IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2015
Letnik 62
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 62 • ŠT. 6 • STR 201-240 • NOVEMBER 2015

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2015, letnik 62, številka 6, strani 201–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

KAOTIČNOST HIPERBOLIČNIH AVTOMORFIZMOV TORUSA

MITJA LAKNER[1], PETER PETEK[2] IN MARJETA ŠKAPIN RUGELJ[1]

[1]Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani
[2]Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 37D45, 54H20, 58F15

Že v prejšnjem članku [4] smo definirali hiperbolični avtomorfizem torusa, ki je po nekaj korakih povrnil rastrirano sliko mačke. V tem članku pa si ogledamo preslikavo na celem torusu in ugotovimo, da je kaotična po Devaneyevi definiciji. Še prej pa se seznanimo s pojmom kaotičnega sistema in si ogledamo enostaven primer.

HYPERBOLIC TORAL AUTOMORPHISMS ARE CHAOTIC

In our previous article [4] we defined the hyperbolic automorphism of the torus, returning the rastered image in few steps. Here we consider the mapping on the entire torus and find it is chaotic in the sense of Devaney. Beforehand we get acquainted with the notion of chaoticity and set up a simple example.

Uvod

V enem od prvih člankov o kaosu [5] je E. N. Lorenz obravnaval zelo poenostavljen model vremena in opazil to, čemur danes pravimo občutljivost na začetne pogoje, ki je znana tudi kot metuljev efekt: Če v Riu de Janeiru metulj zamahne s krili, to čez nekaj tednov lahko povzroči hurikan na Floridi [3]. V povsem determinističnem sistemu – saj vreme obvladujejo naravni, fizikalni zakoni – se pojavi navidezna slučajnost. Kaotičnost vremena doživljamo zadnje čase v živo, saj se z dodajanjem energije v sistem povečuje ta navidezna slučajnost in neobičajni vremenski pojavi.

Ogledali si bomo tri lastnosti: mešanje, goste periodične točke in občutljivost za začetni pogoj, ki so po Devaneyu karakterizacija kaosa.

V članku [4] smo že spoznali, da je hiperbolični avtomorfizem torusa periodičen na vsaki točki oblike $(\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$, kjer so i, j, N naravna števila, in so seveda te točke goste na kvadratu $Q = I \times I$ in zato na torusu. Vendar nas to ne sme zavesti, kako »lepa« da je ta preslikava.

Lastnost mešanja pomeni, da kjerkoli na torusu začnemo z neko majhno piko (ne točko!), se po nekem času znajdemo kjerkoli drugje, barva je razmazana povsod (glej sliki 2 in 3).

Definicija kaosa in primer

Devaney [2] je definiral kaos z naslednjimi tremi lastnostmi.

Definicija 1. Preslikava $f\colon X \to X$, kjer je (X, d) metrični prostor, je **kaotična**, če je:

(a) f topološko tranzitivna,

(b) množica periodičnih točk preslikave f gosta v X,

(c) f občutljiva za začetne pogoje.

Točka a je **periodična točka reda** n preslikave f, če je $f^n(a) = a$ in $f^j(a) \neq a$, $0 < j < n$, kjer je f^n n-ti iterat funkcije in ne potenca. Preslikava f je **topološko tranzitivna**, če za vsak par nepraznih odprtih množic U in V obstaja tako naravno število k, da velja $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Preslikava f je **občutljiva za začetne pogoje**, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x_0 \in X$ in poljubno odprto množico $U \subset X$, ki vsebuje x_0, obstajata $y_0 \in U$ in naravno število k, da velja $d(f^k(x_0), f^k(y_0)) > \delta$.

Kasneje so pokazali [1], da vsaj za metrične prostore iz prvih dveh pogojev sledi občutljivost za začetne pogoje.

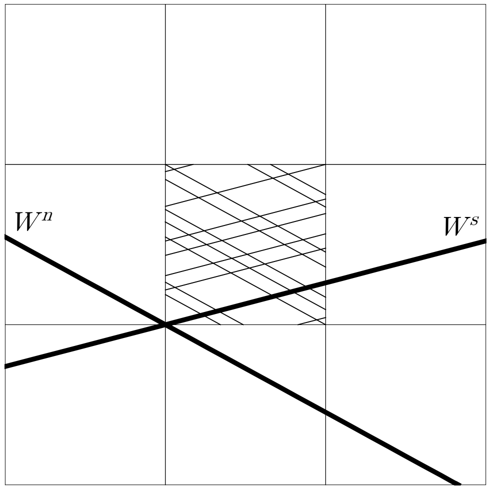
Poglejmo si enostaven primer kaotične preslikave. Če kvadriramo kompleksna števila $f(z) = z^2$, potem gredo iterati števil z, $|z| > 1$, v neskončnost, iterati števil $|z|$, $|z| < 1$, pa proti 0. Vmes, na enotski krožnici $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; z = e^{2\pi i\alpha}\}$, pa je kvadriranje kaotična preslikava. Za opazovanje kvadriranja bo ugodno, če kot α zapišemo v dvojiškem sistemu $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ Ker je $z^2 = e^{2\pi i 2\alpha}$ in kot lahko vzamemo modulo 1, imamo nadalje

$$2\alpha \equiv 0{,}a_2a_3a_4\ldots \pmod 1,$$

kar pomeni, da kvadriranju ustreza pomik vejice na desno, pri čemer seveda prvo števko izgubimo [7].

Po tej pripravi pri kvadriranju ne bo težko slediti vsem značilnostim kaosa:

- <u>občutljivost za začetni pogoj</u>
  Za $\delta = \frac{\pi}{2}$ velja za poljuben $z_0 = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$, in poljubno njegovo okolico U naslednje: Na enotski krožici vzamemo lok dolžine 2ε s središčem v z_0, ki je vsebovan v U. Potem za neki n velja $2\pi 2^{-n} < \varepsilon$. Točka z' naj se ujema s točko z_0 v kotu α' na n števk, naslednja naj



Slika 1. Lastni premici W^s in W^n ter množici $W^s_{\mathcal{T}}$ in $W^n_{\mathcal{T}}$ v enotskem kvadratu.

bo različna $a'_{n+1} \neq a_{n+1}$, nadaljnje pa spet enake. Po n kvadriranjih se znajdeta točki ravno na nasprotni strani krožnice:

$$f^n(z') = -f^n(z_0),$$

torej sta kar se le da narazen; če merimo po krožnici, za π.

- periodične točke
  Kot točke s periodo n je zapisan takole

  $$\beta = 0,\overline{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}.$$

  Jasno je, da leži v okolici poljubne točke bližnja periodična točka, če se le kota ujemata na prvih n mestih za dovolj velik n.

- tranzitivnost
  Tu si lahko dovolimo kar konstrukcijo tira $e^{2\pi i\tau}$, ki poljubno blizu obišče vsako točko. Takole napravimo:

  $$\tau = 0{,}0100011011000001010100011101110111\ldots$$

  Kaj smo naredili, kakšen je napotek za naslednje števke? Vzamemo najprej ničlo, potem enico, sledijo vsi štirje možni pari ničel in enic, nato vseh osem možnih trojk ničel in enic in tako dalje. Poljubno zaporedje poljubne dolžine se znajde v tem zapisu. In to je zagotovilo, da pridemo po »veeelikem« številu korakov poljubno blizu vsaki točki. Še več: za dobljeni tir velja, da če izpustimo prvih nekaj členov zaporedja, je preostanek tira še vedno gost. Torej za poljubni neprazni množici U in V obstaja točka tira, ki je v U, zato neki njen iterat pade v V.

Hiperbolični avtomorfizmi torusa

Definicija 2. Če v ravnini $\mathbb{R}^2$ identificiramo vse točke, katerih koordinate se razlikujejo za celo število, dobimo torus $\mathcal{T}$.

Identifikacija definira ekvivalenčno relacijo na $\mathbb{R}^2$, kjer je $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ natanko tedaj, ko sta $x_2 - x_1$ in $y_2 - y_1$ celi števili. Ta ekvivalenčna relacija določa projekcijo $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{T}$, $\pi(x, y) = [x, y]$. Dobljeni torus $\mathcal{T}$ je seveda homeomorfen geometrijskemu torusu (slika 2).

Definicija 3. Naj bo $A = (a_{ij})$ matrika dimenzije 2×2 z lastnostmi

(a) A je hiperbolična (lastni vrednosti ne ležita na enotski krožnici v kompleksni ravnini),

(b) $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i, j \leq 2$,

(c) $\det A = \pm 1$.

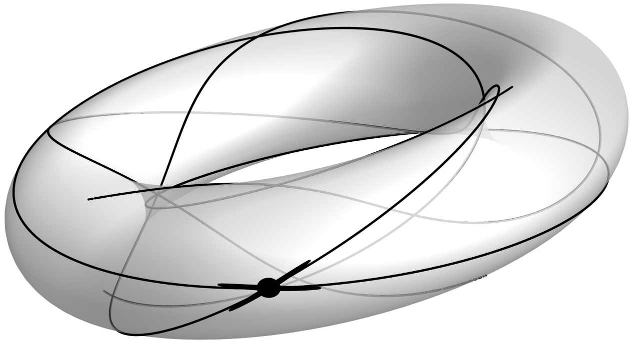
Matrika A inducira tako preslikavo $L_A \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, da je $L_A \circ \pi = \pi \circ A$. To preslikavo imenujemo **hiperbolični avtomorfizem torusa**:

$$L_A([x, y]) \equiv A(x, y)^T \pmod 1.$$

Opomba 4. Ker je $\det A = \pm 1$, je A^{-1} tudi hiperbolična in elementi matrike so cela števila. To pomeni, da A^{-1} tudi inducira hiperbolični avtomorfizem torusa $(L_A)^{-1}$. Torej je L_A res bijekcija za $\mathcal{T}$.

Trditev 5. *Množica perodičnih točk preslikave L_A je gosta v $\mathcal{T}$.*

Dokaz. Naj bo p poljubna točka v $\mathcal{T}$ z racionalnimi koordinatami. Če poiščemo skupni imenovalec, lahko privzamemo, da je p oblike $[\frac{r}{k}, \frac{s}{k}]$, kjer so r, s in k naravna števila. Take točke so goste v $\mathcal{T}$, saj lahko vzamemo k poljubno velik. Pokažimo še, da je p periodična s periodo manjšo ali enako k^2. V $\mathcal{T}$ je natanko k^2 točk oblike $[\frac{r}{k}, \frac{s}{k}]$, $0 \leq r, s < k$. Ker je A celoštevilska, je slika poljubne take točke z L_A zopet take oblike. To pomeni, da L_A permutira točke take oblike. Torej obstajata taki celi števili



Slika 2. Prvi in peti iterat majhne okolice negibne točke $[0,0]$.

i in j, da je $L_A^i(p) = L_A^j(p)$ in $|i-j| \leq k^2$. Iz tega sledi, da je $L_A^{j-i}(p) = p$. Torej je p periodična s periodo manjšo ali enako k^2. ∎

Ker je A hiperbolična matrika z $\det A = \pm 1$, je absolutna vrednost ene od lastnih vrednosti manjša, druge pa večja od 1. Označimo z λ_s lastno vrednost matrike A, ki zadošča pogoju $|\lambda_s| < 1$, in z λ_n lastno vrednost, ki zadošča pogoju $|\lambda_n| > 1$. Če sta v_s in v_n pripadajoča lastna vektorja, potem sta lastna podprostora W^s in W^n matrike A premici skozi izhodišče v $\mathbb{R}^2$. Eksplicitno:

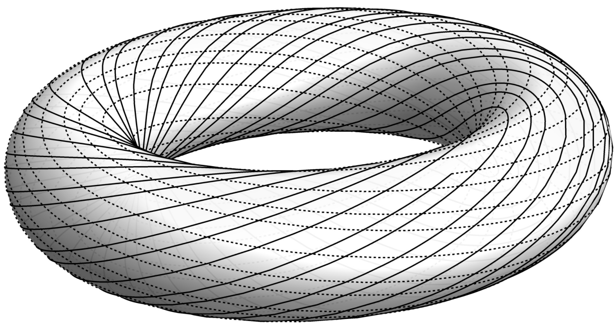
$$W^s = \{tv_s; t \in \mathbb{R}\}, \quad W^n = \{tv_n; t \in \mathbb{R}\}.$$

Za vsako točko $(x,y) \in W^s$ zaporedje $A^m(x,y)^T$ konvergira v izhodišče, saj je $A^m(x,y)^T = \lambda_s^m(x,y)^T$. Za $(x,y) \in W^n$ pa konvergira v izhodišče zaporedje $A^{-m}(x,y)^T$.

Definirajmo množici, krivulji, $W_{\mathcal{T}}^s = \pi(W^s)$ in $W_{\mathcal{T}}^n = \pi(W^n)$ na torusu $\mathcal{T}$ (glej sliki 1 in 3). Za poljubno točko $[x,y] \in W_{\mathcal{T}}^s$ velja $L_A^m[x,y] \to [0,0]$, ko gre $m \to \infty$. Za poljubno točko $[x,y] \in W_{\mathcal{T}}^n$ pa velja $L_A^{-m}[x,y] \to [0,0]$, ko gre $m \to \infty$. Razdalja na torusu je inducirana z evklidsko razdaljo v $\mathbb{R}^2$, to je najmanjša razdalja ekvivalenčnih razredov v $\mathbb{R}^2$.

