrika C na diagonali same ničle in velja $CC^T = (n-1)I$. Posebno enostavni sta konstrukciji, če je C

- antisimetrična: v tem primeru vzamemo $H = I + C$, ali pa
- simetrična: dvakrat večja matrika H je v tem primerub sestavljena iz štirih blokov, na diagonali $I+C$ in $-I-C$, preostala bloka pa sta enaka $I-C$.



Slika 4. (428×428)-razsežna Hadamardova matrika, tj. matrika s paroma pravokotnimi stolpci in elementi, enakimi bodisi $+1$ (svetli piksli) bodisi -1 (temnni piksli). Ta primer sta odkrila H. Kharaghani in B. Tayfeh-Rezaie leta 2004 kot prvo tako matriko te velikosti. Še vedno pa ne vemo, ali obstaja (668×668)-razsežna Hadamardova matrika, čeprav je bila postavljena domneva, da $(4n \times 4n)$-razsežni primeri obstajajo za vsak $n \in \mathbb{N}$.

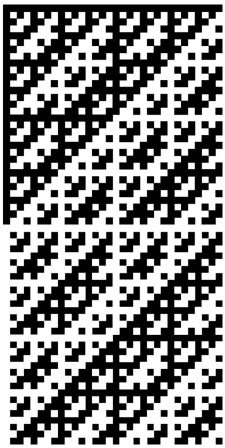
Konferenčne matrike reda $q+1$ (oziroma $2(q+1)$), kjer je q potenca praštevila in je $q \equiv 3 \pmod 4$ (oziroma $q \equiv 1 \pmod 4$), pa je konstruiral Paley leta 1933 [11] iz končnih obsegov (in popolnih kvadratov, ki jih je ravno polovica med neničelnimi elementi). Že samo pravkar opisane konstrukcije so dovolj, da skonstruiramo Hadamardove matrike do reda 100, z izjemo $n = 92$.[1] V slednjem primeru pa so L. Baumert, S. W. Golomb in M. Hall

[1] Bolj natančno znamo s Paleyjevim izrekom skonstruirati Hadamardovo matriko reda n, ko $2^e \mid n$ za $e > 1$ in je $(n/2^e) - 1$ potenca lihega praštevila. Za $n < 1000$ nam potem

leta 1962 poleg Williamsonove bločne metode [12], ta je prvi skonstruiral Hadamardovo matriko reda 172, že uporabili računalnike. Slavna *Hadamardova matrična domneva* iz leta 1893 pravi, da obstaja Hadamardova matrika reda $4n$ za vsako naravno število n. Leta 2004 sta iranska matematika H. Kharaghani in B. Tayfeh-Rezaie [7] konstruirala Hadamardovo matriko reda 428 (na sliki 4 je lepo razvidna tudi Williamsonova bločna metoda). Najmanjši odprti primeri obstoja Hadamardove matrike so sedaj matrike reda 668, 716, 876, 892. Najnovejšo konstrukcijo (Hadamardova matrika reda 764) pa je lansko leto odkril Djoković [3].

Hadamardove kode in ekspedicija Mariner 9

Definicija Hadamardovih matrik nam zagotavlja nekakšno „uravnoteženost", zato jih lahko uporabimo na številnih področjih. Tu predstavljamo sestavljanje učinkovitih kod za odpravljanje napak. Spomnimo se, da je *koda* podmnožica nekega prostora, v katerem je definirana razdalja [6]. Na prostoru m-teric najbolj pogosto uporabljamo Hammingovo razdaljo, ki je enaka številu različnih koordinat med dvema n-tericama. Morebitne napake v tem primeru odpravljamo po principu *najbližjega soseda*, ki dani m-terici izbere najbližji element kode.



Slika 5. H-koda

ostanejo še naslednje velikosti: 92, 116, 156, 172, 184, 188, 232, 236, 260, 268, 292, 324, 356, 372, 376, 404, 412, 428, 436, 452, 472, 476, 508, 520, 532, 536, 584, 596, 604, 612, 652, 668, 712, 716, 732, 756, 764, 772, 808, 836, 852, 856, 872, 876, 892, 904, 932, 940, 944, 952, 956, 964, 980, 988, 996.

Naj bo H Hadamardova matrika reda $4m$. Vzemimo vrstice matrike H in matrike $-H$ ter zamenjajmo vse „-1“ z „0“, glej sliko 5. Tako dobimo $8m$ vektorjev dolžine $4m$ nad binarnim obsegom $\mathbb{Z}_2$ (pri dolžini mislimo na število koordinat in ne evklidske razdalje). Neposredno iz definicije Hadamardove matrike sledi, da je Hammingova razdalja med poljubnima različnima vektorjema bodisi $2m$ ali $4m$ (razdalja do svojega negativa je $4m$, do vseh drugih pa $2m$). Te vrstice generirajo vektorski podprostor v $(\mathbb{Z}_2)^{4m}$, ki predstavlja kodo. Potem je njena najmanjša razdalja $2m$, koda pa lahko popravi do $(m-1)$-napak.

Tako dobljenim kodam pravimo *Hadamardove kode.* Če pa dobimo iz Hadamardove matrike reda 2 Hadamardovo matriko s tenzorskim produktom, potem kodo imenujemo tudi *Reed-Mullerjeva koda prve vrste.*

Proces uporabe kod bomo preverili na aplikaciji iz realnega sveta. Mariner 9 je bila vesoljska sonda iz leta 1971, katere namen je bil leteti do Marsa in pošiljati črno-bele slike na Zemljo (prva sonda, ki je letela v orbiti drugega planeta). Čez vsako sliko je bila nameščena podrobna mreža in za vsak kvadratek v tej mreži (piksel) je bila izmerjena sivina na skali od 0 do 63 (tj. 2^6 možnosti oziroma 6 bitov informacije). Ta števila, zapisana v binarni obliki, so bili podatki, ki so bili poslani na Zemljo (bolj natančno v laboratorij kalifornijskega instituta za tehnologijo v Pasadeni). Ob prihodu je bil signal šibek in je moral biti ojačan. Motnje iz vesolja ter termične motnje iz ojačevalca povzročijo, da včasih poslano enico preberemo kot ničlo (in obratno ničlo kot enico). Že če je verjetnost napake le 5 %, bo ob predpostavki, da ne bomo uporabili nobenih kod, kvaliteta slik izredno slaba (le 26 % pravilna, velja namreč $1 - 0,95^6 \approx 0,26$). Torej ni dvoma, da moramo uporabiti kode za odpravljanje napak. Vprašamo pa se lahko tudi, katere kode naj uporabimo. Vsaka koda bo povečala velikost podatkov, ki jih moramo poslati.

Mariner 9 je bilo majhno vozilo, ki ni moglo nositi velikega oddajnika, tako da je moral biti signal usmerjen, vendar je na velikih razdaljah signal težko uspešno usmeriti. Poleg tega pa je bila omejena tudi maksimalna velikost podatkov, ki se jih da poslati v danem trenutku (ko je oddajnik naravnan). Le-ta je bila enaka petkratni velikosti originalnih podatkov. Ker so bili podatki sestavljeni iz šestih bitov, so bile lahko kodne besede sestavljene iz tridesetih bitov.

Kode s ponavljanjem smo predstavili že v [5] (če vsak simbol ponovimo m-krat, lahko z večinskim pravilom odkodiramo pravilno, če je pri prenosu prišlo do manj kot $m/2$ napak). Koda s petimi ponovitvami je bila ena izmed možnosti, saj jo je enostavno implementirati, vendar pa le-ta lahko popravi le 2 napaki. Hadamardova koda, ki je zasnovana na Hadamardovi matriki reda 32, pa je lahko popravila 7 napak, tako da je bila vredna nekoliko bolj zapletene implementacije. Z uporabo te kode je verjetnost napake na sliki zreducirana na samo 0,01 % (v primeru kode s petimi ponovitvami pa bi bila verjetnost približno 1 %).

Predpostavimo, da je verjetnost, da se spremeni en bit, enaka $p = 0,01$. Potem je verjetnost, da je sprejeti piksel napačen $1 - 0,99^6 \approx 0,06$. Verjetnost v primeru kode s ponavljanjem pa je:

$$1 - \left[\binom{5}{0}(1-p)^5 + \binom{5}{1}p(1-p)^4 + \binom{5}{2}p^2(1-p)^3\right]^6$$

in v našem primeru verjetnost $6 \cdot 10^{-5}$, da bo prejeti piksel napačen. V primeru Hadamardove kode pa imamo:

$$1 - \sum_{i=0}^{7} \binom{32}{i} p^i (1-p)^{32-i} = \sum_{i=8}^{32} \binom{32}{i} p^i (1-p)^{32-i},$$

kar nam da bistveno boljšo verjetnost $8 \cdot 10^{-10}$. Reed-Mullerjeva koda sicer res potrebuje približno enako količino dodane informacije, je pa zato skoraj 70 000-krat zanesljivejša.

Sedaj pa preusmerimo našo pozornost k problemu kodiranja in odkodiranja z uporabo Hadamardove kode. Na prvi pogled kodiranje ne bi smelo povzročati težav. Imamo namreč 64 različnih podatkov in 64 kodnih besed, kar pomeni, da bi morala delovati že poljubna bijekcija. Težava pa je v tem, da je Mariner 9 majhna naprava, ta način pa bi zahteval hranjenje vseh 64 32-bitnih kodnih besed. Veliko bolj ekonomično v smislu prostora in lažje je bilo narediti hardware, ki dejansko izračuna kodno besedo, namesto da jo prebere iz pomnilnika.

S pravilno izbiro Hadamardove matrike postane Hadamardova koda linearna (o linearnih kodah si lahko preberete več v [8]), tako da je ta izračun v resnici množenje podatkov z generatorsko matriko kode. Prava izbira za Hadamardovo matriko je tista, ki jo dobimo iz tenzorskega produkta Hadamardove matrike reda 2. Z matematično indukcijo lahko preverimo, da je taka koda linearna. Sedaj pa si oglejmo pobliže še problem odkodiranja. Prejeti signal, tj. zaporedje 32-ih ničel in enic, je najprej spremenjen v obliko ± 1 (tako da zamenjamo „0“ z „-1“). Tako dobimo vektor $\boldsymbol{x}$, in če ni bilo napak, potem je $\boldsymbol{x}H^T$, kjer je H originalna Hadamardova matrika, vektor z 31-imi koordinatami enakimi 0 in eno koordinato enako ± 32.