Lema 6. *Množici $W_{\mathcal{T}}^s$ in $W_{\mathcal{T}}^n$ sta gosti v $\mathcal{T}$.*

Dokaz. Pokažimo, da je smerni koeficient premice W^s iracionalno število. Če bi bil racionalno število, bi šla premica W^s skozi točko (x,y) s celoštevilskima koordinatama. Potem bi imela $A^m(x,y)^T$ tudi celoštevilske koordinate, kar je v nasprotju z dejstvom, da $A^m(x,y)^T \to 0$, ko gre $m \to \infty$.



Slika 3. Del množic $W^s_{\mathcal{T}}$ in $W^n_{\mathcal{T}}$.

Naj bo x_j x-koordinata preseka premice $y = j$ in W^s za $j = 1, 2, 3, \ldots$ Velja $x_j = jx_1$. Ker je smerni koeficient W^s enak $\frac{1}{x_1}$, je x_1 iracionalno število. Projekcije točk (x_j, j) na torus $\mathcal{T}$ so oblike $[\alpha_j, 0]$, $0 \leq \alpha_j < 1$, $\alpha_j = x_j - m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$. Ker je

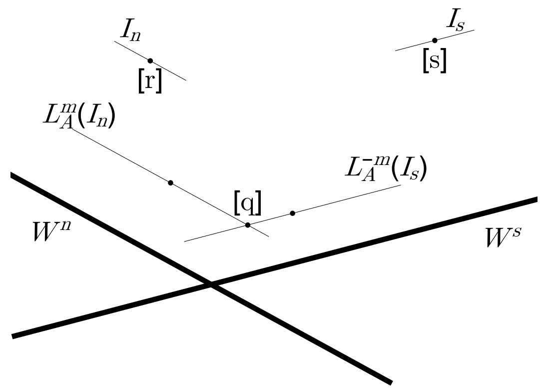
$$\left(e^{i2\pi\alpha_1}\right)^j = e^{i2\pi j(x_1 - m_1)} = e^{i2\pi x_j} = e^{i2\pi\alpha_j},$$

so točke α_j zaradi leme 7 goste na intervalu $[0, 1]$. Projekcija W^s na torus, gledana v kvadratu $[0, 1]^2$, je družina vzporednih daljic, ki sekajo os x v točkah $(\alpha_j, 0)$. Zato so te daljice goste v torusu (glej slike 1, 2 in 3). Dokaz gostosti za $W^n_{\mathcal{T}}$ je podoben. ■

Če je $p \neq [0, 0]$ in $p \in W^s_{\mathcal{T}} \cap W^n_{\mathcal{T}}$, pravimo, da je p **homoklinična** k $[0, 0]$. Iz leme 6 sledi, da so homoklinične točke goste v torusu (glej sliko 1).

Lema 7 ([2]). *Naj bo $f\colon S^1 \to S^1$ zasuk krožnice za kot ω. Če je ω racionalni zasuk, to je $\omega = 2\pi\frac{p}{q}$, v racionalnem razmerju s polnim kotom, je q-ta iteracija identiteta in vse točke so periodične. Če je f iracionalen zasuk, je tir vsake točke gost na krožnici.*

Dokaz. Krožnico predstavimo v kompleksni ravnini $S^1 = \{z; |z| = 1\}$ in opremimo z ločno dolžino $d(z_1, z_2)$ kot metriko. Zasuk je množenje z $\lambda = e^{i\omega}$. Pokažimo, da je pri iracionalnem zasuku tir točke 1 gost v krožnici. Zaradi rotacije bo potem isto veljalo za poljubno točko iz S^1. Vzemimo poljubno točko $\eta \in S^1$ in njeno ε-okolico. Pokažimo, da v njej ležijo točke iz tira λ^n, $n = 0, 1, \ldots$ Zaradi iracionalnosti zasuka so vsi členi zaporedja $\lambda^n = e^{ni\omega}$ različni med sabo in zato obstaja stekališče. Posledično imamo taki števili n_1 in n_2, da sta λ^{n_1} in λ^{n_2} obe v njegovi ε-okolici. Zato je $d(\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}) < 2\varepsilon$.



Slika 4. W^n je vzporedna $L_A^m(I_n)$ in W^s je vzporedna $L_A^{-m}(I_s)$.

Označimo $k = n_1 - n_2$. Ker se pri množenju z λ^{n_2} razdalja ohranja, velja $d(\lambda^k, 1) < 2\varepsilon$. Točke λ^{jk}, $j = 1, 2, \ldots$ ležijo na krožnici, tako da so razdalje zaporednih točk manjše od 2ε. Zato v ε-okolici točke η leži vsaj ena točka λ^{jk}. ∎

Trditev 8. *Preslikava L_A je topološko tranzitivna.*

Dokaz. Naj bosta U in V dve odprti množici v $\mathcal{T}$, kar pomeni, da sta njuni prasliki odprti množici v $\mathbb{R}^2$. Izberemo lahko točki $[r] \in U$ in $[s] \in V$, ki sta homoklinični k $[0, 0]$. Izberimo odprt interval I_n v $W^n_{\mathcal{T}} \cap U$, ki ima središče v $[r]$, in odprt interval I_s v $W^s_{\mathcal{T}} \cap V$, ki ima središče v $[s]$. Pri iteraciji z L_A se iterati središča $[r]$ približujejo $[0, 0]$, saj $[r]$ leži na $W^s_{\mathcal{T}}$. Iterati intervala I_n pa se daljšajo. Podobno se pri iteraciji z L_A^{-1} iterati središča $[s]$ približujejo $[0, 0]$, iterati intervala I_s pa se daljšajo. Torej obstaja tak m, da je $L_A^m(I_n) \cap L_A^{-m}(I_s) \neq \emptyset$. Naj bo $[q]$ v tem preseku (glej sliko 4). Potem je $[p] = L_A^{-m}[q] \in U$ in $L_A^m[q] \in V$. Torej je $L_A^{2m}[p] \in V$, kar pomeni, da je L_A topološko tranzitivna. ∎

Iz trditev 5 in 8 sledi

Izrek 9. *Hiperbolični avtomorfizem torusa $L_A \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ je kaotična preslikava.*

Leta 2006 je Lee [6] dokazal, da če matrika A ni hiperbolična, potem L_A ni kaotična preslikava. Nekaj posebnih primerov si bomo pogledali v naslednjem poglavju.

Nekaj nalog

1. Naj bo $f\colon S^1 \to S^1$, $f(z) = z^2$. Poiščite periodične točke reda 3 in 4.

2. Katera od naslednjih matrik inducira hiperbolični avtomorfizem torusa
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 13 & -3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}?$$

3. Poiščite razdaljo med točkama $P(\frac{1}{10}, \frac{1}{3})$ in $Q(\frac{9}{10}, \frac{2}{3})$ na torusu.

4. Naj bo L_A avtomorfizem torusa, induciran z matriko $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Znotraj 0,1-okolice točke $[0,0]$ poiščite kakšno homoklinično točko k njej.

   (b) V 0,1-okolici točke $[0,0]$ poiščite takšno točko P in tak m, da bo
   $$d(L_A^m(P), [0,0]) > 0{,}5.$$

5. Naj za L_A veljata točki (b) in (c) iz definicije 3 (L_A je avtomorfizem torusa) in naj bo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pripadajoča matrika z lastnima vrednostma λ_1 in λ_2. Če je $\det A = \lambda_1\lambda_2 = \pm 1$ in sta λ_1 in λ_2 realni, potem je $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ali pa je matrika hiperbolična. Če matrika A ni hiperbolična, potem nastopijo naslednje možnosti [6]:
(i) $\lambda_{1,2} = \pm 1$, (ii) $\lambda_{1,2} = 1$, (iii) $\lambda_{1,2} = -1$ in (iv) lastni vrednosti nista realni. Pokažite, da velja:

   (a) Če je $\lambda_{1,2} = \pm 1$, potem L_A ni kaotična.

   (b) Če lastni vrednosti nista realni, potem imamo naslednje možnosti: (i) $\lambda_{1,2} = \pm i$, (ii) $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ali (iii) $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

   (c) Če je $\lambda_{1,2} = \pm i$, potem L_A ni kaotična.

Rešitve:

1. Periodične točke reda 3 so oblike $z_k = e^{\frac{k2\pi i}{7}}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sestavljajo dva cikla reda 3: (z_1, z_2, z_4) in (z_3, z_6, z_5).
Periodične točke reda 4 so oblike $z_k = e^{\frac{k2\pi i}{15}}$, $k = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14$. Sestavljajo tri cikle reda 4: (z_1, z_2, z_4, z_8), (z_3, z_6, z_{12}, z_9) in $(z_7, z_{14}, z_{13}, z_{11})$.

2. Edino matrika C ima lastni vrednosti, ki ne ležita na enotski krožnici.

3. Na torusu je $d(P,Q) = \frac{\sqrt{34}}{15}$.

4. (a) $P(\frac{9-5\sqrt{3}}{6}, \frac{7\sqrt{3}-12}{6})$,
   (b) $P(\frac{1}{20}, \frac{\sqrt{3}-1}{40})$, $m = 2$.

5. (a) Iz karakteristične enačbe

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

sledi, da je $a + d = 0$ in $\det A = -1$. Torej je matrika A oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ in $A^2 = I$. Torej L_A ni kaotična, saj ni občutljiva za začetne pogoje.

   (b) Če lastni vrednosti nista realni, potem iz formule

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

sledi, da je $\det A = 1$ in $(a+d)^2 < 4$. Če je $a + d = 0$, potem sta $\lambda_{1,2} = \pm i$. Če je $a + d = 1$, potem sta $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Če je $a + d = -1$, potem sta $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

   (c) Če je $\lambda_{1,2} = \pm i$, potem je matrika A oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ in $A^4 = I$. Torej L_A ni kaotična, saj ni občutljiva za začetne pogoje.

LITERATURA

[1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, Am. Math. Monthly **99** (1992) 332–334.

[2] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.

[3] J. Gleick, (prev. S. Kuščer) *Kaos*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1991.

[4] M. Lakner, P. Petek, M. Škapin Rugelj, *Vrnitev Arnoldove mačke*, Obzornik mat. fiz. **62** (2015) 41–52.

[5] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Am. Sci. **20** (1963) 130–141.

[6] J. S. Lee, *A Characterization of Hyperbolic Toral Automorphism*, Commun. Korean Math. Soc. **21** (2006) 759–769.

[7] P. Petek, *O zaporedju za računanje kvadratnih korenov*, Obzornik mat. fiz. **28** (1981) 142–145.

OSCILACIJE NEVTRINOV

TOMAŽ PODOBNIK IN ALEŠ MOHORIČ

Institut Jožef Stefan
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

PACS: 01.10.Cr, 14.60.Pq

Letošnjo Nobelovo nagrado za fiziko sta prejela Takaaki Kajita z univerze v Tokiju, Japonska, in Arthur B. McDonald s Kraljeve univerze v Kingstonu, Kanada (slika 1) za pomembno vlogo v eksperimentih Super-Kamiokande in SNO, ki nedvoumno kažeta na to, da nevtrini ene vrste prehajajo v nevtrine druge vrste in nazaj [9]. Prehodi, ki jih imenujemo nevtrinske oscilacije, so možni le, če imajo nevtrini maso. To odkritje je spremenilo naše razumevanje temeljev narave in lahko pomembno vpliva na fizikalni pogled na vesolje.

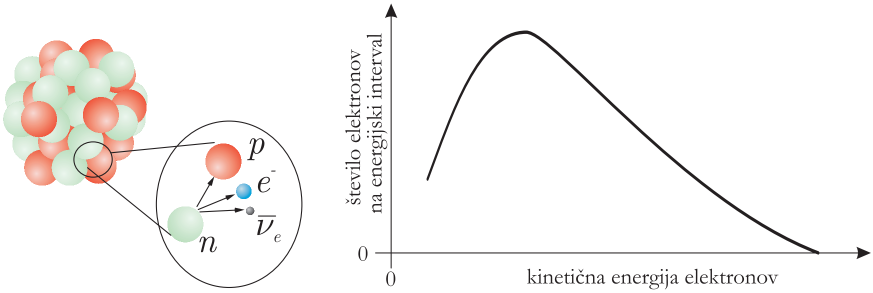
NEUTRINO OSCILLATION

This year's Nobel Prize in physics was awarded to Takaaki Kajita, University of Tokyo, Japan, and to Arthur B. McDonald, Queen's University, Kingston, Canada (figure 1), for their key contributions to the experiments which demonstrated that neutrinos change identities [9]. This metamorphosis requires that neutrinos have mass. The discovery has changed our understanding of the innermost workings of matter and can prove crucial to our view of the universe.

Uvod

Nevtrini so vsepovsod okoli nas in tudi v nas samih. Najstarejši med njimi so nastali že ob začetku vesolja, podobno kot kozmično mikrovalovno ozadje. Njihova gostota je okoli $10^8\mathrm{m}^{-3}$. Nevtrini nastajajo v velikem številu med

Slika 1. Levo: Takaaki Kajita, foto: Bengt Nyman, desno: Arthur B. McDonald, foto: Bengt Nyman



Slika 2. Levo: razpad beta in desno: energijski spekter elektronov pri razpadu beta.

jedrskimi reakcijami, ki potekajo v Soncu. Gostota številskega toka nevtrinov s Sonca je na Zemlji približno $10^{15}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$. Nevtrini nastajajo tudi pri trkih kozmičnih delcev (večinoma protonov) z jedri atomov v zgornjih plasteh atmosfere, v jedrskih razpadih v Zemljini notranjosti in v razpadih, ki potekajo v jedrskih reaktorjih.

Kljub množici nevtrinov, ki nas obdaja, je do njihovega odkritja prišlo sorazmerno pozno, saj nevtrini le šibko interagirajo z okolico. Zgodba o nevtrinih se začne leta 1914, ko je James Chadwick izmeril energijsko porazdelitev (spekter) elektronov, ki nastanejo pri razpadu beta. Pri razpadu se nevtron v jedru pretvori v proton in izseva elektron (slika 2 levo):

$$n \to p + e^- . \tag{1}$$

V skladu z ohranitvijo energije bi za dvodelčni razpad (1) pričakovali, da bodo imeli vsi izstopni elektroni enako energijo (črtast spekter), medtem ko je bil izmerjeni spekter zvezen (slika 2 desno). Zagato je leta 1930 razrešil Wolfgang Pauli s tem, da je v končnem stanju poleg protona in elektrona predvidel še obstoj neopaženega tretjega delca (slika 3), ki ga danes imenujemo nevtrino:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e .$$

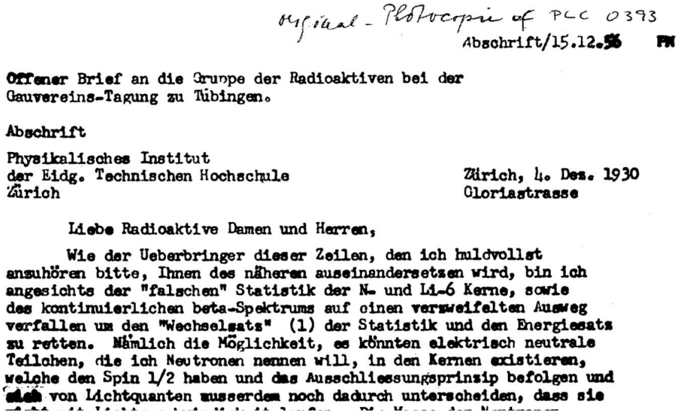
Delec je moral biti električno nevtralen, ker ga, v nasprotju z nabitim elektronom, pri razpadu beta niso zaznali, in lažji od elektrona, saj bi znatna masa nevtrinov premaknila energijski spekter elektronov k nižjim vrednostim.

Leta 1956 sta Clyde Cowan in Frederick Reines s sodelavci prvič izmerila reakcije (do takrat hipotetičnih) nevtrinov z okolico [3], za kar je Reines leta 1995 prejel Nobelovo nagrado za fiziko (Cowan nagrade ni dočakal). Pri poskusu sta opazovala antinevtrine iz jedrskega reaktorja, ki so trkali s protoni v tarči iz kadmijevega klorida. Ob trkih so nastali pozitroni in nevtroni:

$$\bar{\nu}_e + e^- \to n + e^+ .$$

Ob anihilaciji pozitrona z elektronom iz okolice je nastal fotonski par,

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma ,$$



Original – Photocopie of PLC 0393

Abschrift/15.12.56 PM

Offener Brief an die Grunpe der Radioaktiven bei der Gauvereins-Tagung zu Tübingen.

Abschrift

Physikalisches Institut
der Eidg. Technischen Hochschule
Zürich

Zürich, 4. Dez. 1930
Gloriastrasse

Liebe Radioaktive Damen und Herren,

Wie der Ueberbringer dieser Zeilen, den ich huldvollst anzuhören bitte, Ihnen des näheren auseinandersetzen wird, bin ich angesichts der "falschen" Statistik der N- und Li-6 Kerne, sowie des kontinuierlichen beta-Spektrums auf einen verzweifelten Ausweg verfallen um den "Wechselsatz" (1) der Statistik und den Energiesatz zu retten. Nämlich die Möglichkeit, es könnten elektrisch neutrale Teilchen, die ich Neutronen nennen will, in den Kernen existieren, welche den Spin 1/2 haben und das Ausschliessungsprinzip befolgen und sich von Lichtquanten ausserdem noch dadurch unterscheiden, dass sie

Slika 3. Začetek Paulijevega pisma kolegom, v katerem je predvidel obstoj dodatnega nevtralnega delca v končnem stanju pri razpadu beta [10].

ki so ga detektirali koincidenčno. Nevtron se je ujel v jedru kadmijevega atoma; kadmijev izotop, ki je pri tem nastal, je bil v vzbujenem stanju in je prešel v osnovno stanje z izsevanjem fotona z značilno (točno določeno) energijo in z značilnim časovnim zamikom glede na detekcijo fotonskega para iz anihilacije pozitrona:

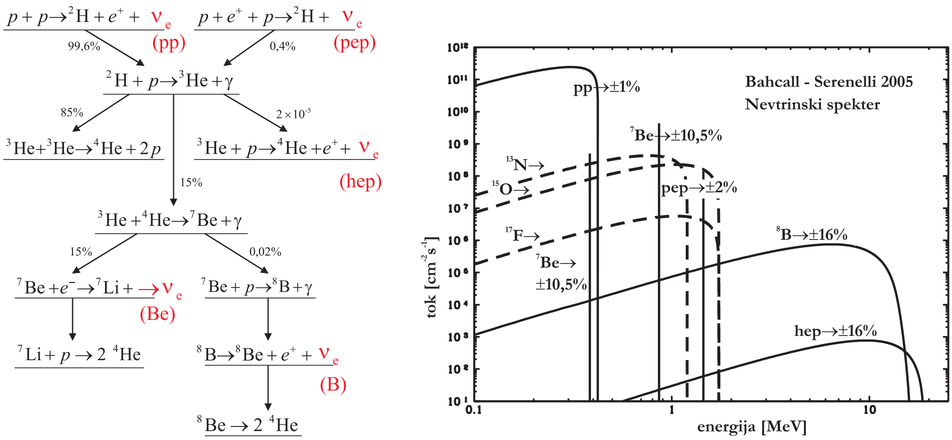
$$n + \mathrm{Cd} \to \mathrm{Cd}^* \to \mathrm{Cd} + \gamma.$$

Pri razpadu beta in poskusu, ki sta ga izvedla Cowan in Reines, nastopajo elektronski (anti-)nevtrini. Leta 1962 so Leon Lederman, Melvin Schwartz in Jack Steinberger pokazali, da obstajajo še nevtrini druge vrste – mionski nevtrini, ν_μ [4]. Za odkritje so leta 1988 prejeli Nobelovo nagrado za fiziko. Danes vemo, da poleg omenjenih dveh vrst obstajajo še nevtrini tretje vrste – nevtrini tau ν_τ.

Podobno, kot je Pauli ocenil (zgornjo mejo za) maso elektronskega nevtrina iz oblike spektra elektrona, ki pri razpadu beta nastane skupaj z nevtrinom, lahko tudi maso nevtrinov ν_μ in ν_τ ocenimo iz energijskega spektra delcev, ki poleg obeh nevtrinov nastopajo v posameznih procesih. V okviru natančnosti eksperimentov so vsi izmerjeni spektri skladni s hipotezo o brezmasnih nevtrinih, ki je vključena v osnovno teorijo – Standardni model – osnovnih gradnikov snovi in sil med njimi (interakcij).

Primanjkljaj nevtrinov s Sonca in nevtrinske oscilacije

Sonce je daleč najmočnejši vir (elektronskih) nevtrinov na Zemlji. Nevtrini nastanejo kot produkt zlivanja jeder. Slika 4 kaže model za opis takega zlivanja (levo) in energijski spekter nevtrinov (desno), skladen z modelom [2].



Slika 4. Levo: model zlivanja jeder v Soncu [2]. Desno: energijski spekter nevtrinov, ki ustreza modelu.

Prvi je nevtrine s Sonca zaznal Raymond Davis s sodelavci v začetku sedemdesetih let prejšnjega stoletja [5], za kar je leta 2002 prejel Nobelovo nagrado za fiziko. V zbiralniku, napolnjenem s 380 tonami tetrakloretilena (C_2Cl_4), je opazoval ujetje elektronskih nevtrinov s Sonca v jedrih klora, pri čemer nastane radioaktivni izotop argona ^{37}Ar,

$$\nu_e + {}^{37}\mathrm{Cl} \to {}^{37}\mathrm{Ar} + e^- . \qquad (2)$$

S prepihovanjem zbiralnika je nastale atome argona zbral v majhnem plinskem detektorju, v katerem so jedra ^{37}Ar z zajetjem elektrona prešla v jedra ^{37}Cl. Ob zapolnjevanju tako nastalih vrzeli v notranji lupini pa so atomi ^{37}Cl izsevali še fotone (rentgensko sevanje) značilne energije. Zaznano karakteristično rentgensko sevanje je bilo nedvoumen dokaz za reakcijo (2) elektronskih nevtrinov s Sonca v zbiralniku. Vendar je bila izmerjena le tretjina od števila fotonov, ki so ga pričakovali na podlagi modela Sonca [2]. Kasneje so primanjkljaj potrdili tudi številni drugi eksperimenti.

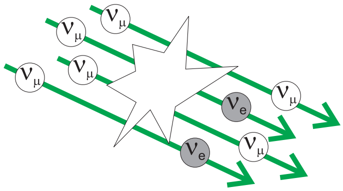
Ena izmed možnih razlag za primanjkljaj je, da je model Sonca [2] napačen. Druga možnost je, da se del elektronskih nevtrinov, ki nastanejo v Soncu, še pred prihodom na Zemljo spremeni v nevtrine druge vrste, ν_μ in/ali ν_τ, ki jih eksperimenti ne zaznajo.

Možnost prehoda nevtrinov ene vrste v nevtrine druge vrste in nazaj je prvi predvidel Bruno Pontecorvo [7] leta 1957 (slika 5).

Verjetnost, da se bo mionski nevtrino spremenil v ν_e (ali ν_τ),

$$P(\nu_\mu \to \nu_e) \propto \sin^2 \frac{\Delta m^2 c^3 x}{4E\hbar},$$

je sinusno odvisna od razdalje x, ki jo nevtrino medtem prepotuje, njegove energije E ter razlike mas Δm različnih vrst. Pojav imenujemo nevtrinske



Slika 5. Nevtrinske oscilacije: del mionskih nevtrinov se spremeni v nevtrine druge vrste – elektronske nevtrine. Pojav je mogoč le, če imajo nevtrini od nič različno maso.

Slika 6. Maketa detektorja Kamiokande (foto: Jnn, Copyleft). Na naslovnici so fotopomnoževalke, ki so v steni detektorja.

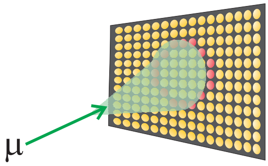
oscilacije. Ob tem je pomembno, da do oscilacij lahko pride le, če imajo nevtrini (od nič različno) maso, kar je v neposrednem nasprotju s prej omenjenim standardnim modelom osnovnih gradnikov snovi in interakcij.

Atmosferski nevtrini in eksperiment Super-Kamiokande

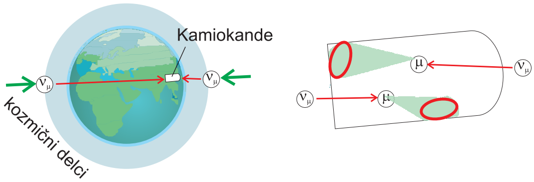
Prvič so nevtrinske oscilacije izmerili leta 1998 [6] z detektorjem Super-Kamiokande (SK), ki so ga postavili 1000 m pod zemljo v rudniku Mozumi v mestu Hida na Japonskem. Detektor SK (slika 6) je zbiralnik vode v obliki valja višine 41 m in premera osnovne ploskve 39 m. Zbiralnik vsebuje 50 000 ton vode, v njegovih stenah pa je 13 000 fotopomnoževalk (detektorjev svetlobe).

Z detektorjem SK so izmerili oscilacije atmosferskih nevtrinov, ki nastanejo pri trkih kozmičnih žarkov (visokoenergijskih protonov) z jedri atomov v vrhnjih plasteh atmosfere, pri čemer je delež mionskih nevtrinov okoli 2/3, delež elektronskih nevtrinov pa okoli 1/3 (delež nastalih nevtrinov tau je zanemarljivo majhen). Energija atmosferskih nevtrinov je v povprečju precej višja od energije nevtrinov s Sonca. Kadar visokoenergijski atmosferski nevtrino interagira z nukleonom N v jedru atoma v detektorju SK, se lahko spremeni v nabit delec, ν_μ v μ^- in ν_e v e^-,

$$\nu_\mu + N \to N' + \mu^-,$$
$$\nu_e + N \to N' + e^-.$$



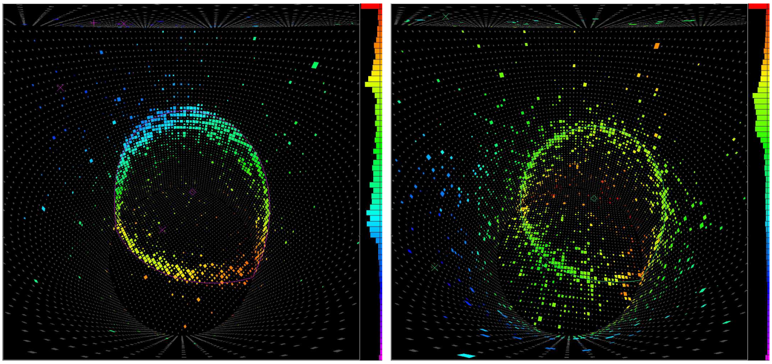
Slika 7. Nabit delec s hitrostjo, ki je večja od hitrosti svetlobe v snovi, seva svetlobo Čerenkova. Izsevana svetloba tvori plašč stožca z osjo, ki se ujema s smerjo gibanja nabitega delca. Ob projekciji fotonov na ravnino z detektorji svetlobe dobimo značilne kolobarje – obroče svetlobe Čerenkova.