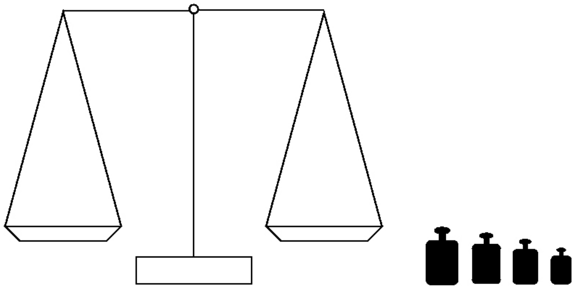
Slika 6. Površina Marsa

Če pa nastanejo napake, potem se ta števila spremenijo. Vendar pa največ 7 napak poveča vrednost z 0 na največ 14, vrednost 32 pa se zmanjša kvečjemu do 18 (v tem primeru prejeta beseda spominja na poslano kodno bolj kot katera koli izmed preostalih 63 kodnih besed). Torej nam mesto, na katerem se pojavi po absolutni vrednosti največja vrednost vektorja $\boldsymbol{x}H^T$, pove, katera vrstica matrike H (oziroma $-H$, če je originalna vrednost negativna) je bila poslana. Ker je bil originalni algoritem za odkodiranje signalov sonde Mariner 9 počasen (potreboval je 322 množenj in ustrezna seštevanja za vsako kodno besedo), so na Zemlji uporabili številne računske trike in tako zreducirali računanje na vsega eno tretjino.

Hadamardove matrike v kemiji in statistiki

Hadamardove matrike se uporabljajo tudi za izboljšavo natančnosti pri merjenjih podobnih objektov. Problem kemijskega ravnotežja, pri katerem lahko objekte postavimo na katero koli stran tehtnice, glej sliko 7, je skoraj popolnoma rešen s Hadamardovimi načrti, ki jih lahko dobimo iz Hadamardovih matrik [9].

Brez tega postopka bi morali v nekaterih primerih tehtati tudi do $\binom{n}{n/2}$-krat oziroma $\binom{n}{(n+1)/2}$-krat, pri čemer je n število objektov. Npr. stolpce lahko interpretiramo kot uteži na inštrumentu z dvema skalama, vrstice pa kot objekte, ki jih želimo tehtati. Med vsakim izmed n tehtanj uporabimo vseh n objektov. Ko merimo j, postavimo i-ti objekt na levo stran, če je $H_{ij} = 1$, sicer pa na desno. Ta način merjenja bo natančnejši (manjša varianca/sprememba), kot če bi merili vsak objekt posebej.



Slika 7

Kompleksne Hadamardove matrike

Če namesto $H_{ij} = \pm 1$ zahtevamo pri definiciji Hadamardove matrike raje $|H_{ij}| = 1$, transponiranje pa pomeni hermitsko transponiranje, dobimo kompleksne Hadamardove matrike. Podobno kot pri običajnih Hadamardovih matrikah imamo v bistvu natanko eno kompleksno Hadamardovo matriko reda 3 (t. i. Butson-Hadamardovo matriko) in jo sestavimo s primitivnim kubičnim korenom števila 3, ki ga označimo z w:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix}.$$

Kompleksne Hadamardove matrike obstajajo za vsako naravno število n (medtem ko pri realnih ni tako). Npr. Fourierove matrike $(F_n)_{jk} := e^{2\pi i(j-1)(k-1)/n}$, za $j, k = 1, 2, \ldots, n$, pripadajo temu razredu.

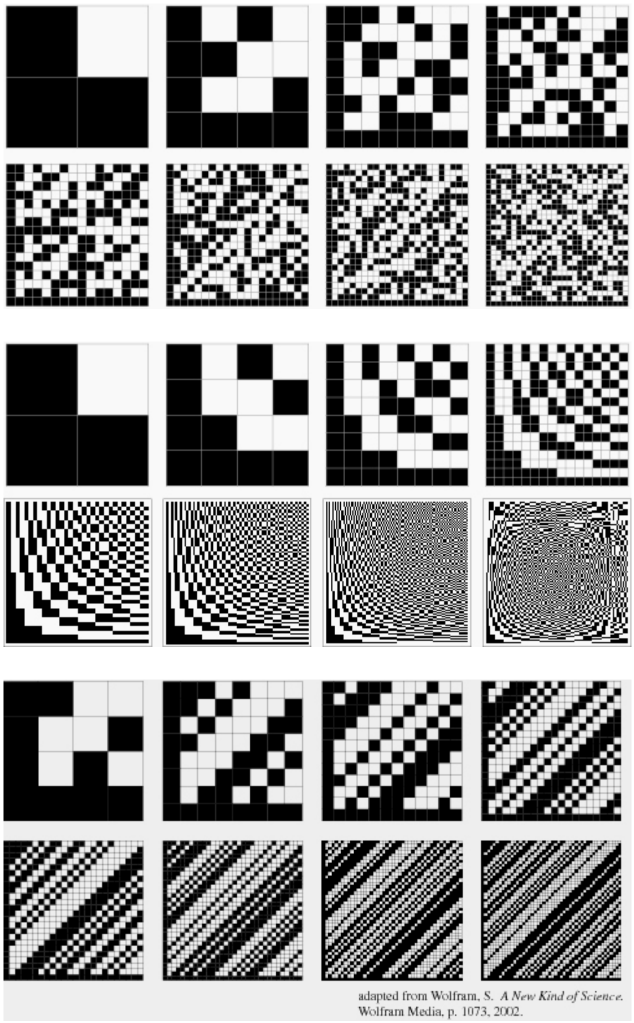
Za konec pa postavimo bralcem še nekaj zanimivih nalog:

Naloga 1. Za $n = 2^m$ in $1 \leq i \leq m$ definiramo matriko $M_n^{(i)}$ z $M_n^{(i)} := I_{2^{m-i}} \otimes H_2 \otimes I_{2^{i-1}}$. Dokaži, da je produkt $M_n^{(1)} M_n^{(2)} \ldots M_n^{(m)}$ enak Hadamardovi matriki H_n, ki smo jo skonstruirali s tenzorskim produktom.

Naloga 2. V primeru Reed-Mulerjeve kode prve vrste je sprejeta beseda $\boldsymbol{x}$ odkodirana tako, da izračunamo $\boldsymbol{x} H_n^T$. Če ni prišlo do prevelikega števila napak, potem bodo vse vrednosti vseh koordinat tega produkta blizu 0, z izjemo tiste, katere absolutna vrednost bo blizu n. Tako bomo vedeli, kateri vektor je bil v resnici poslan. Množenje s ± 1 imenujemo operacija. Primerjaj število operacij, ki so potrebne za odkodiranje, če

(a) uporabimo matriko H_n, (b) uporabimo reprezentacijo iz prve naloge.

Drugi primer je poznan kot *hitra Fourierova transformacija.*



Slika 8. Še nekaj predstavitev Hadamardovih matrik iz različnih rekurzivnih konstrukcij (naključne, Walshove in Paleyjeve Hadamardove matrike). Več o Hadamardovih matrikah lahko najdete v priročniku [2] (v katerem je 5. del posvečen prav Hadamardovim matrikam) ter na Wikipediji in Wolframovem raziskovalnem centru.

Naloga 3. Naj bo M $(m \times n)$-razsežna binarna matrika, v kateri je Hammingova razdalja med poljubnima dvema različnima vrsticama vsaj d (če postavimo Hadamardovo matriko H nad matriko $-H$ in zamenjamo simbole

± 1 v ničle in enice, dobimo primer z $m = 2n$ in $d = n/2$). Preštej število urejenih trojic (i, j, k), za katere sta i in j (indeksa) različni vrstici, k pa je tak stolpec, da je $M(i,k) \neq M(j,k)$, na dva načina – tako da nam en da neenakost, ki vsebuje d, drugi pa stolpčne vsote matrike M. Če privzamemo $2d > n$, potem dokaži oceno

$$m \leq \frac{2d}{2d-n},$$

ki ji pravimo v teoriji kodiranja tudi *Plotkinova ocena*. Kateri pogoj nam zagotovi enakost?

Naloga 4. V prejšnji nalogi privzemi $d = n/2$ in dokaži, da je potem $m \leq 2n$ ter da enakost implicira eksistenco Hadamardove matrike reda n.

LITERATURA

[1] V. Belevitch, *Theory of 2n-terminal networks with applications to conference telephony*, Electrical Communication **27** (1950), str. 231–244.

[2] C. J. Colbourn in J. H. Dinitz, *Handbook of Combinatorial designs*, druga izdaja, Chapman&Hall/CRC, 2007.

[3] D. Ž. Djoković, *Hadamard matrics of order 764 exist*, Combinatorica **28** (2008), str. 487–489.

[4] P. de la Harpe, *Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's Higman-Sims model*, Pacific J. Math. **162** (1994) 1, str. 57–96.

[5] A. Jurišić, *Napake niso večne – Presek, zgoščenke, planeti in kode*, Presek **30** (2002/2003) 6, str. 361–366.

[6] A. Jurišić in A. Žitnik, *Reed-Solomonove kode*, Obzornik mat. fiz. **51** (2004) 5, str. 129–143.

[7] H. Kharaghani, *A Hadamard matrix of order 428*, J. Combin. Des. **13** (2005), str. 435–440.

[8] S. Klavžar, *O teoriji kodiranja, linearnih kodah in slikah z Marsa*, Obzornik mat. fiz. **45** (1998) 4, str. 97–106.

[9] A. M. Mood, *On Hotelling's Weighing Problem*, Ann. Math. Statist. **17** (1946), str. 432–446.

[10] K. Nomura, *Spin models constructed from Hadamard matrices*, J. Combin. Th. Ser. A **68** (1994), str. 251–261.

[11] R. E. A. C. Paley, *On orthogonal matrices*, J. Math. Phys. **12** (1933), str. 311–320.

[12] J. Williamson, *Hadamard's determinant theorem and the sum of 4 squares*, Duke Math. J. **11** (1944), str. 65–81.

SPOMINSKA PLOŠČA FRANCU HOČEVARJU

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 01A55, 01A60, 01A70

Matematiku Francu Hočevarju so 20. junija 2009 v rojstni Metliki odkrili spominsko ploščo. Prispevek vsebuje njegov kratek življenjepis in delo ter predstavi nekaj njegovih znanstvenih objav.

MEMORIAL TABLET TO FRANC HOČEVAR

On June 20, 2009 a memorial tablet to mathematician Franc Hočevar at his birthplace in Metlika, Slovenia was unveiled. This article contains his short biography and work, and presents some of his scientific publications.

I. Ko smo odkrivali spominsko obeležje matematiku Francu Jožefu Hočevarju (1853–1919), smo se lahko v mislih vsaj za hip preselili v svoja osnovnošolska in dijaška, morda tudi v študentska leta, ko smo bolj ali manj uspešno stopali v svet matematike. Nekomu je bila morda pretežka, drugemu se je zdela nepotrebna, tu in tam pa se je le našel kdo, ki z njo ni imel posebnih težav. Še več, vzljubil jo je in postala mu je celo življenjska nuja in užitek, kot se je izrazil prof. Josip Plemelj (1873–1967). Nedvomno je za to potrebno imeti nekaj nadarjenosti, ki pa jo je treba še odkriti. Pri tem pa ne smemo pozabiti, da to ni vse: poleg nadarjenosti so za uspeh potrebni tudi pogum, delavnost in vztrajnost. In zato so po navadi dobrodošli dobri učitelji in profesorji. Franc Hočevar je imel to srečo, da je na gimnaziji v Ljubljani imel izvrstnega in priljubljenega profesorja, ki je spoznal njegove sposobnosti in ga popeljal v svet matematike, tako da jo je vzljubil za vse življenje.

Po končani gimnaziji je mladi Franc odšel na cesarski Dunaj, kjer je študiral matematiko in fiziko pri samih uglednih znanstvenikih tistega časa. Ludwig Boltzmann (1844–1906) je bil njegov profesor matematike in pri njem je mladi Franc tudi doktoriral, star komaj 22 ali 23 let, po podatkih v [4] leta 1875, po [2] pa leta 1876, in sicer se je v svoji doktorski disertaciji posvetil nekaterim določenim integralom. Postal je doktor filozofije in takoj za tem asistent na dunajski tehniški visoki šoli. V šolskem letu 1875/76 je

na Terezijanski akademiji na Dunaju opravil tudi vse predpisane obveznosti, ki so mu dovoljevale poučevati na srednjih šolah.

Kot zanimivost povejmo še, da je pri Boltzmannu leta 1879 doktoriral tudi Ignac Klemenčič (1853–1901) z raziskavami o obnašanju stekla po razbremenitvi. Da Slovenci na Dunaju njega dni niso bili od muh, pove tudi podatek, da je Boltzmann doktoriral pri Jožefu Stefanu (1835–1893).

A tudi tisti časi so bili trdi za zaposlitve v velikih univerzitetnih središčih, kajti mladih doktorjev znanosti se je z leti kar nekaj nabralo in le redki so imeli srečo, da so ostali na Dunaju. Toda monarhija je imela tudi druga visokošolska središča, starejša, novejša in nastajajoča, kjer se je morda laže dobilo službo.

Tako se je Franc Hočevar umaknil na Tirolsko, kjer je dve leti poučeval na gimnaziji, obenem pa je na univerzi v Innsbrucku spoznal še nekaj znanih matematikov in se habilitiral za privatnega docenta, kar mu tiste čase ni dajalo rednih prejemkov, ampak le pravico predavati na univerzi in upati, da se medtem najde mesto pravega docenta. Hočevarju se je upanje uresničilo in zlahka je postal na nemški tehniški visoki šoli v Brnu najprej izredni in nato redni profesor. Tudi čas delovanja na Moravskem je bil zanj le prehodno obdobje, kajti čez štiri leta so ga povabili v Gradec, kjer je na tamkajšnji sloviti tehniki predaval matematiko in s tem sodeloval pri izobrazbi številnih inženirjev, tudi iz slovenskih dežel, in dolga leta opravljal funkcijo dekana strojne fakultete ter prejel naslov dvornega svetnika. V Gradcu je ostal Hočevar do svoje smrti. Več podrobnosti o njegovem življenju in delu lahko preberemo v [4, 5, 6, 8].

Hočevarju je čas poučevanja na gimnaziji zagotovo koristil, kajti na podlagi svojih bogatih pedagoških izkušenj je v nemščini napisal celo vrsto odličnih učbenikov za aritmetiko in geometrijo za gimnazije in realke. Zelo se je zavzemal tudi za uvedbo odvoda in integrala v srednje šole. Veliko njegovih učbenikov so prevedli v druge jezike takratne monarhije in jih še dolgo uporabljali. Žal smo Slovenci ostali v takratnem spletu zgodovinskih okoliščin brez prevoda Hočevarjevih del.

Hočevarjeve učbenike še prav posebej odlikujejo jedrnatost, jasnost, preglednost, razumljivost, a kljub temu ne na škodo matematične natančnosti. Uporablja preprost in lahko razumljiv jezik, skrbi za uravnoteženost med teorijo in uporabo, izbira primerne in koristne naloge, tako da vzbuja pri dijakih zanimanje za predmet.

Zaradi vsega naštetega je nedvomno prav, da je Franc Jožef Hočevar dobil spominsko ploščo v svojem rojstnem mestu Metlika. V sodelovanju Belokranjskega muzejskega društva, DMFA ter Občine Metlika so jo na pobudo metliškega učitelja matematike Jožeta Vraničarja odkrili 20. junija 2009, torej 90 let in en dan po Hočevarjevi smrti, in sicer na metliški komendi. Kljub močno deževnemu vremenu se je slovesnosti udeležilo precej ljudi od blizu in daleč, med njimi tudi podpredsednica DMFA Nada Razpet in častni član prof. Dušan Modic. Zbrane so pozdravili metliška županja Renata Brunskole, direktorica Belokranjskega muzeja v Metliki Andreja Brancelj Bednaršek in minister za šolstvo in šport dr. Igor Lukšič, nekaj besed o Hočevarju pa je dodal avtor tega prispevka. Slovesnost so povezovali domači recitatorji, za glasbene vložke pa so poskrbeli domači tamburaši, ki so vnesli v prireditev nekaj značilnega belokranjskega melosa.

Spominsko obeležje v Metliki, odkrito v čast matematiku Francu Hočevarju, se je tako pridružilo verigi obeležij v Zagorici, Moravčah, Cerknem, Ljubljani, Gornjem Gradu, Novem mestu in Štrukljevi vasi ter na Bledu in Kamnem Potoku. Lahko bi bilo Metliki, vsej Beli krajini, Sloveniji in svetu v ponos.

II. Povejmo še nekaj o znanstveni dejavnosti Franca Hočevarja. Objavil je celo vrsto razprav, ki segajo od problematike srednješolskega matematičnega pouka do področij mehanike in elektrotehnike, največ pa v čisto matematiko. Njegove matematične razprave obravnavajo probleme iz diferencialnega in integralnega računa, diferencialnih enačb, sistemov diferencialnih enačb, algebre, teorije števil, neskončnih vrst in produktov, numerične analize in analitične geometrije v prostoru. Več člankov je posvetil algebraičnim formam in deljivosti le-teh z linearnimi in kvadratnimi formami. Opravil je obsežno in pestro delo, ki se lahko kosa z delom marsikaterega matematika v našem času.

V Sloveniji žal še vedno nimamo zbranih vseh Hočevarjevih člankov. Na srečo so na svetovnem spletu v bazi podatkov pri *Zentralblatt für Mathematik* dostopni povzetki. Tako si lahko ustvarimo vsaj približno predstavo, o čem je pisal. Oglejmo si še nekaj njegovih znanstvenih rezultatov.

1. V članku *Über die unvollständige Gammafunktion (O nepopolni funkciji gama)* je Hočevar našel razvoj nepopolne funkcije gama v vrsto. Ta je za pozitivni realni spremenljivki a in x definirana z integralom (uporabimo oznake iz [1, 3]):

$$\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt\,. \tag{1}$$

Podintegralske funkcije pa ne integriramo po celotnem poltraku $(0,\infty)$ kot pri funkciji gama, ki je dana z integralom

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt\,,$$

zato ji pravimo *nepopolna*. Integrala (1) se lotimo z metodo per partes:

$$\gamma(a,x) = \frac{1}{a}t^a e^{-t}\Big|_0^x + \frac{1}{a}\int_0^x t^a e^{-t}dt = \frac{1}{a}x^a e^{-x} + \frac{1}{a}\gamma(a+1,x)\,.$$

Tako smo našli rekurzijo

$$\gamma(a,x) = \frac{1}{a}x^a e^{-x} + \frac{1}{a}\gamma(a+1,x)\,.$$

Če jo uporabimo večkrat, najdemo razvoj v vrsto

$$\gamma(a,x) = \frac{1}{a}x^a e^{-x}\left(1 + \frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{(a+1)(a+2)} + \cdots\right),$$

ki je uporabna za majhne x in velike a.

2. Znano je, da je naravno število, ki je zapisano v desetiškem sistemu, deljivo z 11, če je alternirajoča vsota njegovih števk deljiva z 11. Hočevar je to pravilo v članku *Zur Lehre der Teilbarkeit der ganzen Zahlen (K teoriji deljivosti celih števil)* posplošil na naravno število n, ki je zapisano v številskem sistemu s poljubno osnovo b:

$$n = a_r a_{r-1} \ldots a_2 a_1 a_0(b) = a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \cdots + a_1 b + a_0 \,. \tag{2}$$

Pri tem so $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_1, a_0$ števke števila n v številskem sistemu z osnovo b. Velja $0 \leq a_k < b$. V zapisu (2) razdelimo števke od desne proti levi v skupine po q števk:

$$\ldots |a_{3q-1} \ldots a_{2q+1} a_{2q}|a_{2q-1} \ldots a_{q+1} a_q|a_{q-1} \ldots a_1 a_0| \,.$$

Nato definiramo cela števila

$$m_0 = a_{q-1} \ldots a_1 a_0(b) \,, \quad m_1 = a_{2q-1} \ldots a_{q+1} a_q(b) \,,$$

$$m_2 = a_{3q-1} \ldots a_{2q+1} a_{2q}(b) \,, \quad \ldots$$

in alternirajočo vsoto

$$m = m_0 - m_1 + m_2 \pm \cdots = \sum_{r \geq 0} (-1)^r m_r \,,$$

ki je tudi celo število.

Velja trditev: Če število $b^q + 1$ deli m, potem $b^q + 1$ deli tudi n.

Dokažemo jo pa tako. Najprej je:

$$n = \sum_{k \geq 0} a_k b^k = \sum_{r \geq 0} \sum_{s=0}^{q-1} a_{qr+s} b^{qr+s} = \sum_{r \geq 0} b^{rq} \sum_{s=0}^{q-1} a_{qr+s} b^s = \sum_{r \geq 0} b^{rq} m_r \,.$$

Oglejmo si razliko:

$$n - m = \sum_{r \geq 1} m_r (b^{qr} - (-1)^r) \,.$$

Za lihe indekse r, denimo $r = 2j+1$, dobimo v členih zgornje vsote na desni strani faktorje $(b^q)^{2j+1} + 1$, ki se dajo razstaviti:

$$(b^q)^{2j+1} + 1 = (b^q + 1) P(b, q, j) \,,$$

kjer je $P(b, q, j)$ celo število.