Slika 8. Detektor Kamiokande meri število atmosferskih nevtrinov, ki vstopajo v detektor od spodaj in od zgoraj: obroči Čerenkova na dnu detektorja so posledica atmosferskih nevtrinov, ki so vstopili v detektor od zgoraj, obroči na stropu detektorja pa posledica atmosferskih nevtrinov, ki so vstopili v detektor od spodaj.

Če je hitrost nastalega nabitega delca (μ^- ali e^-) večja od hitrosti svetlobe v vodi, delec seva svetlobo Čerenkova (slika 7), ki jo v obliki obročev zaznajo fotopomnoževalke v stenah detektorja. Ker je smer nastalih μ^- in e^- močno korelirana s smerjo ν_μ in ν_e, so obroči Čerenkova na dnu detektorja večinoma posledica atmosferskih nevtronov, ki so vstopili v detektor od zgoraj, obroči na stropu detektorja pa posledica atmosferskih nevtrinov, ki so vstopili v detektor od spodaj (slika 8). Poleg tega so obroči svetlobe Čerenkova, ki jo izsevajo mioni, ostrejši od obročev, ki jih dobimo s sevanjem elektronov (slika 9): elektronske obroče Čerenkova razmažejo dodatni fotoni, ki jih dobimo z zavornim sevanjem elektronov, medtem ko je zavorno sevanje mionov zanemarljivo (40 000-krat šibkejše od zavornega sevanja elektronov).

Opisane značilnosti so omogočile, da so z detektorjem SK izmerili razmerje tokov mionskih in elektronskih atmosferskih nevtrinov, ki vstopajo v detektor iz različnih smeri: posebej od zgoraj in posebej od spodaj. Pri tem so izmerili, da je razmerje mionskih in elektronskih nevtrinov, ki vstopajo v detektor od zgoraj (razmerje števila obročev svetlobe Čerenkova z ostrimi in z razmazanimi robovi na dnu detektorja), enako razmerju ob njihovem nastanku (okoli 2 v korist mionskih nevtrinov), za nevtrine, ki vstopajo v detektor od spodaj, pa je to razmerje znatno manjše od 2. Zmanjšanje razmerja razložijo nevtrinske oscilacije: nevtrini, ki vstopijo v detektor od zgoraj, od svojega nastanka v atmosferi do detekcije prepotujejo le okoli 10–15 km (slika 8, levo), kar je zanemarljivo malo v primerjavi z razdaljo, značilno za oscilacije, medtem ko nevtrini, ki vstopijo v detektor od spodaj, prepotujejo celotno zemeljsko kroglo (13 000 km), kar je dovolj, da se lahko znaten del nevtrinov ene vrste spremeni v nevtrine druge vrste. Rezultati SK so skladni s prehodi mionskih nevtrinov v nevtrine tau.



Slika 9. Obroč svetlobe Čerenkova, ki jo izseva mion (levo) in elektron (desno) (vir: Tomasz Barszczak [8]).

Nevtrinski observatorij Sudbury (SNO)

Detektor SNO (slika 10) je zbiralnik, ki vsebuje 1000 ton težke vode, D_2O, z dodatkom soli NaCl, v stenah zbiralnika pa je vgrajenih 9500 fotopomnoževalk. Stoji 2000 m globoko pod zemljo v rudniku Creighton v kraju Sudbury, Kanada.

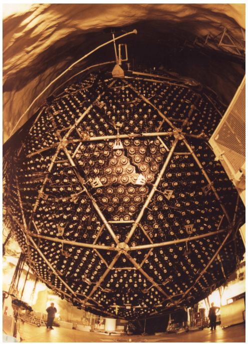
Ena izmed možnih reakcij nevtrinov s Sonca s težko vodo v detektorju je t. i. reakcija z nevtralnim tokom, pri kateri jedro devterija (devteron D) razpade na proton in nevtron,

$$\nu_x + \mathrm{D} \to p + n + \nu_x, \quad x = e, \mu, \tau. \tag{3}$$

Prosti nevtron ujame jedro klora, Cl, ki nato v kratkem časovnem intervalu izseva štiri fotone. Ti fotoni se nato sipljejo na elektronih molekul težke vode, pri čemer elektroni presežejo hitrost svetlobe v vodi in zato sevajo svetlobo Čerenkova, ki jo zaznajo fotopomnoževalke. Večkratni skoraj sočasni obroči svetlobe Čerenkova so torej znak za reakcijo (3) nevtrina s Sonca z devteronom v detektorju SNO. Da so lahko izključili druge možne vire takih dogodkov (ozadje), so morali zmanjšati običajni delež radioaktivnih elementov v vodi za faktor 1 000 000.

Reakcija (3) je, drugače od reakcije (2), enako verjetna za vse vrste nevtrinov. To pomeni, da bo izmerjeno število reakcij (3) enako, če elektronski nevtrini ves čas ostanejo elektronski nevtrini ali če se na poti med svojim nastankom v Soncu do mesta detekcije spremenijo v nevtrine druge vrste – število reakcij (3) je odvisno le od toka nevtrinov s Sonca, ne pa tudi od nevtrinskih oscilacij.

Izmerjeno število reakcij (3) z detektorjem SNO [1] je skladno s številom, ki ga napove model Sonca [2]. Model Sonca je torej pravilen in primanjkljaj izmerjenih reakcij (2) iz poglavja *Primanjkljaj nevtrinov s Sonca in nevtrinske oscilacije* lahko pojasnijo le nevtrinske oscilacije.



Slika 10. Detektor SNO (objavljeno z dovoljenjem SNO).

Sklep

Opisani eksperimenti nedvoumno kažejo na to, da nevtrini oscilirajo. To pomeni, da imajo nevtrini maso, kar je v nasprotju s Standardnim modelom osnovnih gradnikov snovi in interakcij. Obstaja več različnih predlogov kako dopolniti Standardni model, da bo vključeval masivne nevtrine, in poskusi bodo pokazali, kateri izmed teh predlogov, če sploh kateri, je pravilen. Končna masa nevtrinov pomeni tudi, da njihov delež v temni snovi ni zanemarljiv.

LITERATURA

[1] S. N. Ahmed; et al., *Measurement of the Total Active ^8B Solar Neutrino Flux at the Sudbury Neutrino Observatory with Enhanced Neutral Current Sensitivity*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 181301.

[2] J. N. Bahcall, A. M. Serenelli in S. Basu, *New solar opacities, abundances, helioseismology, and neutrino fluxes*, Astrophys, J. 621, L85 (2005).

[3] C. L. Cowan Jr., F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, et al., *Detection of the Free Neutrino: a Confirmation*, Science **124** (1956), 103–104.

[4] G. Danby, J.-M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. B. Mistry, M. Schwartz in J. Steinberger, *Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **9** (1962) 36.

[5] R. Davis, *Solar Neutrinos. II. Experimental*, Phys. Rev. Lett. **12** (11) (1964) 303, B. T. Cleveland ; et al., *Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector*, Astrophys, J. **496** (1998) 505–526.

[6] Y. Fukudae; et al., *Super-Kamiokande Collaboration*, Phys. Rev. Lett. **81** (1989) 1562–1567, Y. Ashie; et al., Measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by Super-Kamiokande I, Phys. Rev. D71, 112005 (2005).

[7] B. Pontecorvo, *Mesonium and anti-mesonium*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** (1957), 549–551.

[8] `http://www.ps.uci.edu/~tomba/sk/tscan/compare_mu_e/`, ogled 17. 12. 2015.

[9] `http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2015/press.pdf`, ogled 17. 12. 2015.

[10] `microboone-docdb.fnal.gov`, ogled 17. 12. 2015.

PRIČARAJMO PROSTORSKO SLIKO

ANDREJ LIKAR

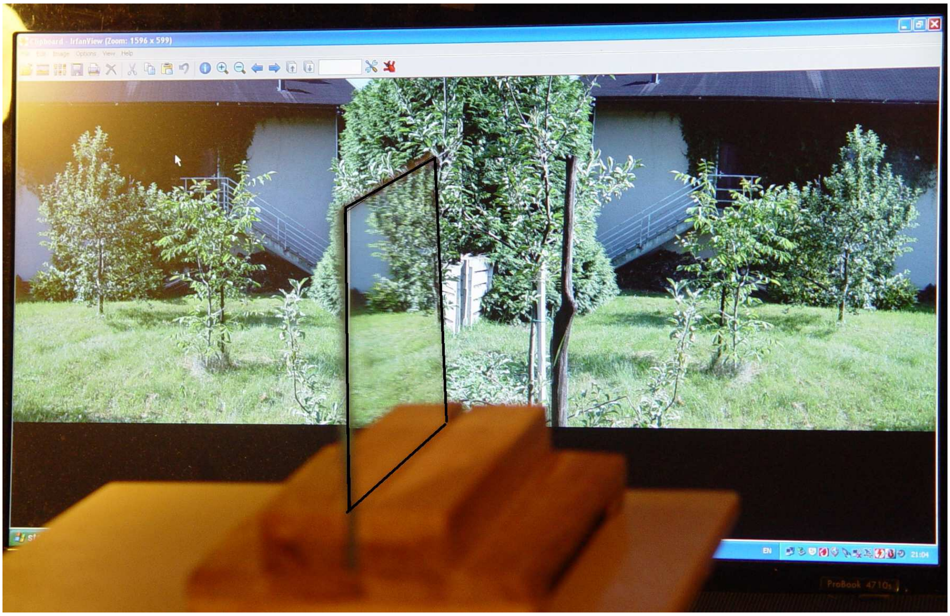
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V šoli smo obravnavali sestavo očesa in njegovo optiko. Prav malo pa smo izvedeli o očeh, čeprav gledamo v svet z dvema očesoma. Oči povedo več kot posamezno oko, saj se sliki na mrežnicah razlikujeta. Prav na tej razliki dobro presodimo oddaljenost predmetov, ki so blizu nas. To je za orientacijo v prostoru zelo pomembno. Tudi zveri, primati, plazilci ..., torej lovci, imajo oči postavljene tako, da lahko hkrati gledajo eno samo točko v prostoru. Rastlinojedci, na primer zajci ali srne, tega ne morejo, pri njih je pač pomembneje opazovati čim širšo okolico, da ne postanejo plen zverem.

Prostorsko sliko lahko pričaramo tako, da poskrbimo, da vsako oko vidi malo drugačno sliko. Seveda morata pri tem biti sliki popolnoma usklajeni. Pri prostorski fotografiji za to poskrbita dva fotografska aparata, ki sta usmerjena v isto točko, najpogosteje na oddaljenem horizontu. Amaterji pa posnamemo dve sliki z enim fotoaparatom, poskrbeti moramo le, da je objektiv v obeh primerih usmerjen v isto, nekoliko oddaljeno točko prostora ter premaknjen v vodoravni ravnini za kakih deset centimetrov. Danes je taki fotografiji mogoče prenesti na računalniški zaslon drugo poleg druge in ju nato z ogledom z zrcalom ali prizmo »zliti« v eno, glej sliko 1. Z levim očesom, denimo, gledamo levo sliko na zaslonu, z desnim pa prek odboja na zrcalu zrcalno obrnjeno desno sliko. Z malo vaje se prav osupljivo prikaže iluzija prostorske globine.

Če sta sliki primerno skupaj, ju poskusimo opazovati z bolščanjem, da si pričaramo prostorski vtis. Za kaj takega potrebujemo nekaj več vaje, saj smo vajeni z obema očesoma gledati v isto točko prostora, torej vedno malo škilimo, tem bolj, čim bliže je ta točka. Pri bolščanju pa moramo doseči, da desno oko vidi desno sliko, levo pa levo, ki sta seveda razmaknjeni. Sliki gledamo nekako tako, kot bi bili zelo daleč, izostriti pa ju moramo na mestu, kjer pač sta. Ker sta izostritev slike in škiljenje pri običajnem gledanju trdno povezana, ju moramo z vajo razrahljati – oči gledajo oddaljen predmet, posamezno oko pa mora pri tem izostriti sliko, ki je blizu.

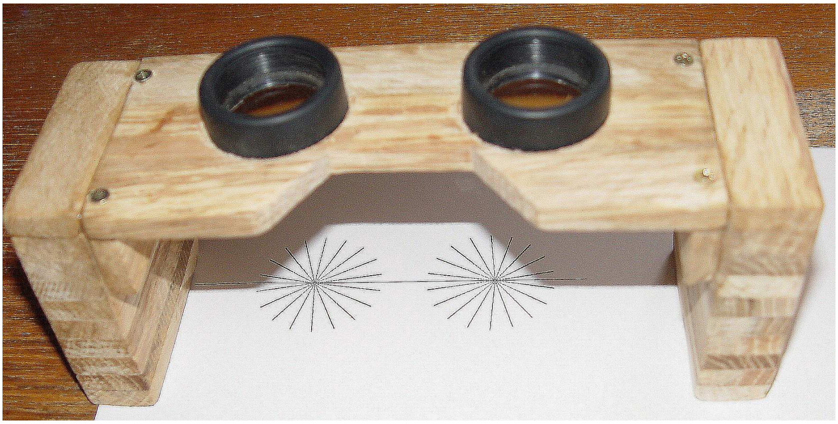
Tako prirejeni sliki imenujemo stereogram. Računalniško izrisanih najdemo v obilju na spletu, prav imenitne pa v knjižici Boruta Jurčiča Zlobca z naslovom Stereogrami (izdala založba Math d. o. o., 1994).