Za sode indekse r, denimo $r = 2j$, pa dobimo v členih vsote na desni strani faktorje $(b^q)^{2j} - 1$, ki se tudi dajo razstaviti:

$$(b^q)^{2j} - 1 = (b^{2q})^j - 1 = (b^{2q} - 1)Q(b, q, j) = (b^q + 1)(b^q - 1)Q(b, q, j)\,,$$

kjer je $Q(b, q, j)$ neko celo število.

Torej je celo število $n - m$ deljivo z $b^q + 1$. Sedaj takoj spoznamo: če $b^q + 1$ deli m, potem deli tudi n.

Očitno za $b = 10$ in $q = 1$ dobimo kriterij deljivosti naravnega števila n z 11.

3. Franc Hočevar se je ukvarjal, kot smo že zapisali, tudi z diferencialnimi enačbami in sistemi diferencialnih enačb. V svojem prispevku *Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung* $L\,dx + M\,dy + N(x\,dy - y\,dx)$ (*K integraciji Jacobijeve diferencialne enačbe* $L\,dx + M\,dy + N(x\,dy - y\,dx)$) je podal eleganten zapis rešitve diferencialne enačbe

$$\frac{dx}{a_1x + b_1y + c_1 - x(a_3x + b_3y + c_3)} = \frac{dy}{a_2x + b_2y + c_2 - y(a_3x + b_3y + c_3)}\,,$$

ki ima same realne koeficiente. Uporabimo nekoliko modernejšo obravnavo. Avtor si je pomagal z matriko A, ki jo je priredil zgornji enačbi:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Kadar ima matrika A različne lastne vrednosti $\lambda_k, (k = 1, 2, 3)$, obstajajo linearno neodvisni lastni vektorji $v_k = [\alpha_k, \beta_k, \gamma_k]^t, (k = 1, 2, 3)$, in rešitev dane diferencialne enačbe v implicitni obliki, to se pravi njen integral, je

$$(\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1)^{\lambda_2-\lambda_3}(\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2)^{\lambda_3-\lambda_1}(\alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3)^{\lambda_1-\lambda_2} = konst.$$

Avtor se ni izognil obravnavi primera, ko sta dve lastni vrednosti matrike A konjugirano kompleksni, in primerov, ko imamo dve ali vse tri lastne vrednosti matrike A med seboj enake. Ugotovil je tudi, da je integral obravnavane diferencialne enačbe algebraičen, če so realni deli vseh treh lastnih vrednosti matrike A med seboj enaki.

Tako obravnava Jacobijevo diferencialno enačbo Vjačeslav Vasiljevič Stepanov (1889–1950) v [7] (nemški prevod iz ruščine) s pripombo, da jo tako predava tudi Dmitrij Fjodorovič Egorov (1869–1931) na univerzi v Moskvi.

4. V članku *Über die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen (O integraciji nekega sistema simultanih diferencialnih enačb)* se je Hočevar lotil sistema diferencialnih enačb

$$\frac{dx_1}{X_1 - x_1 X} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n - x_n X} = \frac{dz}{X_{n+1} - zX},$$

kjer je X homogena funkcija poljubne stopnje h in $X_1, \ldots, X_{n+1}$ linearne homogene funkcije spremenljivk $x_1, \ldots, x_n, z$. Dokazal je, da se tedaj, ko je h celo število in

$$X = a_1 x_1^h + \cdots + a_n x_n^h + a_{n+1} z^h,$$

sistem da rešiti z integracijami do konca.

5. Ob koncu omenimo še Hočevarjevo prizadevanje za uvedbo odvoda in integrala v srednje šole. Verjetno je sledil Felixu Kleinu (1849–1925), ki je tudi videl potrebo po uporabi odvoda in integrala za korektno obravnavo fizikalnih problemov. Hočevar je v prispevku *Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen oder nicht? (Ali gre uvajati elemente infinitezimalnega računa v srednje šole ali ne?)* najprej orisal obseg in potek pouka matematike na avstrijskih univerzah, visokih tehniških in srednjih šolah vključno z izobrazbo strokovnih učiteljev. Prišel je do spoznanja, da je treba dotakratno učno snov skrbno prerešetati in v teorijo funkcij vpeljati odvod in integral. Podal je nekaj predlogov, katere vsebine bi se dalo skrčiti na račun novih. S problemi, kaj sodi in kaj ne sodi v pouk matematike, se tudi pri nas ukvarjamo zadnja desetletja.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.

[2] J. Blackmore, *Ludwig Boltzmann, His later life and philosophy, 1900–1906*, Book one: a documentary history, Kluwer, 1995.

[3] I. S. Gradstein in I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, ur. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.

[4] J. Povšič, *Bibliografija Franca Hočevarja*, SAZU, Ljubljana, 1978.

[5] J. Povšič, *Franc Hočevar: ob stoletnici njegovega rojstva*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 4, str. 97–102.

[6] J. Povšič, *Prispevek Franca Hočevarja pouku elementarne matematike*, Obzornik mat. fiz. **8** (1961) 2, str. 87–92.

[7] W. W. Stepanow, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, VEB deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[8] P. Šišma, *Mathematics at the German Technical University in Brno*, Franzbecker, Berlin, 2006.

VESTI

MATEMATIČNE NOVICE

Predavanje profesorja Efima Zelmanova na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani

Prvega junija 2009 je profesor **Efim Zelmanov** s Kalifornijske univerze v San Diegu imel na FMF v Ljubljani predavanje z naslovom *Asymptotic properties of finite groups and finite dimensional algebras.*

Profesor Zelmanov je leta 1994 na Mednarodnem matematičnem kongresu v Zürichu dobil Fieldsovo medaljo, najbolj prestižno nagrado na področju matematike. Zato je njegov obisk privabil matematike iz vse Slovenije. Profesor Zelmanov je znan po svojem delu na področju neasociativne algebre, natančneje Jordanovih in Liejevih algeber. Največjo slavo pa si je pridobil, ko je z uporabo svojih rezultatov rešil dolgo neosvojljivi *Omejeni Burnsidov problem* iz teorije grup. Predavanje je pokazalo izredno širino metod, ki jih obvlada profesor Zelmanov – od teorije števil do kombinatorike in teorije grafov. Poslušalci smo lahko občudovali njegovo navdušenje nad matematičnim raziskovanjem.

Efim Izakovič Zelmanov se je rodil v Habarovsku leta 1955. Začetni del svoje kariere je naredil v Novosibirsku. Leta 1987 je emigriral iz Sovjetske zveze. Od leta 1990 dela v ZDA. Kot smo lahko videli, je profesor Zelmanov skromen in dostopen znanstvenik. Fotografije s predavanja profesorja Zelmanova si lahko ogledate na portalu *flickr* [1]. (Najenostavneje je, če v internetni brskalnik vtipkate *Efim Zelmanov flickr.*)

Nova matematična priznanja

Nobelove nagrade za matematiko žal ni. Kot nekakšno nadomestilo je dolgo časa veljala **Fieldsova medalja**. Dve do štiri take medalje podeljujejo vsaka štiri leta na Mednarodnem matematičnem kongresu. Dobitniki Fieldsove medalje morajo biti mlajši kot štirideset let. V denarju nagrada ni obilna in znaša okrog deset tisoč EUR. Še zmeraj pa nosi izreden prestiž.

To je nazadnje pokazal velik odmev, ko Grigorij Perelman leta 2006 ni hotel sprejeti te medalje.

Od leta 2003 imamo **Abelovo nagrado**. Sredstva zanjo je dala Abelova domovina Norveška. Letos jo je dobil ruski matematik Mihail Gromov, ki zdaj dela v Franciji. Nagrada je letos znašala približno sedemsto tisoč EUR.

V letu 2004 je bila prvič podeljena **Shawova nagrada** za matematiko, ki znaša milijon ameriških dolarjev. V sklad za nagrado je prispeval podjetnik Run Run Shaw iz Hongkonga. Letos sta nagrado dobila angleški matematik Simon K. Donaldson in ameriški matematik Clifford H. Taubes. Profesor Donaldson je leta 1986 dobil tudi Fieldsovo medaljo. Simon Donaldson je bil leta 1994 na Univerzi v Oxfordu mentor doktoranda Pavla Sakside, ki je zdaj profesor na FMF.

Naslednje leto pa bodo na Mednarodnem matematičnem kongresu v Indiji prvič podelili **Chernovo medaljo**. Slavni kitajski matematik Shiing – Shen Chern (1911–2004) je doktoriral leta 1936 v Hamburgu. Njegovo področje je bila diferencialna geometrija. Po njem se imenujejo *Chernovi razredi*. Dolgo je bil profesor na Kalifornijski univerzi v Berkeleyu in je bil velikodušen donator za znanost. Nagrada bo znašala pol milijona dolarjev. Polovico nagrade dobi prejemnik, drugo polovico ustanova, ki jo izbere prejemnik.

To so le nekatere najbolj opazne nagrade. Mednarodna matematična unija podeljuje še nagrado za matematične prispevke na področju Informacijskih znanosti. Nagrada nosi ime finskega matematika Rolfa Nevanlinne, saj sredstva znajo prispeva Univerza v Helsinkih. Nagrada Carla Friedricha Gaussa pa je rezervirana za Uporabno matematiko. Sklad za Gaussovo nagrado je (nemški državni) denar, ki je ostal po Mednarodnem matematičnem kongresu v Berlinu.

Na srečo je zadnja leta več donatorjev ustanovilo še druge nagrade in štipendije za področje matematike ter celo privatno financirane matematične raziskovalne inštitute. Lepe vsote denarja prinaša tudi rešitev nekaterih dolgo odprtih matematičnih problemov.

LITERATURA

[1] Slike s predavanja Efima Zelmanova na FMF:
`http://www.flickr.com/photos/39093307@N04/sets/72157619231076682`.

Peter Legiša

GALILEJEVE LUNE

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 96.30.L-

Pred štiristo leti se je Galilej lotil opazovanja nočnega neba s teleskopom. Pri tem je odkril štiri največje Jupitrove lune. Opazovanje gibanja lun je pomembno prispevalo k razvoju heliocentričnega sistema in k spoznanju o končni hitrosti svetlobe. Opazovanja Jupitrovih lun se s preprostimi sodobnimi pripomočki lahko lotimo tudi sami.

JOVIAN SATELLITES (GALILEAN MOONS)

Four hundred years ago Galileo observed the night skies with a telescope. He discovered the four largest moons of Jupiter. The motion of the moons contributed to advent of the heliocentric system and recognition of the finite speed of light. The observation of the Jovian satellites can be done at home with the use of some simple modern utilities.

Kadar je Jupiter v opoziciji*, je poleg Lune najsvetlejši objekt na nočnem nebu. Od njega sta lahko svetlejša le Venera in Mars. Začetek letošnje jeseni nam je postregel z izrazitim Jupitrom, ki dominira na nočnem nebu in ubira podobno pot kot podnevi Sonce. Njegovo opaznost so izkoristili tudi ob svetovnem letu astronomije ter 28. avgusta letos organizirali ogled Jupitra in Lune. Poleg tega pa pripravljajo tudi projekt Galilejeve noči (od 22. do 24. oktobra 2009), kjer bo ljudem omogočeno, da ponovijo Galilejeva opazovanja izpred 400 let. V času Galilejevih noči bo imel Astronomsko geofizikalni observatorij na Golovcu (poleg vsake prve srede v mesecu) dan odprtih vrat v četrtek, 22. oktobra. V primeru slabega vremena pa v petek, 23. oktobra.

Tudi sam sem s preprostim fotoaparatom septembra nekaj dni sledil plesu Galilejevih lun (Io, Evropa, Ganimed in Kalisto). Rezultat je prikazan v kolažu močno povečanih (premer Jupitra je le 16 točk) izsekov slik, kjer predzadnji dan izstopa po zamegljenosti (vsaka noč pač ni enako jasna). Fotoaparat Minolta DiMAGE Z3 izstopa edino po 12-kratnem zoomu oziroma ekvivalentnem teleobjektivu 420 mm. Drugi podatki pri slikanju so: 4 milijoni slikovnih točk, čas osvetlitve 3,2 s (pri borni občutljivosti ISO 400 in močno zašumljeni sliki) ter zaslonsko število 4,2.

*Leži na zveznici Zemlje in Sonca, vendar na drugi strani Zemlje kot Sonce.

Slika 1. Jupiter lahko opazujete okoli desete ure zvečer na južnem nebu kar visoko nad obzorjem. Če ni oblakov, ga ne boste zgrešili.

Naj navržem še nekaj podatkov o Jupitru. Je največji planet v Osončju, peti po vrsti in spada med plinaste planete, saj nima trdnega površja. Njegov premer je 11,21-krat večji od Zemljinega in je precej sploščen (ekvatorialni polmer meri 71 500 km, polarni pa 66 900 km). Njegova povprečna gostota je 1,3-krat večja od gostote vode, kar pomeni maso $1{,}9 \times 10^{27}$ kg (320 Zemljinih mas). Oddaja 1,67-krat več energije, kot je prejema od Sonca, in pri masi mu manjka še kakšen velikostni red, pa bi zagorel, in nebo na Zemlji bi krasili dve sonci. Njegova površina je prepredena z vzorcem pasov in vrtincev, od katerih je najbolj prominentna Velika rdeča pega. Večinoma je sestavljen iz vodika (87 %) in helija (13 %). Ima več kot 60 znanih lun, od katerih so štiri prej naštete večje in jih je že leta 1610 odkril Galileo Galilej (1564–1642), ter sistem tankih prstanov. Galilejevo odkritje gibanja Jupitrovih lun, ki ga lahko opazimo že po nekaj urah, je bilo prvo odkritje nebesnega gibanja, ki ni bilo navidezno osredotočeno na Zemljo, in velika podpora Kopernikovi heliocentrični sliki gibanja planetov.

Jupitrove lune so pomembne tudi zato, ker je mladi danski astronom

Slika 2. Kolaž sedmih zaporednih slik Jupitrovih lun. Na sliki je dobro vidno premikanje štirih Galilejevih lun. Štiri lune lahko razločite na četrtem posnetku.

Ole Christensen Rømer (1644–1710) v sedemdesetih letih 17. stoletja z opazovanjem zakasnitve mrkov Jupitrove lune Io pokazal, da hitrost svetlobe ni neskončna. Mrki si ne sledijo v enakih časovnih razmikih, ampak za malenkost prehitevajo izračunane napovedi v obdobju, ko se Zemlja giblje proti Jupitru, in malenkostno zaostajajo, ko se Zemlja od Jupitra oddaljuje. Zakasnitev mrkov med trenutkom, ko je Zemlja najbliže Jupitru, in trenutkom, ko je Zemlja najdlje, je ocenil na 22 minut. S svojim odkritjem ni takoj prepričal strokovne javnosti. Znani astronom Cassini, ki je bil takrat njegov šef v pariški zvezdarni, se ni strinjal z njegovo interpretacijo, idejo pa sta podprla Huygens in Newton. Hitrosti svetlobe ni nikoli izračunal, le ocenil je, da porabi svetloba manj kot sekundo, da prepotuje razdaljo, ki je enaka enemu zemeljskemu premeru (to ustreza 12 000 km/s).

V uredništvu pozivamo bralce, da pošljejo svoje fotografije Jupitra. Najboljšo bomo objavili in nagradili z DVD-jem *Velike oči, zazrte v nebo (Eyes on the Skies).*

OB ODPRTJU PRENOVLJENEGA PETERLINOVEGA PAVILJONA†

Danes predajamo v uporabo Peterlinov paviljon, objekt, ki zajema Veliko fizikalno predavalnico, Malo fizikalno predavalnico in prostore, kjer pripravljamo in hranimo fizikalne eksperimente, namenjene predavanjem iz fizike.

Prof. dr. **Anton Peterlin** se je zavedal, da iz republiškega proračuna ne bo mogel dobiti dodatnih sredstev za prostorsko in tehnično izboljšanje študija in pouka fizike na univerzi. Zato je našel zanj značilno rešitev iz zagate. S Kidričevim privoljenjem je vključil gradnjo današnjega Peterlinovega paviljona v okvir sprejetega projekta gradnje Fizikalnega instituta SAZU, ki ga je financirala takratna zvezna vlada.

Tretjega novembra leta 1953 je bila predana v uporabo ta predavalnica, ki danes nosi ime po njenem pobudniku Antonu Peterlinu. V tej stavbi že od začetka izvajamo predavanja iz osnovnih kurzov fizike za študente naravoslovnih ter tehniških fakultet.

Ob odprtju leta 1953 je A. Peterlin dejal: *Nova zgradba obsega poleg velike predavalnice za 350 slušateljev še manjšo predavalnico za specialna predavanja višjih letnikov, posebne prostore za praktične vaje študentov ter garderobe in stranske prostore. Namenjena pa je predavanjem iz fizike in matematike tako za slušatelje univerze kakor tudi za tehnike. Po načinu gradnje in celotni opremi je to najmodernejša predavalnica ne le v Ljubljani, temveč v vsej državi. V njej bo mogoče organizirati pouk na res sodoben način in čim bolj ekonomično.*

Pri projektiranju se Peterlin ni zanašal le na arhitekta, temveč se je pri zamisli zgledoval po takratnih sodobnih predavalnicah v Baslu in Zürichu. Tja je celo poslal na ogled demonstratorja in elektrotehnika **Davorina Tomažiča**.

V vseh letih po dograditvi predavalnice je Oddelek za fiziko (OF) iz lastnih sredstev skrbel za vzdrževanje in posodabljanje zbirke fizikalnih eksperimentov, ki jih je kakih 4000. Pri izbiri in posodabljanju zbirke smo pogosto upoštevali želje uporabnikov drugih članic Univerze v Ljubljani (UL). Prav

† Iz nagovora predstojnika Oddelka za fiziko FMF prof. dr. Janeza Bonče ob odprtju prenovljenega Peterlinovega paviljona 29. maja 2009.

tako smo s pomočjo dveh tehnikov skrbeli za tehnično podporo učiteljem Fakultete za matematiko in fiziko (FMF) kot tudi drugih fakultet.

Kljub rednim vzdrževalnim delom, ki so bila financirana izključno iz lastnih sredstev OF FMF, so se v zadnjem času pokazale bistvene strukturne napake na objektu. Prostori Male fizikalne predavalnice ter pripravljalnice so se začeli pogrezati, pokale so stene. Objekt bi lahko v kratkem postal z varnostnega vidika neuporaben, grozila je izguba dovoljenja za opravljanje pedagoške dejavnosti v njem.

Zato je FMF v letu 2007 zaprosila službo za investicijska dela na UL za pomoč pri sanaciji objekta ter iz lastnih sredstev krila pripravo projektne dokumentacije. Projekt prenove je sestavil arhitekt **Boris Volk** ob upoštevanju naslednjih arhitekturnih smernic:

- Ojačanje statike objekta tako, da ustreza aktualnim predpisom o protipotresni gradnji;
- ohranitev prvotne zunanje arhitektonske zasnove objekta ter, kolikor je bilo mogoče, smiselna ohranitev prvotne oblike pri zasnovi notranje

opreme;

- sledenje osnovnemu namenu predavalnice: prikaz fizikalnih poizkusov. V ta namen sta obe predavalnici opremljeni s številnimi električnimi priključki, potrebnimi za izvedbe fizikalnih poizkusov, kot tudi s sodobno avdio- in videotehniko.
- uporaba trajnih materialov; objekt je v skoraj nespremenjeni obliki z zglednim vzdrževanjem služil osnovnemu namenu več kot 50 let.
- obnova vse električne, vodovodne ter plinske instalacije in zunanje podobe objekta.

Za izvedbo projekta je bilo v različnih fazah zaslužnih veliko ljudi. UL ter Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo sta prispevala finančna sredstva. Potrebno je bilo sodelovanje Univerze, Ministrstva in Instituta Jožef Stefan (IJS). Pomemben je bil tudi prispevek zaposlenih na fakulteti. Pohvalo zasluži celotna ekipa projektantov, izvajalcev ter nadzornikov. Posebej smo hvaležni projektantu arhitektu **Borisu Volku** za razumno upoštevanje naših posebnih želja. Izkazal je obilico potrpljenja pri vključevanju naših želja v smiselno celoto.

Relief je oblikovala kiparka **Neža Jurman** pod vodstvom prof. **Matjaža Počivavška**, ki je razpisal natečaj, na katerem so sodelovali študenti Akademije za likovno umetnost. Posebna zahvala gre tudi doc. dr. **Primožu Ziherlu**, ki je dal idejo za postavitev spominskega obeležja prof. Peterlinu ter tudi poskrbel za izvedbo.