Slika 1. »Zamaknjeni« fotografiji posnamemo in ju prenesemo v računalnik. Sliki za levo in desno oko postavimo vštric na zaslon in ju zlijemo v eno z zrcalom ali prizmo. Pri tem z levim očesom opazujemo levo sliko, z desnim pa desno v zrcalu. Zrcalo počasi vrtimo, da se sliki zlijeta v eno. Sliko za desno oko še prej zrcalno obrnemo, da je zrcalna slika potem pravilna. Pri taki pripravi posnetih slik pridejo zelo prav grafični programi (npr. IrfanWiew).

Ločeni sliki v hipu zlijemo v eno s stereoskopom. Primerno razmaknjeni zbiralni leči pred očmi poskrbita, da gledata očesi vsako svojo sliko na primerni oddaljenosti. Tako izostrimo sliki brez napora. Skozi leči lahko takoj zaznamo in opazujemo prostorsko sliko. Stereoskop je preprosta naprava, lahko jo izdelamo tudi sami. Na sliki 2 je prikazan tak izdelek. Leči sta bili del zavrženega manjšega daljnogleda, ohišje pa je leseno. Razdalja med lečama naj bo čim bliže zenični razdalji e opazovalca (pri nas 6,5 cm).

Sliki, ki skozi stereoskop pričarata prostorsko sliko, si lahko izdelamo tudi sami. Na sliki 3 se točka A s koordinatami x_A, y_A in z_A, kot jo vidimo skozi stereoskop z levim očesom, preslika v točko A_L na ravnini papirja s koordinatama x_{A_L}, y_{A_L}. Levo oko vidi sliko točke A_L na mestu točke A. Prav tako se točka A za desno oko preslika v A_D na papirju. Poljubno sliko sestavimo iz množice točk A, na papirju pa dobimo ustrezni sliki za levo in desno oko. Seveda najprej delamo z računalniškim zaslonom namesto s papirjem, šele nato sliko v ustreznem razmerju prenesemo na papir.



Slika 2. Stereoskop iz domače delavnice.

Čeprav bi zgornji opis vnetemu računarju povsem zadoščal, da bi si lahko sam izdelal program za risanje stereogramov, le navedimo nekaj enačb, ki prevedejo poljubno točko A v točki A_L in A_D na papirju. Na sliki 3 je prikazana projekcija celotne postavitve v smeri osi y. Slika razjasni oznake količin in nakaže zveze med njimi. Iz podobnih parov trikotnikov LOA_L in $LL'A$, LPA_L in LSA ter LOB in $L'OC$ razberemo za koordinato x naslednji razmerji:

$$\frac{x+\alpha}{x_{A_L}} = \frac{D-z}{l}, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha}{D-l-z} = \frac{e/2}{l}\,. \tag{2}$$

Za koordinato y niti ne potrebujemo nove slike, hitro uvidimo razmerje:

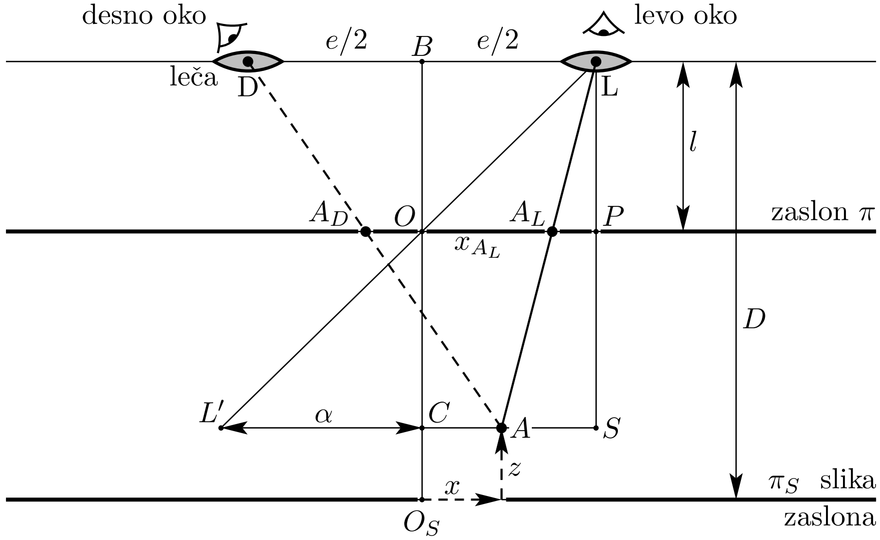
$$\frac{y}{y_{A_L}} = \frac{D-z}{l}\,. \tag{3}$$

Zvezo med razdaljama D in l podajata zbiralni leči, ki imata goriščno razdaljo f, in sicer:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l} - \frac{1}{D}\,, \tag{4}$$

ker štejemo razdaljo D kot pozitivno. Ta razmerja veljajo tudi za desno oko, le da namesto pozitivnega $e/2$ pišemo tam $-e/2$.

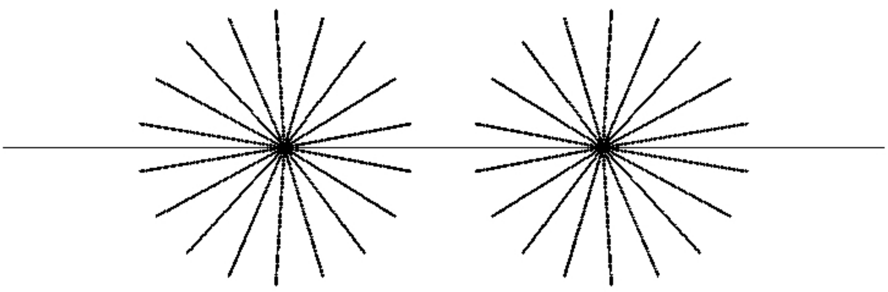
Sedaj se lahko lotimo risanja stereograma. Izberemo si kakšno zanimivo ploskev, jo prekrijemo s točkami A s koordinatami x, y, z, izračunamo ustrezne koordinate x_{A_L}, y_{A_L}, x_{A_D}, y_{A_D} in jih izrišemo. Koordinatni izhodišči



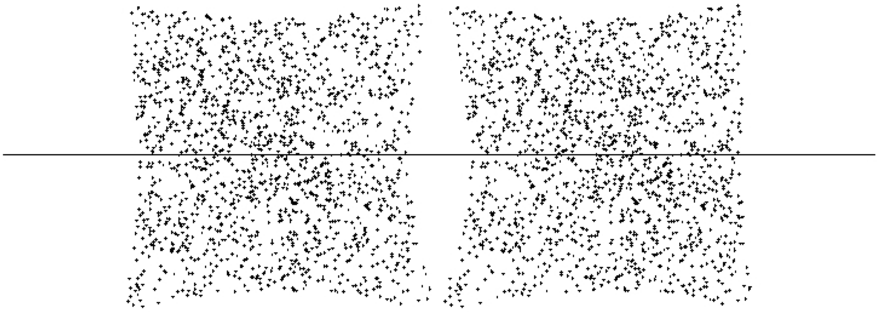
Slika 3. Preslikava točke A na ravnino papirja za levo in desno oko. Točko A_L vidi levo oko na mestu točke A, točko A_D pa desno oko prav tam. Druge označene točke potrebujemo pri izpeljavi povezave med koordinatami točke A z ordinato x_{A_L}.

sta, kot razberemo s slike, O in O_S. Pri prenosu na papir si pomagamo s kako posebej izbrano točko A (najpreprosteje kar s koordinatnim izhodiščem O_S) in razmerje slik na zaslonu in papirju določimo tako, da razdalja na papirju med ustreznima točkama x_{A_L} in x_{A_D} ustreza izračunani.

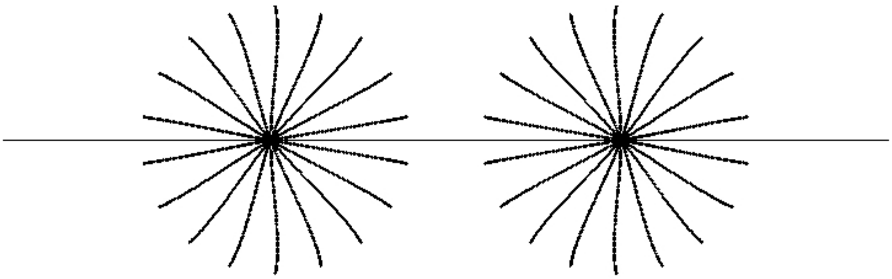
Na slikah 4–7 smo za neučakane narisali nekaj stereogramov. Naš stereoskop ima leči z goriščno razdaljo $f = 12{,}7$ cm, razdalja D pa je pri tem udobnih 40 cm.



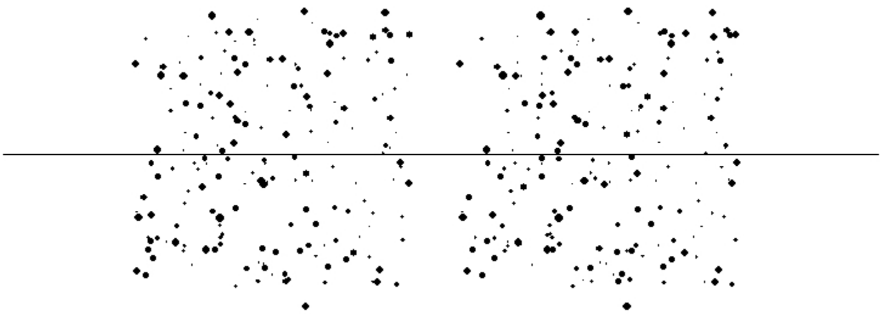
Slika 4. Stereogram stožca.



Slika 5. Točke na paraboloidni ploskvi.



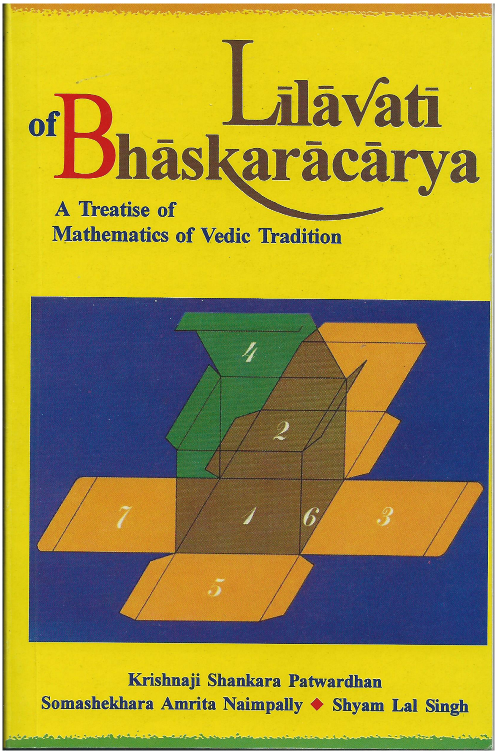
Slika 6. Sombrero.



Slika 7. Zvezde v prostoru. Pri tem stereogramu porabimo kar nekaj časa, da dojamemo smiselno sliko.

NOVE KNJIGE

K. S. Patwardhan, S. A. Naimpally, S. L. Singh, Līlāvatī of Bhāskarācārya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition, Motilal Banarsidass Publishers, Delhi, 2014, 218 strani, 3. izdaja.



Zgoraj so najprej navedeni prevajalci in komentatorji znanega matematičnega dela Lilavati. Napisal ga je indijski matematik in astronom Bhaskaračarja, kar pomeni Bhaskara Učitelj. Imenujejo ga tudi Bhaskara II. Živel je v 12. stoletju. Bhaskara I. je bil prav tako indijski matematik in astronom v 7. stoletju. Rimske števnike so jima dodelili zato, da ju lažje razlikujemo.

Bhaskara II. je napisal Lilavati v sanskrtu, ki je v prvi vrsti jezik hinduistične liturgije, pa tudi jezik budistične, hinduistične in džainistične filozofije ter literarni jezik klasične indijske književnosti. Postal pa je tudi jezik, ki so ga uporabljali v znanosti, podobno kot grščino in latinščino v Evropi. Sanskrt se učijo po indijskih šolah, pa tudi po univerzah po vsem svetu. Sanskrtska besedila se pišejo v pisavi devanagari, ki jo uporabljajo tudi nekateri sodobni jeziki na Indijski podcelini, na primer hindijščina, nepalščina, maratščina, sindščina. Število uporabnikov devanagarija gre v stotine milijonov.