Za konec želim poudariti, da je fizika tako pridobila v uporabo sodobno opremljeno predavalnico, ki zadošča svetovnim standardom za fizikalne predavalnice. Predavalnica ne bo koristila le študentom FMF temveč vsem študentom naravoslovnih in tehniških fakultet, ki bodo v njej poslušali predavanja. Sodobno opremljena predavalnica je morda tudi priznanje za velik prispevek FMF na področju znanstvenoraziskovalne dejavnosti UL. Pred dvema letoma smo znatno pripomogli k uvrstitvi UL na seznam 500 najboljših svetovnih univerz, merjeno po šanghajski lestvici. Fakulteta za matematiko in fiziko je prispevala približno 30 odstotkov celotne bere znanstvenih del na UL. To je približno šestkrat toliko, kot znaša njena relativna udeležba v proračunu UL. Zahvaljujem se tudi IJS, ki je kot lastnik odobril obnovo paviljona. Pri tem ne morem mimo dejstva, da so nadpovprečni raziskovalni dosežki mnogih kolegov s FMF tudi posledica tesnega sodelovanja med IJS ter FMF.

PRENOVLJENI PETERLINOV PAVILJON

Konec maja, natančneje 29. 5. 2009, smo slovesno odprli prenovljeni Peterlinov paviljon. Velika fizikalna predavalnica v njem je pred tem praktično nespremenjena več kot petdeset let od jutra do večera gostila množice študentov. Zato smo težko čakali konec del. Prenova je obdržala dobre plati originalne zasnove, pri kateri je precejšnjo besedo imel pobudnik gradnje prof. dr. Anton Peterlin. Seveda pa je v paviljonu zdaj tudi mnogo izboljšav. Navzoče je pozdravil dekan Fakultete za matematiko in fiziko akademik prof. dr. Franc Forstnerič. Sledil je slavnostni nagovor rektorice prof. dr. Andreje Kocijančič, ki je sama poslušala fiziko v tej stavbi. Na prireditvi so se zbrali mnogi nekdanji in sedanji člani matične fakultete in tudi drugih naravoslovnih fakultet.

Z odličnim glasbenim programom (izvedenim tudi na nestandardnih instrumentih, ki bi lahko bili del zbirke eksperimentov) sta prireditev popestrila priznana umetnika Janez Dovč (absolvent fizike) in Boštjan Gombač.

O sami gradnji in zaslugah za prenovo je duhovito poročal predstojnik Oddelka za fiziko prof. dr. Janez Bonča. Pred njegovim nagovorom smo si ogledali v Veliki fizikalni predavalnici posnet odlično zaigrani odlomek iz slovenskega filma *Ne čakaj na maj* (1957). To delo je nadaljevanje filma Vesna; oba filma je režiral češki režiser František Čap. V odlomku vidimo (zelo mladega) *Franeta Milčinskega Ježka* kot profesorja filozofije, ki razlaga, da stvarnost ni odvisna od naše percepcije. Zato si med predavanjem zakrije oči. To izkoristi junakinja filma, da pobegne iz predavalnice. Slab zgled dobi več posnemovalk ... Profesor, ki nadaljuje predavanje, zmagoslavno oznani, da se, kljub temu da nekaj časa ni videl okolice, stvarnost ni spremenila. Ko umakne roko izpred oči, pa presenečen opazi prazno Veliko fizikalno predavalnico.

Videli smo tudi številne fotografije raznih faz obnove, ki je bila precej zahtevna. Po predstojnikovih besedah zaradi globokega prepričanja fizikov, da se na vse najbolje spoznajo, ni prišlo do večjih težav z drugimi akterji prenove. Na koncu je predstojnik pokazal še nekaj privlačnih in osupljivih fizikalnih eksperimentov.

Peter Legiša

SPLOŠNA TOPOLOGIJA IN TOPOLOGIJA

Knjigi *Splošna topologija* Petra Pavešića in *Topologija* Janeza Mrčuna sta prva učbenika za topologijo, ki sta prilagojena novim (bolonjskim) univerzitetnim študijskim programom, konkretno univerzitetnemu študijskemu programu matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

Skupno število slovenskih učbenikov v neposredni zvezi s topologijo tudi sicer ne presega števila prstov ene roke. Prvi je bil 3. del serije *Strukture* N. Prijatelja iz leta 1972. Vsaj po snovi, ki jo obravnava, je tudi monografijo *Metrični prostori* J. Vrabca iz leta 1990 mogoče šteti za topološki učbenik. Naslednji je bil učbenik *Topologija* M. Cenclja in D. Repovša iz leta 2001, ki je nastal kot nadgradnja zapiskov avtorjev pri predavanjih na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani.

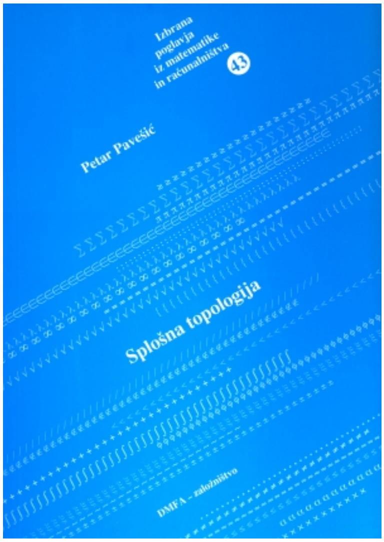
Mislim, da lahko v imenu vseh slovenskih topologov rečem, da smo vrsto let pričakovali topološki učbenik od profesorja Jožeta Vrabca, pionirja slovenske topologije. Še posebej nestrpni smo postali, ko je dal študentom kot skripta na voljo osnutka dveh poglavij – sedmega in osmega – učbenika v nastajanju. Kolikor mi je znano, se je tu ustavilo, zato pa sta več kot dobrodošli deli Pavešića in Mrčuna, ki sta poskrbela, da imata predmeta Splošna topologija in Uvod v geometrijsko topologijo, ki se predavata na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, svoja učbenika v slovenščini.

Brez dvoma sta obe deli zelo koristen pripomoček za vse slušatelje teh predmetov, gotovo pa bo po njiju posegel še marsikdo, ki potrebuje topologijo kot orodje kje drugje, na primer pri funkcionalni analizi ali teoriji mere. Glede snovi, ki jo pokrivata, sta knjigi primerni tudi kot referenčna učbenika v slovenskem jeziku.

Petar Pavešić: SPLOŠNA TOPOLOGIJA, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 43, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008, 100 strani.

Kakor pove že naslov, je učbenik *Splošna topologija* namenjen istoimenskemu predmetu, ki je obvezen semestrski predmet v drugem letniku univerzitetnega študijskega programa matematike.

Učbenik ima tri poglavja. Prvo poglavje vsebuje osnovne definicije,



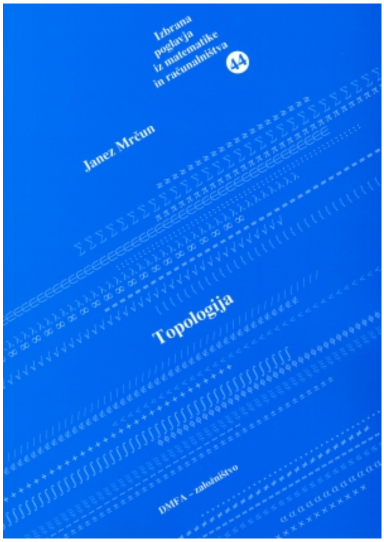
povezane s topološkimi prostori in preslikavami med njimi. Na začetku je nekaj strani posvečenih definiciji topologije ter primerjavi s strukturo metričnega prostora. Vpeljava topologije je motivirana z uporabo v analizi. Avtor predstavi osnovne topološke pojme tako, da jih definira v jeziku metričnih prostorov in definicije posploši na topološke prostore, kjer se bližina izraža z okolicami. V razdelku o bazah in podbazah so obdelani med drugim tudi: osnovne lastnosti topologije produkta končno mnogo topoloških prostorov, prvi in drugi aksiom števnosti ter separabilnost. V razdelku o podprostorih je obdelano vprašanje zveznosti preslikave na danem topološkem prostoru, ki je sestavljena iz zveznih preslikav, ki so definirane na članicah primernega pokritja za ta prostor.

Drugo poglavje predstavi najpomembnejše pojme splošne topologije: ločljivost (separacijski aksiomi), povezanost in lokalna povezanost ter kompaktnost, lokalna kompaktnost in kompaktifikacija z eno točko. Zadnje poglavje z naslovom *Prostori preslikav* obravnava dve najobičajnejši topologiji na množici zveznih preslikav med dvema topološkima prostoroma in množico zveznih realnih funkcij na normalnem topološkem prostoru. V okviru slednje teme dokaže Urisonovo lemo, Tietzejev razširitveni izrek in celo Urisonov metrizacijski izrek. Ob zveznih funkcijah na normalnih prostorih sta obravnavana še pojem absolutnega ekstenzorja za normalne prostore in pojem razčlenitve enote, podrejene končnemu odprtemu pokritju normalnega prostora. Poglavje se konča z dokazom Stone-Weierstrassovega izreka za algebro zveznih realnih funkcij (s kompaktno-odprto topologijo) na poljubnem topološkem prostoru.

Globina podane snovi ustreza programu predmeta Splošna topologija, nivo strogosti dokazovanja pa je dokaj konstanten: tudi proti koncu učbenika v zadnjem poglavju, kjer so zajete teme z globoko topološko vsebino, so dokazi natančni. Avtor je očitno skrbno izbral teme in jih vključil ravno toliko, da bralec nikdar ne izgubi rdeče niti, če bere od začetka do konca.

Učbenik odlikujejo bralcu prijazne definicije, ki so praviloma pospremljene s primernim uvodom in motivacijo. Dokazi so skrbno izdelani do podrobnosti in ilustrirani z intuitivnimi barvnimi skicami, kot jih uporabljamo pri dokazovanju na tabli. V kontrastu s spremnim besedilom in besedilom dokazov, ki je črno na beli podlagi, je besedilo trditev modro, besedilo izrekov pa modro na rumeni podlagi. Nazivi na novo vpeljanih pojmov so lahko opazni, ker so v poudarjenem rdečem tisku. Bralec lahko tako pri hitrem pregledovanju ali pri ponovnem branju nemudoma najde definicije pojmov in pomembne rezultate. Vsak razdelek na koncu vsebuje tudi nekaj vaj brez rešitev, ki so namenjene utrjevanju preštudirane snovi. Tempo podajanja snovi je primeren za vsakega bralca. Za slušatelje predmeta Splošna topologija pa je po mojem mnenju učbenik nadvse dragocen pripomoček.

Janez Mrčun: TOPOLOGIJA, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 44, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008, 156 strani.



Učbenik *Topologija* je v prvi vrsti namenjen predmetu Uvod v geometrijsko topologijo, ki je izbiren semestrski predmet v drugem letniku študijskega programa matematike. Ker vsebinsko pokriva tudi program predmeta Splošna topologija, ga je mogoče začeti brati brez topološkega predznanja in je uporaben za oba predmeta.

Učbenik ima sedem poglavij. Prvo poglavje obravnava vpeljavo topologije s pomočjo odprtih množic, s pomočjo zaprtih množic in z operatorjem zaprtja. Sledijo baze, podbaze, aksioma števnosti, separabilnost, topologija podprostora ter zveznost preslikave, ki jo sestavljajo zvezne preslikave, podane na članicah pokritja prostora.

V drugem poglavju so obdelani najpomembnejši pojmi splošne topologije: separacijski aksiomi, kompaktnost, lokalna kompaktnost in kompaktifikacija z eno točko ter povezanost in lokalna povezanost.

Tretje poglavje obravnava tvorbo „novih“ topoloških prostorov iz „starih“. Sistematično so predstavljeni: produkt končne in neskončne (indeksirane) družine topoloških prostorov in produktne lastnosti, kvocientni prostori in deljive lastnosti, topološka vsota družine topoloških prostorov in zlepki. V tem poglavju je dokaj podrobno obravnavan prostor orbit za delovanje topološke grupe na topološkem prostoru.

Četrto poglavje je namenjeno zveznim realnim funkcijam na topološkem prostoru. Tu sta dokazana Urisonova lema in Tietzejev razširitveni izrek, sledi pa jima obravnava absolutnih ekstenzorjev in absolutnih retraktov za dan razred topoloških prostorov. Definirana je razčlenitev enote, podrejena odprtemu pokritju (poljubne kardinalnosti), in dokazan je obstoj razčlenitve enote, podrejene odprtemu pokritju parakompaktnega prostora. Na koncu poglavja sta dokazana Stone-Weierstrassov izrek za splošne topološke prostore in tudi njegova kompleksna različica.

V petem poglavju so navedeni in deloma dokazani klasični izreki topologije evklidskih prostorov: Brouwerjev izrek o negibni točki je dokazan za dimenziji 1 in 2, dokazana je trditev, da topološki diski ne separirajo evklidskega prostora, Jordan-Brouwerjev izrek in Schoenfliesov izrek pa sta navedena brez dokaza. Brez dokaza je naveden tudi posplošeni Schoenfliesov izrek, izrek o invarianci odprtih množic pa je preveden na Jordan-Brouwerjev izrek. Da bi bilo mogoče formulirati dva pomembna izreka, ki sta ekvivalentna Brouwerjevemu izreku o negibni točki, sta vpeljana pojem homotopije in pojem kontraktibilnega prostora. Kot zgled za uporabo Brouwerjevega izreka v dimenziji 2 je dokazan fundamentalni izrek algebre. Avtor je izbral primeren kompromis med berljivostjo knjige in popolnostjo dokazov: tehničnih podrobnosti je v tem poglavju dovolj, da bralec dobi vtis o globini topologije evklidskih prostorov in metodah dokazovanja. Po drugi strani jih ni preveč in ohranjen je pregled nad vsemi pomembnimi izreki.

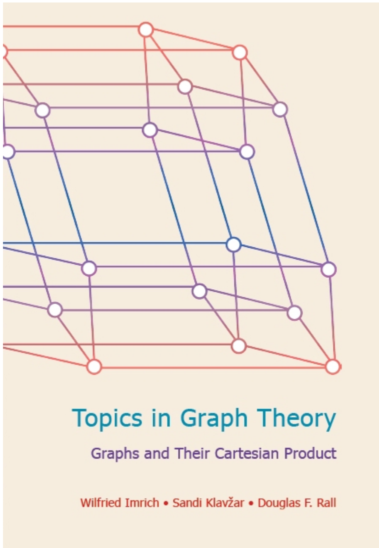
V šestem poglavju o mnogoterostih so vpeljane topološke mnogoterosti s kratko obravnavo osnovnih lastnosti in zgledov. Kratko so obravnavani načini, kako iz danih mnogoterosti pridobimo nove: odprta podmnožica, rob, produkt, povlek submerzije, prostor orbit delovanja diskretne grupe, vsota, zlepek, povezana vsota. Avtor se ne ukvarja z vprašanjem, ali oziroma kako je povezana vsota odvisna od izbir v njeni konstrukciji. Poglavje se konča s kratko obravnavo sklenjenih ploskev.

V sedmem poglavju so podrobno obravnavani kompleksi: (celični in) CW kompleksi skupaj z natančnim pregledom njihovih temeljnih topoloških lastnosti, geometrični simplicialni kompleksi in lastnosti, abstraktni simplicialni kompleksi in geometrična realizacija. Natančno sta definirani orientacija simpleksa in orientabilnost triangulacije mnogoterosti. Na koncu je brez dokaza naveden izrek o klasifikaciji sklenjenih ploskev.

Učbenik odlikujeta tako globina kot širina: bralec, ki ga veseli topologija, bo tu lahko našel številne teme, ki presegajo okvir predmetov Splošna topologija in Uvod v geometrijsko topologijo, zato pa snov zaokrožijo v kompleksno celoto. Nekatere teme so se tu prvič pojavile v slovenskem učbeniku. Vaje so del glavnega besedila knjige in so namenjene nadgrajevanju podane snovi: bralec lahko kreativno sodeluje pri branju z lastnim dokazovanjem. Kot del glavnega besedila so bralcu na voljo številni premišljeni zahtevni zgledi, s katerimi lahko poglobi razumevanje snovi in gradi topološko in geometrično intuicijo. Tempo podajanja snovi in širina snovi sta primerna tudi za najzahtevnejše bralce.

Jaka Smrekar

Wilfried Imrich, Sandi Klavžar in Douglas F. Rall: TOPICS IN GRAPH THEORY: GRAPHS AND THEIR CARTESIAN PRODUCT, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2008, 220 strani.



V svetovnem matematičnem letu 2000 je pri založbi Wiley-Interscience izšla knjiga Wilfrieda Imricha in Sandija Klavžarja z naslovom *Product Graphs: Structure and Recognition*, ki je prvič na enem mestu zbrala vse glavne rezultate o strukturi in algoritmičnih lastnostih najpomembnejših štirih grafovskih produktov: kartezičnega, direktnega, krepkega in leksikografskega. Knjiga je pri raziskovalcih, pedagogih in študentih doživela zelo lep sprejem.

Zdaj je pred nami nova knjiga istih avtorjev, ki se jima je pridružil še Douglas F. Rall, izdala pa jo je založba A K Peters. Skupaj s knjigo *Graphs on Surfaces* Bojana Moharja in Carstena Thomassena, ki jo je leta 2001 izdala založba Johns Hopkins University Press, je to že tretja knjiga slovenskih (so)avtorjev na področju teorije grafov, objavljena pri ugledni mednarodni znanstveni založbi. Ta podatek prav gotovo potrjuje vitalnost in prodornost slovenske diskretne matematike in še posebej teorije grafov v svetovnem merilu.

Preden se posvetimo vsebini nove knjige, povejmo nekaj besed o avtorjih. Wilfried Imrich je profesor na Montanistični univerzi v Leobnu (Avstrija). Sandi Klavžar je profesor na univerzah v Ljubljani in Mariboru. V letu 2000 je prejel Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke v matematiki na področju teorije grafov, v letu 2007 pa Zoisovo nagrado za vrhunske znanstvene in razvojne dosežke na področju matematike. Douglas F. Rall je profesor na Furmanovi univerzi v Greenvilleu (Južna Karolina, ZDA). Ker so avtorji sami vodilni raziskovalci na področju grafovskih produktov, prinaša knjiga veliko svežih rezultatov, ki so bili objavljeni v znanstvenih revijah približno sočasno z izidom knjige. Hkrati je bila knjiga že pred izidom temeljito preskušena pri podiplomskih tečajih na domačih univerzah avtorjev.

Zasnova knjige je zanimiva in inovativna: za rdečo nit so avtorji izbrali *kartezične produkte grafov in njihove podgrafe*, ki imajo zaradi svojih lepih metričnih lastnosti številne uporabe v teoriji kodiranja, dodeljevanju radijskih frekvenc, teoretični kemiji in drugod. Ob tej vodilni témi bralec spozna vsa pomembna področja teorije grafov – od povezanosti, hamiltonskosti in ravninskosti prek številnih invariant do metričnih, algebraičnih in algoritmičnih vidikov. Knjiga je tako razdeljena na pet delov, vsak od njih pa obsega več poglavij, ki jih je v celoti osemnajst. Zelo pohvalno je, da poglavja v povprečju ne presegajo deset strani, kar naredi knjigo berljivo in dostopno tudi manj veščim bralcem. Dobrodošli so tudi kratki „napovedniki“ na začetku vsakega poglavja, ki podajajo pregled vsebine poglavja in ga umeščajo v širši kontekst.

V prvem delu knjige spoznamo definicijo in osnovne lastnosti kartezičnega produkta grafov ter nekaj praktično pomembnih družin grafov, ki so definirane ali karakterizirane z njegovo pomočjo. To so *hiperkocke* (kartezične potence polnega grafa K_2), *Hammingovi grafi* (kartezični produkti poljubnih polnih grafov) in *hanojski grafi* (vpeti podgrafi Hammingovih grafov, ki ustrezajo prostoru stanj pri reševanju znanega problema hanojskega stolpa). V drugem delu se srečamo s hamiltonskostjo, ravninskostjo, prekrižnimi števili, povezanostjo in podgrafi, najprej v splošnem, nato pa še s posebnim ozirom na kartezične produkte grafov. Navedena je odprta domneva Rosenfelda in Barnetta iz leta 1973, da je prizma (kartezični produkt z grafom K_2) nad poljubnim 3-povezanim ravninskim grafom hamiltonski graf, hkrati pa je podan eleganten dokaz izreka, da je k-kratna prizma (kartezični produkt z grafom K_2^k) nad takim grafom hamiltonski graf za vse $k \geq 2$. Dokaz med drugim uporablja tudi karakterizacijo hamiltonskosti kartezičnega produkta hamiltonskega grafa in drevesa avtorjev Batagelja in Pisanskega iz leta 1982. Tretji del knjige je posvečen grafovskim invariantam, kot so neodvisnostno število, kromatično število, $\mathcal{P}$-kromatično število (kjer je $\mathcal{P}$ neka dedna lastnost grafov), krožno kromatično število, seznamsko kromatično število, $L(2,1)$-označevalno število, kromatični indeks in dominacijsko število. Avtorji si zastavijo zanimivo vprašanje, kaj lahko povemo o vrednosti neke invariante na kartezičnem produktu, če poznamo njene vrednosti na posameznih faktorjih. Kot izvemo, so razmere pri različnih invariantah zelo različne: medtem ko je npr. razmeroma preprosto videti, da je kromatično število kartezičnega produkta enako največjemu izmed kromatičnih števil njegovih faktorjev, pa je Vizingova domneva iz leta 1968, ki pravi, da je dominacijsko število kartezičnega produkta večje ali kvečjemu enako produktu dominacijskih števil faktorjev, še vedno odprta.