Devanagari pozna skoraj 50 črk za samoglasnike in soglasnike ter nekaj dodatnih znamenj. Črke so samo ene vrste, ni malih in velikih kot v evropskih jezikih. Črke za soglasnike vključujejo privzeti samoglasnik, zato uvrščamo devanagari med zlogovne pisave. Na primer, zlogi *ka, kā, ki, kī, ku, kū, ke, kai, ko, kau* se zapišejo kot क, का, कि, की, कु, कू, के, कै, को, कौ. Devanagari pozna tudi celo vrsto ligatur, zlitij dveh ali več soglasnikov v en znak. Primer: Zloga *kra, tra* se zapišeta kot क्र त्र. Devanagari hitro spoznamo po skupni ravni črti, pod katero so nanizane črke. Znaki za številke $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ so ०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९. Zapisi z njimi se razlikujejo od črk po tem, da nimajo skupne ravne črte. Število 2015 se zapiše takole: २०१५.

V devanagariju se piše od leve proti desni in od zgoraj navzdol. Zaradi velikega zanimanja za indijsko kulturo je že pred 100 leti nastala potreba po prečrkovanju (transliteraciji) sanskrta v latinico. Nastal je sistem IAST (International Alphabet of Sanskrit Transliteration), s katerim lahko z ustreznimi ločevalnimi znaki (piko, črto, vijugo, ostrivcem) prepišemo sanskrtska besedila v latinico. To je v knjigi opisano že na samem začetku. Nastali so še drugi sistemi prečrkovanja. Včasih prihaja do zmede. V sistemu IAST pomeni *c* naš *č*, *y* naš *j*, *j* pa naš *dž*. Če ne vemo, ali je beseda prečrkovana v angleščino ali slovenščino, ravno *j* povzroča težave, ker takoj ne vemo, ali označuje naš *j* ali *dž*.

Naslov knjige vsebuje v sistemu IAST prečrkovani besedi *Līlāvatī*, v devanagariju लीलावती, in *Bhāskarācārya*, v devanagariju भास्कराचार्य, v angleščini *Bhaskaracharya*. Črtice označujejo dolge samoglasnike. Prvo preberemo *Lilavati*, drugo *Bhaskaračarja*. Slednja je nastala z združitvijo dveh: *Bhāskara*, v devanagariju भास्कर, in *ācārya*, v devanagariju आचार्य, kar pomeni *učitelj, vzgojitelj*. Lilavati so v perzijščino prevedli že v 16. stoletju, proti koncu 20. stoletja jo je N. H. Phadke prevedel v maratščino, na začetku pričujočega besedila navedeni prevajalci pa v angleščino. Prvo izdajo je knjiga, ki jo opisujemo, doživela leta 2001. Prvi prevodi v angleščino so sicer nastali že na začetku 19. stoletja. Toda sedaj prinaša ne le komentarje in rešitve, ampak tudi sanskrtsko besedilo v devanagariju.

Pripovedujejo, da je delo Lilavati dobilo ime po Bhaskarjevi hčerki z istim imenom. Revica je izgubila možnost, da bi se omožila. Temu je bilo krivo očetovo zaupanje v astrološke napovedi. Izračunal je namreč, da se Lilavati lahko poroči ob natančno določeni uri na natančno določen dan. Oče je pripravil vodno uro in čas poroke naj bi bil, ko bo zadnja kaplja vode stekla iz posode skozi drobno luknjico. Željna čimprejšnje poroke se je sklonila nad vodno uro, in tedaj se je zgodila nesreča: biser z njenega okrasja v laseh ji je padel v posodo in zamašil luknjico, prava ura za poroko je žal minila in v tolažbo je oče poimenoval eno od svojih del po svoji hčerki Lilavati. Ime sicer pomeni *lepa, igriva, dražestna*.

Knjiga najprej pove nekaj o življenju in delu Bhaskaračarje, ki ni bil samo matematik in astronom, ampak tudi zelo dober pesnik. Lilavati je namreč napisana v verzih v skladu z Weierstraßovo izjavo, ki pove, da matematik, ki ni tudi malo pesnika, nikoli ne more biti popoln matematik. Najbolj znano Bhaskarovo delo je *Siddhantaširomani* – *Siddhāntaśiromaṇi* – सिद्धान्तशिरोमणि, v angleščini *Siddhantashiromani*. V knjigi je to napisano kot ena beseda, nekateri pa pišejo kot dve: *Siddhanta širomani*. Dobesedno to pomeni *venec učenja*. Napisal ga je pri svojih 36 letih, pri čemer je uporabil veliko njemu že znane matematike, precej pa jo je dodal sam. Lilavati so uporabljali kot učbenik v Indiji še več stoletij. Razdeljeno je, kot piše na začetku knjige, na štiri dele, ki jih nekateri obravnavajo kot ločene knjige. Te so: 1. *Lilavati*, ki obravnava aritmetiko, geometrijo in nekaj algebre, 2. *Algebra*, 3. *Gibanje planetov* in 4. *Astronomija*.

Bhaskaračarja v Lilavati najprej razloži merske in denarne enote, ki so jih uporabljali v 11. in 12. stoletju, in odnose med njimi. Nato pride na vrsto desetiški mestni zapis števil. Zanimivo je, da so potence 10^n imele posebna imena za vsa nenegativna cela števila n od 0 do 17. Obstajajo pa v sanskrtu imena vse do $n = 140$, česar Bhaskaračarja ne navaja. Primera: $10^0 = 1$ je *eka*, 10^{14} pa *parardha*.

Sledijo poglavja o osnovnih štirih računskih operacijah z naravnimi števili. Pri množenju je razloženih več metod, na primer z razdelitvijo množitelja na dva dela, s faktorizacijo množitelja, pa tudi metoda, kot jo običajno uporabljamo, ko množimo s svinčnikom na papirju. Na običajni način je razloženo deljenje z ostankom in brez.

Sledijo poglavja, ki obravnavajo kvadriranje in kubiranje ter kvadratno in kubično korenjenje naravnih števil. Snov je razložena približno tako kot v učbenikih aritmetike, ki so se pri nas uporabljali takoj po 2. svetovni vojni.

Nato je na vrsti osem operacij z ulomki: seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje, kvadriranje, kubiranje, kvadratno in kubično korenjenje. Več pozornosti je posvečene računanju z ničlo. Tu srečamo pojem neskončnosti in račune, ki nas spominjajo na limito.

Nato nadaljuje s tako imenovanim *obratnim postopkom*, kjer je treba najti število. Primer: *Neko število najprej pomnoži s 3. Temu produktu prištej* $3/4$ *njegovega dela. Dobljeno vsoto deli s 7 in nato odštej* $1/3$ *količnika od dobljenega količnika. Odštej 52 od kvadrata dobljenega ostanka. Prištej 8 kvadratnemu korenu tega rezultata. Nazadnje deli vsoto z 10 in dobiš 2. Potem mi, deklica begavih oči, če poznaš obratni proces, povej začetno število!* Nagovarjanje na tak ali podoben način je v delu pogosto. Dobimo občutek, kot da Bhaskaračarja ves čas poučuje deklico. Rezultat je 28.

Sledijo razni problemi z eno neznanko iz vsakdanjega življenja. V njih srečamo slone, čebele, labode, razne sadeže, denar, drevesa. V knjigi, ki jo predstavljamo, je tudi naslednji problem. *Dekle in fant sta se ljubila. Zgodila se je neprijetnost: njej se je pretrgala nit biserne ogrlice. Tretjina biserov je padla na tla, petina se jih je zakotalila pod posteljo, njej jih je uspelo zadržati šestino, njemu pa desetino. Šest biserov pa je ostalo na niti. Koliko biserov je štela ogrlica?* Odgovor: 30 biserov.

Prevajalci in komentatorji v tej knjigi niso omenili, da te naloge ni v originalnem Lilavati, ampak v Manorandžani, delu, v katerem je Ramakrišna

Deva v 15. stoletju komentiral Bhaskaračarjevo delo.

Kvadratne enačbe Lilavati rešuje z dopolnjevanjem do popolnega kvadrata. Simbola za koren nima, upošteva pa samo pozitivni kvadratni koren. Primer: *Na jezeru je jata labodov. Sedemkratna polovica kvadratnega korena števila labodov se je preselila na obrežje jezera, en zaljubljen par pa se je še igral v vodi. Koliko labodov je bilo tam?* Odgovor: 16 labodov.

Lilavati vključuje tudi naloge v zvezi s premim in obratnim sorazmerjem (pravilo treh, pravilo petih). Povezane so s cenami, zlatom, menjavo blaga in enostavnim obrestovanjem. Primer: *Na trgu lahko kupimo 300 mangov za eno drammo (1 dramma = 16 pan). 30 kakovostnih granatnih jabolk dobiš za eno pano. Hitro izračunaj, koliko granatnih jabolk lahko zamenjaš za 10 mangov.* Odgovor: 16 granatnih jabolk.

Lilavati obsega tudi nekaj matematike, ki bi jo danes uvrstili v diskretno matematiko: kombinacije, Pascalov trikotnik (khandameru), zaporedja, permutacije in particije. Ker Lilavati vsebuje tudi nekaj indijske mitologije, navedimo primer: *Gospod Višnu ima 4 roke in v vsaki drži po eno insignijo: kij, disk, lotusov cvet in hišico morskega polža. Koliko različnih podob ima Višnu?* Odgovor: $4! = 24$.

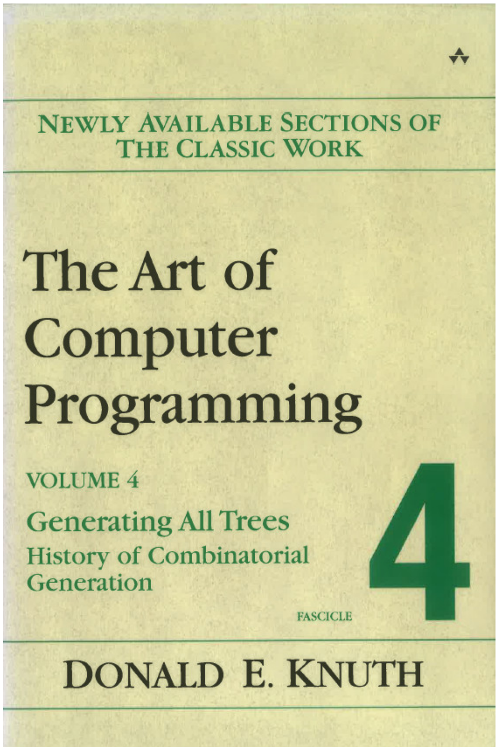
Precej pozornosti posveti Bhaskaračarja v Lilavati linearnim diofantskim enačbam $ax + by = c$. V bistvu jih rešuje z Evklidovim algoritmom, le da mu tako ne reče. Govori o metodi drobljenja (kuttaka). Pripomnimo, da je Bhaskara obvladal tudi Pellove enačbe $x^2 - Dy^2 = 1$, kjer D ni kvadrat. Reševal je enačbo $x^2 - 61y^2 = 1$ in našel najmanjšo rešitev $(x_1, y_1) = (1\,766\,319\,049, 226\,153\,980)$. To je vsekakor omembe vreden rezultat, če upoštevamo takratno splošno stanje matematike in računskih pripomočkov.

Velik del knjige obravnava ravninske geometrijske probleme: Pitagorov izrek, razreševanje trikotnikov in štirikotnikov, ploščine likov. Pri stereometriji računa površine in prostornine raznih teles. Poseben razdelek je posvečen uporabi geometrije pri sencah. Precej je avtor dal na to, da bi se računi izšli v celih ali pa vsaj v racionalnih številih. Primer: *Kača ima luknjo v zemlji tik ob 9 komolcev visokem drogu. Na njem sedi pav, ki zagleda proti luknji bežečo kačo v trenutku, ko je od nje oddaljena 27 komolcev. Pav poleti proti kači enako hitro kot le-ta beži. Pav zgrabi kačo. V kateri razdalji od droga se to zgodi?* Odgovor: 12 komolcev od droga.

Lilavati vsebuje precej nalog, ki jih najdemo po raznih zbirkah in knjigah o zgodovini matematike. Vsekakor je Lilavati knjiga, ki je pomembna tako z zgodovinskega kot literarnega vidika. Napisana je bila, ko še niso uporabljali nikakršnih matematičnih znakov in ko še ni bilo tiska. Zanimivo pa je dejstvo, da Indijci v Bhaskarovem času niso zapisovali dokazov.

Marko Razpet, मार्को रज़्पेत्

Donald E. Knuth: The Art Of Computer Programming, Volume 4, Generating All Trees, History of Combinatorial Generation, Fascicle 4, Courier Corporation plant in Stoughton, Massachusets, januar 2006, 120 strani.



Knjižica, v kateri so opisani različni algoritmi za generiranje dreves, predstavljena pa je tudi zgodovina generiranja različnih kombinatoričnih struktur, je le eden od mnogih zvezkov, s katerimi Donald E. Knuth, znan daleč po svetu po svojem pionirskem delu na področju algoritmov in programerskih tehnik, po svoji iznajdbi TeXa in METAFONTa, ter kot ploden in vpliven pisec, zaslužni profesor Umetnosti računalniškega programiranja na Univerzi Stanford, sukcesivno dopolnjuje, razširja in zaokrožuje svoje veličastno delo Umetnost računalniškega programiranja, ki ga je začel pisati leta 1962. Knuthovo pisanje je deležno soglasnega občudovanja strokovnjakov ne le zaradi svoje tehtnosti, ampak tudi zaradi slogovnih odlik: lepote in elegance njegovih analiz, jasnosti in natančnosti njegovih razlag ter lucidnosti njegovih komentarjev.

Kot pravi avtor sam, si je, potem ko je v prejšnjih zvezkih obravnaval generiranje drugih kombinatoričnih struktur (npr. permutacij, kombinacij in particij), najboljše, generiranje dreves, prihranil za konec. Teorija dreves, ene ključnih diskretnih struktur, povezuje koncepte različnih vidikov računalniškega programiranja, probleme generiranja vseh dreves določenega razreda (npr. na n vozliščih) pa so v primerjavi s problemi generiranja drugih kombinatoričnih struktur, ki so jih v različnih oblikah obravnavali že v številnih starodavnih kulturah (Indija, Kitajska, Japonska, stara Grčija, itd.), matematiki in računalniški strokovnjaki začeli intenzivno obravnavati šele po letu 1950. Pred tem so se z enumeriranjem vseh dreves določenega razreda ukvarjali le zelo redki, npr. Arthur Cayley je leta 1875 v svojem velikem delu o drevesih podal diagrame vseh binarnih dreves s tremi notranjimi vozlišči in štirimi listi. Algoritme za generiranje vseh vpetih dreves danega grafa so razvili številni avtorji po letu 1950, prvotna motivacija zanje pa je bilo raziskovanje električnih omrežij.

Knjižica je pisana na kožo tako računalniškim strokovnjakom kot tudi tistim, ki jih navdušuje zgodovina matematičnih znanosti. Brez dolgovezenja in okolišenja začne z razlago temeljne zveze med »pravilno vgnezdenimi oklepaji« in drevesi, po kateri je vsak par ustrezajočih si oklepajev (ki mu ustreza neko vozlišče prirejenega drevesa) kodiran z zaporednima številkama levega oklepaja »(« in desnega oklepaja »)«. Tabela s 14 različnimi pravilno vgnezdenimi štirimi pari oklepajev in ustreznimi drevesi ter izomorfnimi strukturami prikaže tudi različne načine njihovega kodiranja. Zanimiva izomorfna struktura so hkratna rokovanja $2n$ ljudi za okroglo mizo, pri katerih noben od n parov, ki si seže v roke, ne zmoti rokovanja nobenega drugega para.

Po vrsti spoznamo algoritem za leksikografsko urejanje vgnezdenih oklepajev, algoritem za generiranje binarnih dreves, pa tudi algoritme po vzoru Grayeve kode, ki generirajo vsa možna drevesa tako, da od vsakega generiranega drevesa preidemo k naslednjemu le z majhno perturbacijo. Pregledu nekaterih ključnih dejstev o Catalanovih številih, ki ustrezajo številom objektov, dobljenih v teh algoritmih, sledi zanimiv odlomek o slučajno generiranih drevesih ter analiza tako imenovanega »vzorca božičnega drevesa«, v katerem so razporejena vsa dvojiška zaporedja dolžine n natanko enkrat tako, da se zaporedja z istim številom enk pojavijo v istem stolpcu, in da se v vsaki vrstici zaporedni dvojiški zaporedji razlikujeta le na enem mestu. Število vrstic takega božičnega drevesa reda n (ki ga je mogoče brez težav določiti) natančno ustreza velikosti največje antiverige podmnožic množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, znane iz izreka Emanuela Spernerja (1928).

Teoretičnemu in zgodovinskemu delu sledijo številne naloge. Prvi del teh nalog bralcu pomaga razumeti in osvojiti strokovni, algoritemski del knjige; drugi del teh nalog pa je namenjen temu, da se vživimo v način razmišljanja matematikov (in drugih učenjakov, npr. gramatikov, ki so iskali vse možne ritmične različice sanskrtskih ali starogrških verzov, ali glasbenih teoretikov, ki so iskali vse možne sezname melodičnih linij iz danih različnih tonov), ki so prvi razmišljali o posameznih problemih, in da razumemo, da so bili različni koncepti in postopki v zvezi z generiranjem kombinatoričnih struktur, ki se morda danes zdijo enostavni, v svojih začetkih velik izziv celo za največje ume tistega časa.

V zgodovinskem delu knjižice, za katerega Knuth pravi, da se je ob njegovem raziskovanju naučil veliko zanimivega o človeku in njegovi kulturi, nam predstavi zelo zanimive in davne primere generiranja in enumeriranja različnih kombinatoričnih objektov, npr. 64 heksagramov (ki ustrezajo binarnim zaporedjem dolžine 6) iz slavne knjige I Ching (Knjiga sprememb), ene od petih klasičnih del konfucijanske modrosti, pa 52 diagramov (imenovanih po 52 poglavjih znanega literarnega dela japonske pisateljice Murasaki Šikubu: Zgodba o Genjiju iz 11. stoletja), ki ustrezajo različnim razdelitvam množice $\{1,2,3,4,5\}$ v njene podmnožice (in katerih stilizirane variante je mogoče najti v standardnih katalogih kimono vzorcev v 20. stoletju), pa 56 različnih zaporedij treh metov kock, ki jih je, ker je bilo sicer priljubljeno kockanje duhovnikom prepovedano, škof Wibold iz Cambraja iz severne Francije povezal s posameznimi vrlinami (npr. $111 =$ ljubezen, $112 =$ vera, $113 =$ upanje, itd.) ter tako izumil nekakšno igro zbiranja vrlin (Ludus clericalis), ki pa so jo smeli igrati in se jim tako ni bilo treba odreči metanju kock. Zanimiv je tudi problem, ki ga je neuspešno reševal celo Leibniz, in sicer, koliko je permutacij besed nekega latinskega verza, ki ustrezajo tudi določenim ritmičnim omejitvam, ki so veljale za latinske verze. Problem je uspešno rešil šele James Bernoulli v svojem inavguracijskem govoru leta 1692. Knuth v zvezi s tem navaja tudi zanimiv Bernoullijev citat: »Celo najmodrejši in najbolj bistri ljudje včasih trpijo za nečim, kar Logiki imenujejo nezadostna enumeracija primerov.«

Knjižica, ki mi je prišla v roke po naključju (tako se dostikrat, po nedoumljivi igri naključja, zgodi s knjigami, ki so nam najbolj všeč!), mi je po eni strani zelo približala računalniško programiranje, me je pa tudi izredno prijetno presenetila v svoji zgodovinski, humanistični dimenziji, saj prepričljivo kaže, da tudi vrhunska matematična oziroma računalniška strokovnost ni nezdružljiva z zgodovinsko analizo. Še en lep dokaz, da naši morebitni predsodki o tistem, česar ne poznamo dovolj, niso vredni, da jih obdržimo in cenimo kot nekaj vrednega. Če bi namreč vztrajal pri svojem predsodku, da takšna knjiga že ne more biti zanimiva, bi bil prikrajšan za prebiranje navdihujočih misli, kot so npr.: »Za globlje razumevanje je koristno študirati rekurzivno strukturo v osnovi algoritma P«, ali: »Povprečna oblika naključno generiranega binarnega drevesa je približno enaka spodnji polovici elipse.« Takšnih stavkov je v knjigi še veliko. Veselim se že branja tudi drugih Knuthovih del, omenjeno knjižico pa priporočam vsem bralcem, ki imajo radi računalništvo in zgodovino matematike!

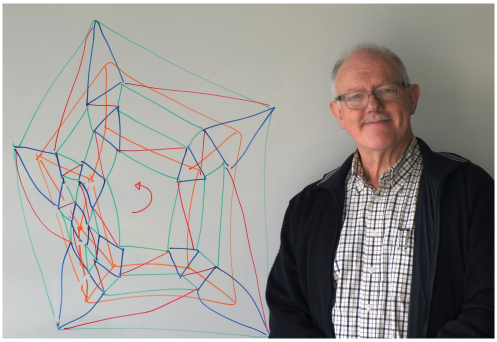
Jurij Kovič

ZOISOVE NAGRADE IN PRIZNANJA 2015

Zoisove nagrade in priznanja, priznanja Ambasador znanosti ter Puhova priznanja za leto 2015 so bila podeljena 20. novembra v Portorožu. Med prejemniki Zoisovih nagrad in priznanj sta tudi člana našega društva: prof. dr. Tomaž Pisanski in prof. dr. Andreja Gomboc. Vsem nagrajencem iskreno čestitamo za uspeh in priznanje.

Dosežki nagrajencev so opisani na straneh Ministrstva za šolstvo, znanost in šport [1]. Povzemimo dosežke naših članov.

Zoisovo nagrado za vrhunske dosežke pri znanstvenoraziskovalnem delu na področju diskretne matematike in njenih uporab je prejel prof. dr. Tomaž Pisanski.



Dr. Tomaž Pisanski je vrhunski raziskovalec, ki deluje na področju diskretne in računalniške matematike, z aplikacijami v naravoslovju, tehniki in družboslovju. O širini njegovega delovanja priča obsežna bibliografija, ki zajema 146 izvirnih znanstvenih člankov, eno znanstveno monografijo, ki je leta 2013 izšla pri ugledni založbi Birkhäuser, in štiri poglavja v mednarodnih monografskih publikacijah. Izjemno odmevnost njegovega dela potrjuje več kot 1000 normiranih čistih citatov v zadnjih desetih letih in normirani H-indeks 19.

Dr. Pisanski je eden od pionirjev topološke teorije grafov na svetu in začetnik svetovno znane slovenske šole teorije grafov. Leta 2008 je soustanovil prvo mednarodno matematično revijo v Sloveniji, Ars Mathematica Contemporanea, ki se je leta 2014 uvrstila v prvo polovico SCI-revij na matematičnem področju.

V zadnjih sedmih letih je prof. dr. Pisanski sam ali v soavtorstvu objavil 47 izvirnih znanstvenih člankov v uglednih mednarodnih revijah. Iz Evropske znanstvene fundacije je leta 2011 pridobil projekt GReGAS in postal sploh prvi slovenski koordinator kakega projekta po programu EUROCORES. Njegov najpomembnejši prispevek v svetovno zakladnico znanja temelji na uporabi metod diskretne matematike v naravoslovju in tehniki. Izjemen je njegov prispevek k razvoju teorije upodobitev grafov, ki se uporablja v sami matematiki, pa tudi v kemiji, biologiji in drugih znanostih.

V letih 1998 in 1999 je bil predsednik društva. Je častni član društva, bil je med ustanovnimi uredniki Preseka, sodeloval je pri popularizacijskih aktivnostih društva. Ukvarja se tudi z zgodovino matematičnih znanosti.

Leta 2004 je organiziral razne obeležitve 250-letnice rojstva Jurija Vege. Med drugim je uredil dvojezični zbornik Baron Jurij Vega in njegov čas. Za to je prejel red za zasluge s srebrnim vencem. Zadnje čase dr. Pisanski deluje predvsem na Univerzi na Primorskem, kjer je tudi častni senator. Prof. Pisanski je redni član Mednarodne akademije za matematično kemijo, Inženirske akademije Slovenije ter združenja Academia Europaea.

Zoisovo priznanje za pomembne dosežke pri proučevanju izbruhov sevanja gama je prejela prof. dr. Andreja Gomboc.

Dr. Andreja Gomboc je redna profesorica za astronomijo na Univerzi v Novi Gorici, njeno raziskovalno delo pa je bilo do nedavnega vpeto na Univerzo v Ljubljani. Glavno področje njenih raziskav so izbruhi sevanja gama, ki so v svetu ena najaktualnejših tem sodobne astrofizike.

Dr. Gomboc je soustanoviteljica mednarodne skupine za proučevanje izbruhov sevanja gama, ki uporablja tri največje robotske teleskope na svetu. Na njen predlog so na teleskop Liverpool namestili poseben polarimeter in tako uvedli novo metodo meritve polarizacije optičnih zasijev izbruhov sevanja gama v samo nekaj minutah po detekciji izbruha s satelitom. Trenutno je to edina raziskovalna skupina na svetu, ki je tehnično sposobna opravljati take meritve, kar kaže na izvirnost in edinstvenost teh raziskav.

S svojim delom in utemeljitvijo meritev, ki se pred tem niso izvajale, je dr. Andreja Gomboc ključno prispevala k razumevanju teh izjemno silovitih pojavov v vesolju. Njena znanstvena dela so objavljena tudi v najprestižnejših revijah, kot sta Science in Nature.

Dr. Gomboc je aktivna članica društva in je od leta 2009 predsednica Slovenskega odbora za astronomijo in predsednica komisije za društveno tekmovanje v znanju astronomije. Od leta 2011 ureja spletni Portal v vesolje.

LITERATURA

[1] http://www.mizs.gov.si/si/medijsko_sredisce/novica/article//9365/14dcedbf97c1df1eda67773cc5036724/, ogled 30. 11. 2015.

Aleš Mohorič

DVAINDVAJSETO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Tudi tokrat se je v Blagoevgradu v Bolgariji med 27. julijem in 2. avgustom 2015 pomerilo 330 študentov matematike s 73 univerz z vsega sveta. Čeprav so še vedno prevladovale evropske univerze, sta se tekmovanja že tradicionalno udeležili tudi izjemno številni brazilska in iranska ekipa, med tekmovalci pa ste na primer lahko našli tudi študente iz Kostarike, Mehike, Kitajske in Arabskih emiratov. Ljubljansko univerzo so zastopali Rok Havlas, Vesna Iršič, Teo Kukuljan, Veno Mramor in Neža Žager Korenjak, primorsko pa Ivan Bartulović, Vladan Jovičić, Marko Palangetić in Roman Solodukhin.

Študentje so dva dneva, vsak dan po pet ur, reševali po pet nalog. Večinoma zelo zvite in težke naloge so iz snovi, ki se predava pri standardnih predmetih v prvih dveh letnikih študija matematike.