Kot že omenjeno, velika praktična uporabnost kartezičnih produktov izhaja predvsem iz njihovih lepih metričnih lastnosti, s katerimi se ukvarja četrti del knjige. Avtorji npr. pokažejo, da sta premer oziroma polmer kartezičnega produkta grafov enaka vsoti premerov oziroma polmerov njegovih faktorjev in da je mogoče njegov Wienerjev indeks (s katerim v teoretični kemiji opisujejo fizikalno-kemične lastnosti molekul) preprosto izračunati iz vrednosti Wienerjevega indeksa faktorjev. Med podgrafi kartezičnih produktov avtorji posebej izpostavijo *izometrične podgrafe*, pri katerih se metrika podgrafa ujema z zožitvijo metrike celotnega grafa na množico vozlišč podgrafa. Tako npr. izometrične podgrafe hiperkock imenujemo *delne kocke*, izometrične podgrafe Hammingovih grafov pa *delni Hammingovi grafi*. Ta del knjige se sklene z dokazom fundamentalnega izreka metrične teorije kartezičnih produktov, ki pravi, da ima vsak graf *kánonsko metrično predstavitev*, tj. enolično izometrično vložitev v kartezični produkt z maksimalnim številom neredundantnih faktorjev.

Peti del knjige obravnava algebraične in algoritmične lastnosti kartezičnih produktov. Če izomorfnih grafov ne ločimo med seboj, je množica grafov, opremljena s kartezičnim produktom, Abelov monoid z enoto K_1. Po analogiji s praštevili imenujemo grafe, ki nimajo netrivialnih kartezičnih razcepov, *pragrafi*. Avtorji pokažejo, da izrek o enoličnem razcepu grafa na pragrafe velja za vse povezane grafe, za nepovezane pa v splošnem ne. Zato je kar presenetljivo, da za vse grafe (tudi nepovezane) veljata pravili krajšanja in enoličnosti r-tih korenov. S pomočjo enoličnega razcepa povezanega grafa na pragrafe avtorji razkrijejo strukturo grupe avtomorfizmov povezanega grafa: le-ta je izomorfna grupi avtomorfizmov disjunktne unije prafaktorjev grafa. Te rezultate uporabijo za analizo *razlikovalnega števila* grafa, tj. najmanjšega naravnega števila d, za katero obstaja označitev vozlišč grafa z d oznakami, ki jo ohranja le identični avtomorfizem. Tako npr. dokažejo, da je razlikovalno število k-te kartezične potence poljubnega netrivialnega povezanega grafa, različnega od grafov K_2 in K_3, enako 2 za vse $k \geq 2$. Nazadnje avtorji predstavijo dva pomembna algoritma, in sicer za razcep povezanega grafa na pragrafe in za razpoznavanje delnih kock, oba s časovno zahtevnostjo $O(mn)$, kjer je n število vozlišč, m pa število povezav danega grafa.

Posebna dragocenost knjige so naloge, s katerimi se konča vsako poglavje in ki jih je skupaj več kot dvesto. Na koncu knjige najdemo rešitev ali vsaj namig za rešitev prav vsake od nalog. Seznam literature obsega 122 referenc, sledijo pa mu tri koristna kazala: imensko kazalo, kazalo oznak in stvarno kazalo.

Knjiga bo rabila raziskovalcem na področju grafovskih produktov kot enciklopedija znanih rezultatov, pedagogom in študentom kot izvrsten učbenik, veseli pa je bodo tudi vsi drugi ljubitelji teorije grafov, ki se želijo seznaniti z najnovejšimi rezultati na tem področju.

Marko Petkovšek

William P. Berlinghoff in Fernando Q. Gouvêa: MATEMATIKA SKOZI STOLETJA, Modrijan, Ljubljana 2008, 224 strani.

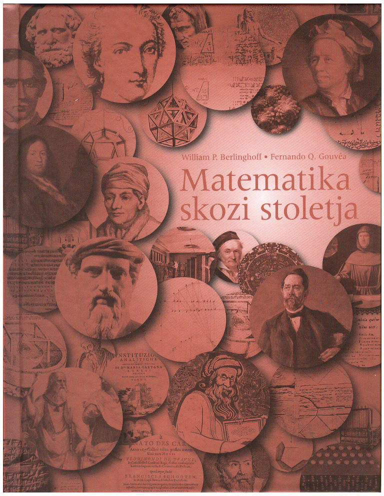
Ob prebiranju knjige sem se spomnil starih časov, ko sem na Fakulteti za strojništvo vodil vaje iz matematike. Pogosto so bili študenti nemirni. Ko pa sem začel pripovedovati kakšno zgodbo iz zgodovine matematike, so nenadoma vsi utihnili in prisluhnili ter me celo kaj vprašali. To najbrž pomeni, da študente, pa tudi učence, dijake, učitelje, profesorje in vse, ki imajo opravka z matematiko, le-ta zanima tudi po zgodovinski plati.

V slovenščini je kar nekaj del, ki posebej obravnavajo zgodovino matematike, pa tudi nekaj takih, ki ji posvečajo vsaj kak razdelek. Pričujoča knjiga pa jim je lahko dobrodošel in koristen dodatek. Bralec bo spoznal, da matematika ni od včeraj, ampak je, taka kot je, rezultat svojega večtisočletnega razvoja, v katerem so bile tudi zablode, tragedije in afere, saj so jo ustvarjali živi ljudje.

Avtorja knjige najprej povesta, komu in čemu je knjiga namenjena. To so predvsem učitelji matematike, ki naj bi vnesli v pouk tudi kakšno zanimivost iz zgodovine matematike. Nato bralca približno tretjina knjige popelje skozi zgodovino matematike, od njenih najstarejših začetkov prek starogrške, kitajske, indijske, arabske, srednjeveške pa vse do današnje matematike.

Naslednji del knjige sestavlja 25 skic, od katerih vsaka obravnava najpomembnejše mejnike v razvoju matematike, na primer zapise števil, razvoj matematičnih simbolov, težave pri uvajanju negativnih in kompleksnih števil. Tako spoznamo razvoj posameznih matematičnih področij skozi stoletja in glavne ideje, ki so jih omogočile.

Knjiga nas ves čas opozarja na matematično literaturo, kjer lahko naj-



demo drugačne poglede na zgodovinski razvoj matematike in poglobljene študije tovrstne problematike. Delo se konča s seznamom 141 del, ki jih lahko bralec v ta namen vzame v roke, 15 od teh pa jih avtorja navajata kot obvezna za študij zgodovine matematike. Čisto na koncu pa je dodano še stvarno kazalo.

Avtorja sta večkrat zapisala: „Zaupajmo, vendar preverjajmo!“ To velja tudi za slovensko izdajo obravnavane knjige, v katero se je žal prikradlo kar precej takšnih in drugačnih neljubih napak, in nepošteno bi bilo, da nekaterih ne bi vsaj omenili. Na srečo jih bo večino pozorni bralec takoj opazil sam in upajmo, da se nihče ne bo izgovarjal, češ, saj v knjigi tako piše. Omenimo jih samo nekaj. Na strani 34 je očitna napaka že v prvem stavku, kajti nemogoče je, da bi islamski imperij obstajal okoli leta *750 pred Kr.* Moralo bi pisati *750 let po Kr.* Slavni francoski matematik *Lagrange* je pisan napačno: *Langrange*. Napako opazimo v formuli za korena kvadratne enačbe, sredi Cardanove formule in še kje. Navedena sta Pascalov in njemu dualni izrek, ki se začneta z besedami: *Preseku stožca lahko včrtamo šestkotnik* ... Zveni tako, kot da ne moremo na primer elipsi vedno včrtati šestkotnika. Pascalov izrek vsebuje dve različni besedi za isto reč: *šestkotnik* in *šesterokotnik*. Naše matematično izrazoslovje že vsaj četrt stoletja uporablja besedo *šestkotnik*. Besedna kombinacija *presek stožca* bi bila lahko povsod kar *stožnica*. Ta že dolgo zamenjuje starinsko besedo *stožernica*, ki jo tudi srečamo v obravnavani knjigi. Pogosto gre samo za tiskovno napako, ko je kakšna črka preveč.

Največ napak opazimo v podnapisih k slikam. Prikazana je kitajska varianta znanega Pascalovega trikotnika. Iz vsega skupaj ni jasno, ali je Jang Hui zapisal njegovih prvih 7 vrstic, kajti na sliki jih je 9. Na strani 105 piše pod sliko *Prvih sto decimalk* ..., očitno pa jih je *tisoč*. Na strani 160 je v podnapisu tudi spodrsljaj: moralo bi pisati $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, ne pa $\sin\alpha(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. Na strani 165 sta med seboj zamenjana znaka $<$ in $>$.

Torej stavek „Zaupajmo, vendar preverjajmo!“ velja tudi za knjigo samo. S to opazko pa jo bralcem, ki jih zanima zgodovina matematike, vseeno toplo priporočamo.

Marko Razpet

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 2009
Letnik 56, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

Hadamardove matrike in misija Mariner 9 (Aleksandar Jurišić) 121–135
Spominska plošča Francu Hočevarju (Marko Razpet) 136–143
Galilejeve lune (Aleš Mohorič) 145–147

Nove knjige

Splošna topologija in Topologija (Jaka Smrekar) 153–157
Topics in Graph Theory (Marko Petkovšek) 157–160
Matematika skozi stoletja (Marko Razpet) 160–XV

Vesti

Matematične novice (Peter Legiša) 143–144
Ob odprtju prenovljenega Peterlinovega paviljona (Janez Bonča) 148–150
Prenovljeni Peterlinov paviljon (Peter Legiša) 151–152

CONTENTS

Articles **Pages**

Hadamard Matrices and Mariner 9 Mission (Aleksandar Jurišić) 121–135
Memorial tablet to Franc Hočevar (Marko Razpet) 136–143
Jovian satellites (Galilean moons) (Aleš Mohorič) 145–147
New books 153–XV
News 143–152

Na naslovnici: Jupiter razkazuje Veliko rdečo pego, poleg pa so štiri največje Galilejeve lune (od vrha) Io, Evropa, Ganimed in Kalisto (vir: NASA). Glej članek na strani 145.