Slika 1. Predstavniki slovenskih univerz v menzi Ameriške univerze.

Veno Mramor in Marko Palangetić sta dobila drugo nagrado, Ivan Bartulović in Teo Kukuljan tretjo, preostali študentje pa so dobili pohvale. Na lestvici 74 ekip je ljubljanska ekipa zasedla 47., primorska pa 48. mesto.

Zelo veliko o tekmovanju, prejšnjih tekmovanjih, nalogah in rezultatih lahko najdete na domači strani organizatorja `www.imc-math.org`.

Za boljši vpogled v težo in tip nalog sledi nekaj nalog z rešitvami. Letošnje naloge so bile bolj simpatične in lažje rešljive kot prejšnja leta. Verjamem, da bodo za mnoge bralce zanimiv izziv.

Nekakšen nenapisan dogovor pravi, da je treba vsak dan začeti z dostopno nalogo, ki naj bi jo rešila velika večina študentov. Tudi jaz sem bil med ocenjevalci naslednje zelo simpatične naloge iz linearne algebre:

I.1. *Naj bo $n \geq 2$. Realni matriki A in B velikosti $n \times n$ zadoščata enačbi*

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1} \ .$$

Pokaži, da je $\det A = \det B$. *Ali enak sklep velja tudi v primeru kompleksnih matrik?*

Ko enakost pomnožimo z $A+B$, dobimo

$$I = (A^{-1} + B^{-1})(A+B) = 2I + A^{-1}B + B^{-1}A,$$

ali ekvivalentno

$$A^{-1}B + B^{-1}A + I = 0 \ .$$

Prvi seštevanec je inverz drugega, zato se enačba s substitucijo $X = A^{-1}B$ poenostavi v

$$X + X^{-1} + I = 0 \ .$$

Od tod sledi $X^2 + X + I = 0$ in

$$X^3 - I = 0.$$

Zato je $X^3 = I$, $(\det X)^3 = 1$ in zaradi realnosti matrik velja

$$1 = \det X = \det(A^{-1}B) = \tfrac{\det B}{\det A} \ .$$

Tako smo pokazali, da je v realnem primeru $\det A = \det B$.

Enakost $(\det X)^3 = 1$ da slutiti, da nam lahko v kompleksnem primeru nagajajo tretji koreni enote. Naj bo $\zeta = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Za A vzemimo identično matriko, za B pa diagonalno matriko, ki ima na diagonali ζ ali ζ^2, tako da $\det B \neq 1$. V primeru, ko n ni večkratnik števila 3, lahko na primer vzamemo kar $B = \zeta I$.

Tedaj je $A^{-1} = I$, $B^{-1} = \overline{B}$, $I + B + \overline{B} = 0$ in

$$(A+B)^{-1} = (-\overline{B})^{-1} = -B = I + \overline{B} = A^{-1} + B^{-1} \ ,$$

vendar $\det A = 1 \neq \det B$.

Podobno dostopna je bila naloga iz analize, s katero se je začel naslednji dan.

Slika 2. Ljubljanska ekipa pred rilskim samostanom.

II.1. *Pokaži, da velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2 \ .$$

Študentje so našli ogromno različnih rešitev, verjetno najbolj naravna pa je ocena z integralom.

S pomočjo substitucije $t = x^2$ je zelo lahko v primeru $a \geq 0$ eksplicitno izračunati integral

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = \pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{a} \ .$$

Integrand je strogo padajoča funkcija. Poglejmo si Darbouxove pravokotnike širine 1 za spodnjo oceno ploščine. Ker je $\pi > 2$, moramo nekaj prvih členov izračunati posebej. Dobimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3} < 2 \ .$$

Zelo mi je bila všeč tudi naslednja veliko težja, a elementarna naloga z zvito uporabo kompleksnih števil:

I.4. *Ali obstaja* 15 *celih števil* $m_1, \ldots, m_{15}$*, za katera velja*

$$\sum_{j=1}^{15} m_j \cdot \operatorname{arctg} j = \operatorname{arctg} 16 \ ?$$

Slika 3. Primorska ekipa.

Rezultat funkcije arctg si predstavljajmo kot polarni kot. Ker se koti pri množenju kompleksnih števil seštevajo, pri potenciranju pa se množijo z eksponentom, bi bil v primeru zgornje enakosti argument števila $z = 1 + 16i$ enak argumentu produkta

$$w = (1+i)^{m_1} \cdot (1+2i)^{m_2} \cdots (1+15i)^{m_{15}} \ .$$

V tem primeru bi bil kvocient $r = \frac{w}{z}$ neničelno realno število. Še več, ker je realni del števila w cel, realni del z pa enak 1, bi bil tudi kvocient r neničelno celo število.

Absolutna vrednost $|w|^2$ je r^2-kratnik absolutne vrednosti $|z|^2$:

$$(1+16^2)r^2 = \prod_{j=1}^{15} (1+j^2)^{m_j} \ .$$

Sedaj pride najbolj nepričakovani del rešitve: Število

$$p = 1 + 16^2 = 257$$

je praštevilo, na desni pa za vse faktorje velja

$$1 + j^2 < 1 + 16^2 = p \ .$$

To je v nasprotju z enoličnim razcepom števila na praštevila.

Za konec še primer zadnje, najtežje naloge:

I.5. *Naj bo $n \geq 2$ in $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ točke v n-razsežnem evklidskem prostoru, ki ne ležijo na isti hiperravnini. Točka B leži v notranjosti konveksne ogrinjače točk $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Pokaži, da je kot $\angle A_iBA_j$ top za vsaj n parov (i,j), $1 \leq i < j \leq n+1$.*

Za $1 \leq i \leq n+1$ označimo $v_i = BA_i$. Kot $\angle A_iBA_j$ je top natanko tedaj, ko je skalarni produkt $\langle v_i, v_j \rangle < 0$. Ker je B v notranjosti konveksne ogrinjače, za primerna pozitivna števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ z vsoto, manjšo od 1, velja

$$A_{n+1}B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_{n+1}A_i \ ,$$

ali drugače

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v_{n+1} = 0 \ .$$

Potem je tudi $\lambda_{n+1} := 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$.

Poglejmo si graf, ki ima za vozlišča točke $1, 2, \ldots, n+1$. Točki i in j naj bosta povezani, če je $\langle v_i, v_j \rangle < 0$. Pokazali bomo, da je ta graf povezan. Ker ima vsak povezan graf z $n+1$ vozlišči vsaj n povezav, bo s tem naloga rešena.

Če graf ne bi bil povezan, bi lahko vozlišča razbili na disjunktni podmnožici V in W z $V \cup W = \{1, \ldots, n+1\}$, pri čemer bi zaradi nepovezanosti veljalo $\langle v_i, v_j \rangle \geq 0$ za vse $i \in V$ in $j \in W$.

Poglejmo si enakost

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{i \in V} \lambda_i v_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i \in W} \lambda_i v_i \right\|^2 + 2 \sum_{i \in V} \sum_{j \in W} \lambda_i \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \ .$$

Seštevanci v zadnji dvojni vsoti so nenegativni. Ker točke ne ležijo v isti hiperravnini, velja tudi

$$\sum_{i \in V} \lambda_i v_i \neq 0 \ \text{ in } \ \sum_{i \in W} \lambda_i v_i \neq 0.$$

To pomeni, da zadnja enakost ni možna in prišli smo do protislovja.

Kljub na videz liberalnim ocenam kot zanimivost povejmo, da je ocena v nalogi najboljša možna. Za primer bi lahko vzeli $v_{n+1} = (1, 1, \ldots, 1)$, za v_i pa vektor, ki ima na i-tem mestu -1, drugje pa ničle. V tem primeru je $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ le v primeru, ko je $i = n+1$ ali $j = n+1$.

Marjan Jerman

MARS 2015

Od 16. do 22. avgusta letos je potekal jubilejni deseti tabor za srednješolce MaRS (MAtematično Raziskovalno Srečanje). Marsovci smo se zbrali v Rakovem Škocjanu, natančneje v Centru šolskih in obšolskih dejavnosti Rak. Tabora se je udeležilo 22 dijakov in dijakinj iz vse Slovenije, za uspešno odpravo pa je poskrbelo deset članov posadke: David Gajser, Rok Gregorič, Vesna Iršič, Vid Kocijan, Anja Petković, Nejc Rosenstein, Živa Urbančič, Jana Vidrih, Neža Žager Korenjak (UL FMF) in Matej Roškarič (UM FNM), v oporo pa nam je bil tudi dr. Boštjan Kuzman (UL PeF).

Tako kot vsa leta doslej je bila osrednja marsovska dejavnost priprava projektov. Člani posadke smo pripravili osem različnih matematičnih tem, ki so jih udeleženci raziskovali v skupinah po dva ali tri. Vsak dan smo kar nekaj ur namenili delu pri svojem projektu. Preden so udeleženci problem rešili, so morali spoznati nekaj novih matematičnih znanj, nato pa so napisali krajši članek ali sestavili videopredstavitev ter morebitno računalniško aplikacijo. Na koncu so pripravili še kratko predstavitev, s katero so svojim staršem in drugim obiskovalcem »pristanka« (tj. zaključne prireditve tabora) predstavili, kaj so raziskovali. Letos so se dijaki pri projektih ukvarjali s: heksafleksagoni, Taylorjevo vrsto, Abel-Ruffinijevim izrekom, igro Nim, Banachovim skrčitvenim načelom, problemi na okrogli biljardni mizi, urejevalno razdaljo in problemom umetnostne galerije. Več informacij o projektih najdete na `http://mars.famnit.upr.si/projekti.html`.

Prve tri dni nas je na Marsu obiskoval dr. Zlatan Magajna (UL PeF), ki je za dijake izvedel delavnico z naslovom Popotovanje po trikotniku. Na delavnici so dijaki spoznali znamenite točke trikotnika in pomembne izreke elementarne geometrije. Predavatelj je predstavil tudi program OK Geometry, s katerim so dijaki odkrivali lastnosti posameznih konstrukcij in se učili dokazovanja trditev.

Večere smo imeli rezervirane za gostujoče predavatelje. Prvi marsovski večer nam je popestrila ddr. Melita Hajdinjak (UL FE), ki nam je povedala nekaj o komunikaciji človek–stroj. Razložila je razvoj sistemov, ki omogočajo komunikacijo med ljudmi in stroji, ter pokazala nekaj testnih različic tovrstne komunikacije. V ponedeljek zvečer nas je dr. Marko Jakovac (UM FNM) popeljal v svet teorije grafov in dijakom predstavil problem königberških mostov, semaforizacije križišč, ravninskosti grafa in problem volka, ovce

Slika 1. Skupinska slika vseh udeležencev in posadke MaRS 2015.

in repe. V torek smo prisluhnili dr. Barbari Drinovec Drnovšek (UL FMF), ki je razložila, kako smiselno definirati dolžino krivulj in površino ploskev. Ogledali smo si tudi Schwartzev primer (napačnega) računanja površine valja, ki razloži, zakaj računanje površine s pomočjo naivne triangulacije ne da nujno pravega rezultata. V četrtek nas je dr. Anton Suhadolc popeljal skozi zgodovino pomembnih slovenskih matematikov – vse od Jurija Vege pa do Josipa Plemlja in Riharda Zupančiča. Zadnji večer nam je dr. Boštjan Kuzman orisal najpomembnejše in najzanimivejše prelomnice v desetletni zgodovini tabora MaRS.

Med strokovnim delom omenimo še tri delavnice, ki so udeležencem pomagale pri projektih. Neža je pripravila delavnico LaTeX, na kateri so se udeleženci naučili uporabljati tudi Beamer. Matej je dijakom predstavil program GeoGebra, Anja pa jim je razložila osnove retorike.

Kljub zgoščenemu urniku je bilo razpoloženje na taboru izjemno. V prostem času smo se sprostili ob različnih družabnih igrah. Vsak dan je bila objavljena tudi uganka dneva, s katero smo si proste urice krajšali tako posadka kot udeleženci. Podali smo se tudi na pohod po naravoslovni učni poti Rakov Škocjan, zadnje popoldne pa je bila pripravljena Velika marsovska avantura, orientacijski pohod z matematično obarvanimi kontrolnimi točkami.

Slika 2. Posadka na letošnjem MaRS-u. Od spredaj nazaj: Anja, Rok, Neža, Živa, Matej, Jana, Vesna, Nejc, David, Vid.

V imenu celotne ekipe se zahvaljujem vsem, ki so srečanje omogočili: DMFA Slovenije, Mestni občini Ljubljana, ŠO FMF, UL FMF ter UM FNM.

Vesna Iršič

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2015[1]

V letu 2015 se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 9 novih članov:

2423. Lucija Čoga
2424. Barbara Ikica
2425. Matej Mencinger
2426. Jure Oder
2427. Egon Pavlica
2428. Gašper Peresciutti
2429. Simona Pustavrh
2430. Franci Tajnik
2431. Benjamin Tomažič

Tadeja Šekoranja

[1]Novi člani DMFA Slovenije za leto 2014 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **61** (2014) 6, stran XXIII.

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 62 (2015)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

Šola — School

Vesti — News

Nove knjige — New books

http://www.obzornik.si/

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, NOVEMBER 2015
Letnik 62, številka 6

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Množica fotopomnoževalk v steni detektorja nevtrinov, glej članek na strani 210.